Н. И. Ахиезер, Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов, *Докл. АН СССР*, 1961, том 141, номер 2, 263–266

Доклады Академии наук СССР
1961, Том 141, № 2

МАТЕМАТИКА

Н. И. АХИЕЗЕР

КОНТИНУАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НА СИСТЕМЕ ИНТЕРВАЛОВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 12 VI 1961)

1. Если неубывающая функция $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ удовлетворяет некоторым общим условиям, которые были установлены и исследованы в статьях ([1-3]), то однозначно определяется непрерывное по x $(x \geqslant 0)$ семейство функций $\varphi(x, \lambda)$, целых относительно λ, обладающее тем свойством, что для любой непрерывной финитной функции $f(x)$ $(x \geqslant 0)$ интеграл $F(\lambda) = \int\limits_0^\infty f(x)\varphi(x, \lambda)\,dx$ принадлежит $\mathscr{L}_\sigma^2$ и удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2\,d\sigma(\lambda) = \int\limits_0^\infty |f(x)|^2\,dx. \tag{1}$$

Функция $\sigma(\lambda)$ может иметь заданные интервалы постоянства на конечном расстоянии, но общий метод построения функции $\varphi(x, \lambda)$ не дает возможности проследить, как сказывается наличие таких «пустых» интервалов на аналитической природе функции $\varphi(x, \lambda)$ и «потенциала» $q(x)$ в дифференциальном уравнении, которому, согласно общей теории, функция $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет. Среди классических примеров, которые обычно рассматриваются, также нет ни одного, в котором непрерывный спектр заполнял бы всю числовую ось или полуось с исключенным конечным числом интервалов. Такие примеры, несомненно интересные сами по себе, могли бы послужить отправным пунктом для некоторых общих построений.

Так как функция $\varphi(x, \lambda)$ является континуальным аналогом семейства ортогональных многочленов, то мне представилось естественным исследовать, что может дать применительно к континуальному случаю метод статей ([4, 5]), позволивший строить и изучать ортогональные многочлены на системе конечных интервалов. Этому исследованию и посвящена настоящая статья, в которой, однако, я не стремлюсь к наибольшей общности, допускаемой упомянутым методом.

2. Обозначим через E положительную половину вещественной оси, из которой удалены «пустые» интервалы

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_\rho, \beta_\rho) \quad (0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \ldots < \beta_\rho < \infty), \tag{I}$$

и введем многочлены $R(\lambda) = \lambda(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \beta_1)\ldots(\lambda - \beta_\rho)$, $P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)\ldots(\lambda - \alpha_\rho)$. Комплексную λ-плоскость, разрезанную вдоль E, назовем областью $\mathfrak{G}$. Условимся, что в точках верхнего берега разреза (β_ρ, ∞) радикал $\sqrt{R(\lambda)}$ имеет положительное значение. Примем, что спектральная функция $\sigma(\lambda)$ абсолютно непрерывна $(\sigma'(\lambda) = w(\lambda))$ и положим, что $w(\lambda) = 0$ при $\lambda < 0$ и $\lambda \in I$. Мы будем параллельно рассматривать два случая, в которых, соответственно:

$$w(\lambda) \equiv w_C(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\pi\sqrt{R(\lambda)}}, \quad w(\lambda) \equiv w_S(\lambda) = \frac{\sqrt{R(\lambda)}}{\pi P(\lambda)} \quad (\lambda \in E).$$

Целую функцию $\varphi(x, \lambda)$ в первом случае назовем $C(x, \lambda)$, а во втором $S(x, \lambda)$. Это функции нормального типа x порядка $^1/_2$, которые при стремлении λ к бесконечности вдоль положительной половины вещественной оси имеют следующие асимптотические представления:

$$C(x, \lambda) \sim \cos(x\sqrt{\lambda}), \quad S(x, \lambda) \sim \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}.$$

Мы будем рассматривать функцию

$$\mathscr{E}(x, \lambda) = C(x, \lambda) + i\frac{\sqrt{R(\lambda)}}{P(\lambda)} S(x, \lambda),$$

которая в плоскости λ не только не является целой, но даже и однозначной. Поэтому введем риманову поверхность, назовем ее $\mathfrak{F}$, сшивая с листом $\mathfrak{S}$ второй подобный лист $\mathfrak{S}'$ таким образом, чтобы линиями перехода поверхности $\mathfrak{F}$ были отрезки системы (E). Если ζ — точка одного из листов поверхности $\mathfrak{F}$, то соответствующую точку другого листа назовем ζ'.

На поверхности $\mathfrak{F}$ функция $\mathscr{E}(x, \lambda)$ уже будет однозначной. Рассматривая вместе с нею функцию

$$\mathscr{E}(x, \lambda') = C(x, \lambda) - i\frac{\sqrt{R(\lambda)}}{P(\lambda)} S(x, \lambda),$$

нетрудно убедиться в том, что функция $\mathscr{E}(x, \lambda)$ имеет по крайней мере по одному корню в каждом из интервалов системы (1) (либо на верхнем, либо на нижнем листе поверхности $\mathfrak{F}$). Учитывая поведение функции $\mathscr{E}(x, \lambda)$ в окрестности бесконечно далекой точки, мы убеждаемся в том, что функция $\ln \mathscr{E}(x, \lambda)$ есть абелев интеграл с единственным и притом простым полюсом в точке $\lambda = \infty$, а его логарифмическими особыми точками с отрицательными вычетами являются только точки $\lambda = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho$. Поэтому число нулей функции $\mathscr{E}(x, \lambda)$ на поверхности $\mathfrak{F}$ равно ρ, и, значит, все эти нули лежат по одному в интервалах системы (1); назовем их γ_k, так что $\alpha_k < \gamma_k < \beta_k$. Эти свойства и асимптотика

$$\mathscr{E}(x, \lambda) \sim e^{ix\sqrt{\lambda}} \tag{2}$$

на бесконечности полностью определяют функцию $\mathscr{E}(x, \lambda)$, что и оправдывает ее введение. Для построения функции $\mathscr{E}(x, \lambda)$ необходимо воспользоваться аппаратом теории гиперэллиптических интегралов.

3. С этой целью введем нормальные интегралы первого рода

$$\omega_k(\lambda) = \int_{\beta_\rho}^{\lambda} \frac{m_k(z)}{\sqrt{R(z)}} dz, \quad m_k(z) = C_k z^{\rho-1} + \ldots,$$

которые определяются условиями

$$\int_{\beta_{j-1}}^{\alpha_j} \frac{m_k(z)}{\sqrt{R(z)}} dz = \begin{cases} {}^1/_2\pi i & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases} \qquad (\beta_0 = 0;\ j, k = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Затем введем интеграл второго рода с полюсом в точке $\lambda = \infty$

$$\omega(\lambda) = \int_{\beta_\rho}^{\lambda} \frac{M(z)}{2\sqrt{R(z)}} dz,$$

где многочлен $M(z) = z^\rho + \ldots$ определяется условиями

$$\int_{\beta_{j-1}}^{\alpha_j} \frac{M(z)}{\sqrt{R(z)}} dz = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Нетрудно проверить, что на бесконечности $\omega(\lambda) = \sqrt{\lambda} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

Наконец, введем нормальный интеграл третьего рода

$$\omega(\lambda;\gamma_k,\alpha_k) = \int_{\infty}^{\lambda}\left[\frac{\sqrt{R(z)}+\sqrt{R(\gamma_k)}}{z-\gamma_k} - \frac{\sqrt{R(z)}}{z-\alpha_k} + M_k(z)\right]\frac{dz}{2\sqrt{R(z)}},$$

где многочлен $M_k(z)$ степени $\rho - 1$ определен из условия, что функция $\exp\omega(\lambda;\gamma_k,\alpha_k)$ в области $\mathfrak{G}$ однозначна. В окрестности точек $\lambda = \gamma_k$, $\lambda = \alpha_k$ этот интеграл имеет вид

$$\omega(\lambda;\gamma_k,\alpha_k) = \ln(\lambda-\gamma_k) + \ldots,\qquad \omega(\lambda;\gamma_k,\alpha_k) = -{}^1/_2\ln(\lambda-\alpha_k) + \ldots$$

Не мешает заметить, что $\exp\omega(\lambda';\gamma_k,\alpha_k) = \exp\omega(\lambda;\gamma_k',\alpha_k)$.

С помощью введенных абелевых интегралов функцию $\mathscr{E}(x,\lambda)$ можно представить в виде

$$\mathscr{E}(x,\lambda) = \exp\left\{ix\omega(\lambda) + \sum_{k=1}^{\rho}\omega(\lambda;\gamma_k,\alpha_k)\right\}. \tag{3}$$

Действительно, ее единственными нулями являются точки γ_k, единственными полосами точки α_k и на ∞ имеет место асимптотическое равенство (2). В формуле (3) мы можем придавать параметру x также и отрицательные значения.

Остается выяснить, к какой задаче анализа сводится нахождение параметров $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\rho$, которые, конечно, зависят от x. Это не представляет труда. В самом деле, функция $\mathscr{E}(x,\lambda)$ должна быть однозначной на $\mathfrak{F}$. Поэтому все модули периодичности абелева интеграла

$$\ln\mathscr{E}(x,\lambda) = ix\omega(\lambda) + \sum_{k=1}^{\rho}\omega(\lambda;\gamma_k,\alpha_k)$$

должны равняться целым кратностям числа $2\pi i$. Для нахождения модулей периодичности проведем на $\mathfrak{F}$ канонические сечения a_j, b_j $(j = 1, 2, \ldots, \rho)$. В качестве b_j примем замкнутый контур, охватывающий на верхнем листе разрез (β_{j-1}, α_j). Интегралы, взятые вдоль контуров b_j, будут модулями периодичности A_j. Из построения функции $\mathscr{E}(x,\lambda)$ следует, что все модули A_j равны нулю. В качестве сечения a_j мы возьмем замкнутый контур, который начинается на верхнем берегу разреза (β_{j-1}, α_j), идет по первому листу до разреза (β_ρ, ∞), переходит на второй лист и заканчивается на разрезе (β_{j-1}, α_j) в своей начальной точке. Интеграл, взятый по a_j, будет модулем периодичности B_j. Для $\omega(\lambda)$ этот модуль известен и равен

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_\rho}\frac{M(z)}{\sqrt{R(z)}}dz = -2U_j\qquad (j = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Соответствующий модуль периодичности для $\omega(\lambda;\gamma_k,\alpha_k)$ по известной теореме теории абелевых интегралов равен $2\int_{\alpha_k}^{\gamma_k}d\omega_j(\lambda)$. Поэтому наша система уравнений принимает вид

$$-2ixU_j + \sum_{k=1}^{\rho}2\int_{\alpha_k}^{\gamma_k}d\omega_j(\lambda) = 2n_j\pi i.$$

Числа n_j равны нулю, так как левые части вещественны. Мы видим, что для нахождения параметров γ_k приходится решить якобиеву проблему обращения гиперэллиптических интегралов

$$\int_{\alpha_1}^{\gamma^1} d\omega_j(\lambda) + \int_{\alpha_2}^{\gamma_2} d\omega_j(\lambda) + \ldots + \int_{\alpha_\rho}^{\gamma_\rho} d\omega_j(\lambda) = ixU_j \quad (j = 1, 2, \ldots, \rho),$$

где все интегралы берутся по отрезкам вещественной оси (на том листе, где лежит соответствующая точка γ_k). Отсюда видно, что если изменить знак перед x, то все γ_k заменятся на γ'_k. Поэтому имеет место соотношение $\mathcal{E}(x, \lambda') = \mathcal{E}(-x, \lambda)$.

4. В наших построениях мы опирались на общую теорию обратной задачи Штурма — Лиувилля. Однако мы могли бы и не опираться на нее, но тогда необходимо было бы еще доказать, что порождаемые функцией $\mathcal{E}(x, \lambda)$ функции $C(x, \lambda)$, $S(x, \lambda)$ удовлетворяют тем соотношениям континуальной ортогональности, которые выражаются равенством Парсеваля (1). Такое прямое доказательство, конечно, проходит.

5. В случае лишь одного пустого интервала ($\rho = 1$) наши построения сильно упрощаются и допускают интересное завершение. Мы можем, не нарушая общности, положить $\alpha_1 = k^2$ $(0 < k < 1)$ и $\beta_1 = 1$. С помощью конформного отображения

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{sh}^2(u;\, k)}, \quad \frac{du}{d\lambda} = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda(\lambda - k^2)(\lambda - 1)}}$$

риманова поверхность отображается на прямоугольник периодов, верхняя половина которого отвечает первому листу, а нижняя — второму листу поверхности. Функция $\mathcal{E}(x, \lambda)$ теперь представляется с помощью якобиевых тэта-функций и имеет вид

$$\mathcal{E}(x, \lambda) = \frac{\theta_1(0)\,\theta_1(u - ix)}{\theta_1(u)\,\theta_1(ix)}\, e^{ix\mathrm{H}'(u)/\mathrm{H}(u)}. \tag{4}$$

Чтобы доказать представление (4), нужно воспользоваться тем, что $\mathcal{E}(x, \lambda)$ обладает полюсом в точке $\lambda = k^2$, т. е. при $u = K + iK'$ имеет оба периода $2K$, $2iK'$ и указанную выше асимптотику при $\lambda \to \infty$.

Нетрудно составить дифференциальное уравнение, решениями которого являются функции $C(x, \lambda)$, $S(x, \lambda)$. Оно имеет вид

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + (1 - k^2)\frac{\mathrm{cn}^2(x;\, k') - k^2\,\mathrm{sn}^2(x;\, k')}{\mathrm{cn}^2(x;\, k') + k^2\,\mathrm{sn}^2(x;\, k')}\, y = \lambda y, \tag{5}$$

где $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Как видим, потенциал $q(x)$ есть непрерывная функция от x, имеющая вещественный период $2K'$. Существует связь ([6]) между непрерывным спектром и ляпуновскими зонами устойчивости уравнения

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda y \quad (x > 0)$$

с периодическим потенциалом $q(x)$. На основании этой связи можно прямо доказать, что спектр нашего уравнения (5) образован интервалами $[0, k^2]$, $[1, \infty]$. Заметим также, что наше уравнение (5) непосредственно связано с классическим уравнением Лямэ, которое в функциях Якоби имеет вид

$$y''(\xi) - n(n+1)\,k^2\,\mathrm{sn}^2(\xi;\, k)\, y(\xi) = \mu y(\xi),$$

где n и μ — константы. Полагая в этом уравнении $\xi = K + ix$, $n = 1$, $\mu = \lambda - 1 - k^2$, мы получим наше уравнение (5).

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР

Поступило
9 VI 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Марченко, Тр. Московск. матем. общ., 1, 327 (1952). [2] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 309(1951). [3] М. Г. Крейн, ДАН, 97, № 1 (1954). [4] Н. И. Ахиезер, ДАН, 134, № 1 (1960). [5] Н. И. Ахиезер, Ю. Я. Томчук, ДАН, 138, № 4 (1961). [6] S. Wallach, Am. J. Math., 70, № 4 (1948).