

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гринь, Л. А. Черкас, Экстремумы функции Андронова–Хопфа  
полиномиальной системы Льенара,  
*Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 1, 50–60

<https://www.mathnet.ru/de11209>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

15 мая 2025 г., 21:50:54



══════ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ══════

УДК 517.925.42

## ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ АНДРОНОВА–ХОПФА ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА

© 2005 г. А. А. Гринь, Л. А. Черкас

Рассмотрим вещественную автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (1)$$

с непрерывно дифференцируемыми правыми частями в некоторой области  $\Omega \subset R^2$ . В работе [1] показана определяющая роль особых траекторий (положений равновесия, сепаратрис и предельных циклов) при построении качественной картины поведения траекторий системы (1). Однако задача локализации и оценки числа предельных циклов даже для полиномиальных систем (1)

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^j, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^n b_{ij} x^i y^j, \quad (2)$$

$a_{ij}, b_{ij} \in R$ , до сих пор остается нерешенной и составляет вторую часть 16-й проблемы Гильберта [2]. Наиболее полная информация о вековой истории этой проблемы представлена в [3]. Вместе с этим следует отметить, что в работе [3] не изложены результаты по конструктивным методам оценки числа предельных циклов индивидуальных систем (2), а также некоторых специальных классов таких систем. Проблему Гильберта, по-видимому, следует считать полностью решенной, если имеется не только глобальная оценка числа предельных циклов, но и разработаны также и конструктивные методы получения точной оценки числа предельных циклов индивидуальной системы по аналогии, например, с задачей нахождения числа действительных корней многочлена с действительными коэффициентами. Поскольку данная задача слишком сложна для решения в оригинальном виде [4, 5], предпринимались попытки рассмотреть ее частные версии, одна из которых посвящена системе Льенара [6–9] вида

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad F(x) = \sum_{i=1}^{2l+1} a_i x^i. \quad (3)$$

Смейл [10] высказал гипотезу, что система (3) может иметь не более  $l$  предельных циклов.

Цель данной работы заключается в разработке метода проверки гипотезы Смейла при  $l \geq 3$  для однопараметрических семейств систем (3) с параметром, поворачивающим поле, с помощью комбинированного использования функций Дюлака [11, 12], Пуанкаре и функции предельных циклов Андронова–Хопфа [13, 14].

**Определение 1.** Функция  $\Psi(x, y) \in C^1(\Omega)$ ,  $\Omega \subset R^2$ , называется функцией Дюлака для системы (1) в области  $\Omega$ , если существует такое вещественное число  $k \neq 0$ , что справедливо неравенство

$$\Phi \equiv k\Psi \operatorname{div} f + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0 (< 0), \quad (x, y) \in \Omega, \quad f = (P, Q).$$

**Замечание 1.** В этом случае кривая  $W = \{(x, y) \in \Omega : \Psi(x, y) = 0\}$  является трансверсальной векторному полю  $f$  и разбивает область  $\Omega$  на подобласти, в каждой из которых функция  $B = |\Psi|^{1/k}$  является классической функцией Дюлака.

Функция Дюлака в смысле определения 1 эффективно использована в работах [15–17] для решения задачи оценки числа и локализации предельных циклов систем (2).

**Определение 2.** Поверхностью предельных циклов системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, a), \quad (x, y) \in \Omega \subset R^2, \quad a \in R, \quad (4)$$

называется множество точек пространства  $R^2 \times R$

$$SLC = \{(x, y, a) : (x, y) \in L(a), a \in R\},$$

где  $L(a)$  – множества на фазовой плоскости  $R^2$ , образованные предельными циклами системы (4) при данном значении параметра  $a$ .

**Определение 3.** Параметр  $a$  поворачивает векторное поле системы (4) в  $R^2$ , если справедливо неравенство  $(P)'_a Q - P(Q)'_a \geq 0$  ( $\leq 0$ ), которое не является тождеством на любом предельном цикле системы (4), принадлежащем множеству  $L(a)$ .

**Замечание 2.** Условие в определении 3 означает, что предельные циклы системы (4) при изменении параметра  $a$  изменяют свое положение, но при этом не пересекаются при различных значениях параметра. Множества  $L(a)$ ,  $a \in R$ , образуют некоторую открытую область  $G \subset R^2$ , на которой сказанное выше позволяет ввести функцию предельных циклов (функцию Андронова-Хопфа).

**Определение 4.** Функцией предельных циклов системы (4) называется функция  $p(x, y)$ ,  $(x, y) \in G$ , принимающая значение  $a$  на множестве  $L(a)$  при данном значении  $a$ ,  $G$  – открытая область, образованная множествами  $L(a)$  при  $a \in R$ .

**Замечание 3.** Уравнение  $a = p(x, y)$  определяет в пространстве  $R^2 \times R$  инвариантное многообразие системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, a), \quad \frac{da}{dt} = 0.$$

Более того, функция  $p(x, y)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial x} P(x, y, p(x, y)) + \frac{\partial p}{\partial y} Q(x, y, p(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in G.$$

**Замечание 4.** В случае, если параметр  $a$  поворачивает векторное поле системы (4), поверхность предельных циклов определяется уравнением  $p(x, y) = a$ ,  $a \in R$ , и функцию предельных циклов можно дополнить точкой  $(x_0, y_0, p(x_0, y_0))$ , соответствующей бифуркации Андронова-Хопфа. Для параметров, не поворачивающих поле, функции предельных циклов ведут себя более сложно за счет того, что могут быть не однозначными и иметь точки ветвления, а также ветви, не имеющие точек бифуркации Андронова-Хопфа.

Если предельные циклы, окружающие особую точку  $O(0, 0)$ , при  $P(0, 0, a) = Q(0, 0, a) = 0$  пересекают полуось  $y = 0$ ,  $x > 0$  только в одной точке, то вместо функции  $p(x, y)$  удобно рассматривать функцию  $АН(x) = p(x, 0)$  [14], которая дает полную информацию о предельных циклах системы (4) и их бифуркациях при изменении  $a$ . Впервые свойства систем с параметром, поворачивающим поле, были систематически исследованы Даффом [18] и широко использовались впоследствии при изучении предельных циклов.

В работе [13] с помощью численных методов построены приближенные функции предельных циклов  $АН(x)$  для параметрических семейств системы (3) при  $l = 2$  и 3. За счет нахождения подходящих функций Дюлака для этих семейств подтверждена гипотеза Смейла и в этих случаях доказано существование соответственно двух и трех предельных циклов при определенных значениях параметров.

Результаты численных расчетов функции  $АН(x)$  не всегда надежны в том плане, что могут не учитывать тонкую структуру поведения функции  $АН(x)$ , например, пару очень близких экстремумов. Ниже мы покажем, как проверять достоверность поведения функции  $АН(x)$ : а) в окрестности точки простого экстремума, б) на промежутках монотонности, в) в окрестности особой точки  $O(0, 0)$ .

Наиболее трудоемким является доказательство простоты точек экстремума, так как в них система (1) структурно неустойчива и подходы, использовавшиеся нами для монотонных участков функции  $AH(x)$ , соответствующих грубым системам, здесь не работают. В этом случае воспользуемся результатами работы [12].

**Теорема 1.** Система (1) не имеет предельных циклов кратности три и выше тогда и только тогда, когда система

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad \frac{dz}{dt} = \operatorname{div} f, \quad \frac{dw}{dt} = e^z H_2 \quad (5)$$

не имеет периодических решений. Здесь

$$H_2 = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{PH_1}{H} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{QH_1}{H} \right), \quad H_1 = \operatorname{div} f, \quad H = P^2 + Q^2. \quad (6)$$

Если для системы (5) в качестве функции Пуанкаре выбрать функцию  $F = \Psi(x, y)e^z + \alpha W$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{dF}{dt} = \left( \Psi \operatorname{div} f + \frac{d\Psi}{dt} \right) e^z + \alpha H_2 e^z = e^z \left( \Psi \operatorname{div} f + \frac{d\Psi}{dt} + \alpha H_2 \right),$$

то отсутствие в области  $\Omega$  предельных циклов кратности выше двух у системы (1) сводится к выполнению условия

$$\Psi \operatorname{div} f + \frac{d\Psi}{dt} + \alpha H_2 > 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (7)$$

Таким образом, изучение поведения функции предельных циклов  $AH(x)$  будет проводиться нами с помощью построения функций  $\Psi$ , удовлетворяющих или условию из определения 1, или условию (7).

**Теорема 2.** Пусть система (4) при всех  $a \in I = [a_1, a_2]$  удовлетворяет условиям:

- 1) параметр  $a$  поворачивает поле в односвязной области  $\Omega$ ;
- 2) антиседло  $O(0, 0)$  является единственной особой точкой в области  $\Omega$ ;
- 3) существуют функции  $C_j(a)$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ , а также функция

$$\Psi = \sum_{j=1}^n C_j(a) \Psi_j(x, y) \quad (8)$$

такие, что функция

$$\Phi = \sum_{j=1}^n C_j(a) \Phi_j(x, y, a) + C_{n+1}(a) H_2(x, y, a) > 0, \quad (x, y) \in \Omega_0, \quad (9)$$

где  $\Phi = D(\Psi)$ ,  $D = \operatorname{div} f + P \partial/\partial x + Q \partial/\partial y$  - оператор Дюлака,  $\Omega_0 \subset \Omega$  - кольцеобразная область, окружающая точку  $O(0, 0)$ ,  $C_{n+1}(a) > 0$  ( $< 0$ ) и все рассматриваемые функции имеют необходимую гладкость;

4) система (4) при  $a = a_1$  ( $a_2$ ) имеет в области  $\Omega_0$  два предельных цикла, а при  $a = a_2$  ( $a_1$ ) она не имеет предельных циклов в области  $\Omega_0$ .

Тогда система (4) имеет в области  $\Omega_0$  не более двух предельных циклов.

**Доказательство.** Напомним [19], что предельный цикл  $\Gamma$  системы (1) имеет кратность, равную:

- 1) единице при  $h_1 = \int_0^T \operatorname{div} f dt \neq 0$ ,
- 2) двум при  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = \int_0^T H_2 \exp(\int_0^t \operatorname{div} f d\tau) dt \neq 0$ .

Интегралы 1), 2) берутся вдоль периодического решения периода  $T$  системы (1), соответствующего предельному циклу  $\Gamma$ . При  $h_1 = h_2 = 0$  предельный цикл  $\Gamma$  имеет кратность выше двух.

Воспользуемся теоремой 1 и рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma(a)} e^z \left( \Psi \operatorname{div} f + \frac{d\Psi}{dt} + C_{n+1}(a)H_2 \right) dt > 0,$$

где  $\Gamma(a)$  – предельный цикл в области  $\Omega_0$  при заданном значении параметра  $a$ . Так как

$$e^z \left( \Psi \operatorname{div} f + \frac{d\Psi}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(e^z \Psi),$$

то имеем

$$\int_{\Gamma(a)} \frac{d}{dt}(e^z \Psi) dt + \int_{\Gamma(a)} C_{n+1}(a)H_2 e^z dt > 0$$

или

$$e^z \Psi(x, y, a)|_0^T + C_{n+1}(a) \int_0^T e^z H_2 dt > 0, \quad \Psi(x, y, a)(e^{z(T)} - e^{z(0)}) + C_{n+1}h_2 > 0.$$

В случае кратного предельного цикла справедливо равенство  $z(T) - z(0) = 0$ , поэтому получаем  $C_{n+1}h_2 > 0$ . Поскольку  $C_{n+1}$  сохраняет знак, то и  $h_2$  сохраняет знак. Отсюда следует, что цикл  $\Gamma$  двукратный.

Для решения вопроса о характере устойчивости изнутри и извне двукратного цикла  $\Gamma$  воспользуемся работой [19] и рассмотрим в его окрестности дифференциальное уравнение траекторий системы (1) в универсальной системе криволинейных координат  $s, n$  вида

$$dn/ds = F(s, n), \tag{10}$$

где  $s$  – длина дуги предельного цикла, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки  $B_0$  на кривой  $\Gamma$  по часовой стрелке,  $n$  отсчитывается от точки  $B$  предельного цикла по направленной нормали, проходящей через точку  $B$ . После разложения функции  $F(s, n)$  в ряд по целым степеням  $n$  в окрестности  $\Gamma$  и интегрирования уравнения (10) по  $s$  от 0 до  $l$ , где  $l$  – длина траектории  $\Gamma$ , получим функцию последования

$$\varphi = \varphi(0) + \varphi'(0)n + \frac{\varphi''(0)}{2!}n^2 + \dots$$

По поведению функции  $\varphi(n)$  при  $n$ , близких к нулю, можно судить о характере устойчивости кратного цикла. В окрестности двукратного цикла  $\Gamma$  имеем

$$\varphi - \varphi(0) = \frac{\varphi''(0)}{2!}n^2 + \dots$$

Так как  $h_2 = \varphi''(0)$ , то при  $h_2 > 0$  цикл  $\Gamma$  устойчив изнутри и неустойчив извне, а при  $h_2 < 0$  цикл  $\Gamma$  неустойчив изнутри и устойчив извне.

Проследим теперь за предельными циклами системы (4) при изменении параметра  $a$  на отрезке  $[a_1, a_2]$ , считая для определенности, что при  $a = a_1$  система (4) имеет в области  $\Omega_0$  два предельных цикла, а при  $a = a_2$  их нет. Чтобы при указанном изменении  $a$  в области  $\Omega_0$  появилось более двух предельных циклов, необходимо, чтобы существовали еще по крайней мере два двукратных предельных цикла с различным характером устойчивости извне и изнутри в описанном выше смысле, что невозможно из-за сохранения знака  $h_2(a)$ . Остается лишь один сценарий: два предельных цикла при  $a = a_1$  при каком-то  $a_0 \in [a_1, a_2]$  сливаются и образуют двукратный цикл, а при  $a \in (a_0, a_2]$  предельных циклов в области  $\Omega_0$  нет. Это завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим теперь монотонный участок функции  $AH = AH(x)$ , соответствующий грубому поведению системы (4).

**Теорема 3.** Пусть для системы (4) при всех  $a \in I = [a_1, a_2]$  выполняются условия 1)–3) теоремы 2, причем функция (9) имеет вид

$$\Phi(x, y, a) = \sum_{j=1}^n C_j(a) \Phi_j(x, y, a) > 0, \quad (x, y) \in \Omega_0. \quad (11)$$

Тогда, если семейство предельных циклов при  $a \in I$  заполняет кольцеобразную область  $\Omega_0 \subset \Omega$ , она соответствует монотонной функции  $AH(x)$ , и система (4) при  $a \in I$  имеет в области  $\Omega_0$  точно один предельный цикл.

**Теорема 4** (Бендиксона–Дюлака). Пусть для системы (4) при всех  $a \in I = [a_1, a_2]$  выполняются условия 1)–3) теоремы 2, причем функция  $\Phi$  имеет вид (11) в кольцеобразной области  $\Omega_0$ . Тогда если траектории системы (4) при увеличении времени входят извне через границу  $\partial\Omega_0$  вовнутрь области  $\Omega_0$  (или наоборот), то в области  $\Omega_0$  имеется точно один предельный цикл системы (4).

Существование функции  $\Psi$  в окрестности негрубого фокуса обосновывает

**Теорема 5.** Пусть при  $a = a_0$  система (4) имеет в точке  $O(0, 0)$  негрубый фокус кратности 1 ( $\operatorname{div} f(0) = 0$ , первая фокусная величина  $v_3(a_0) \neq 0$ ) и выполняется условие трансверсальности, т.е. при переходе  $a$  через значение  $a_0$  имеет место бифуркация Андронова–Хопфа единственного предельного цикла. Тогда существуют окрестности  $U_\delta(O)$ ,  $V_\varepsilon(a)$  и функция  $\Psi(x, y, a)$  такие, что функция  $\Phi(x, y, a) = D(\Psi)$  сохраняет знак в окрестности  $U_\delta \times V_\varepsilon$ .

Справедливость теоремы вытекает из результатов работы [12] и следующего утверждения.

**Лемма 1.** Пусть для системы линейных алгебраических уравнений  $A(\alpha)x = b(\alpha)$  выполнены условия

$$\det A(0) = 0, \quad \det A(\alpha) = a_q \alpha^q + a_{q+1} \alpha^{q+1} + \dots, \quad a_q \neq 0, \quad b(\alpha) = b_q \alpha^q + b_{q+1} \alpha^{q+1} + \dots, \quad b_q \neq 0.$$

Тогда система имеет решение  $x(\alpha) \rightarrow x_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} A^{-1}(\alpha)b(\alpha)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Существует  $\varepsilon$ -окрестность  $V_\varepsilon$  точки  $\alpha = 0$ , в которой  $\det A \neq 0$ . Поэтому при  $\alpha \in V_\varepsilon$

$$x(\alpha) = \frac{(A_{ij})^T b(\alpha)}{\det A(\alpha)} = \frac{(A_{ij})^T (b_q + b_{q+1} \alpha + \dots)}{(a_q + a_{q+1} \alpha + \dots)},$$

где  $A_{ij}$  – матрица, составленная из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы  $A(\alpha)$ . Тогда очевидно, что существует конечный предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x(\alpha) = \frac{b_q}{a_q} \lim_{\alpha \rightarrow 0} (A_{ij})^T.$$

Исследование поведения функции  $AH(x)$  опишем на примере системы Льенара (3) при  $l = 3$ , в которой параметр  $a = a_1$  поворачивает поле в  $R^2$ , и ассоциированную с ним функцию Андронова–Хопфа  $a = AH(x)$  достаточно исследовать в области  $0 \leq x \leq m$ , если при  $x > m$  она возрастает. Нужно  $m$  всегда можно выбрать, используя известные теоремы о единственности предельного цикла системы Льенара [15]. Далее, функция  $AH(x)$ ,  $x \in J = [0, m]$ , аппроксимируется полиномом или сплайн-функцией  $\tilde{A}(x)$  с помощью численных методов. Функция  $\tilde{A}(x)$  дает возможность приближенно найти области возрастания и убывания функции  $AH(x)$ . Для этого разбиваем отрезок  $J$  на перекрывающиеся друг друга на своих концах отрезки трех типов: 1) отрезок, соответствующий бифуркации Андронова–Хопфа, 2) отрезки, соответствующие строго монотонному поведению функции  $AH(x)$ , 3) отрезки, содержащие двукратные предельные циклы.

Пусть по численному прогнозу функция  $AH(x)$  должна возрастать на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , и это мы должны подтвердить алгебраическими методами. Используя отображение Пуанкаре,

приближенно находим  $AH(\alpha) \approx a_1$ ,  $AH(\beta) \approx a_2$ ,  $a_1 < AH(\alpha)$ ,  $a_2 > AH(\beta)$ . Рассмотрим теперь двухпараметрическое семейство систем

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x) + \mu x, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \mu(y - F(x)), \quad (12)$$

в котором параметр  $\mu$  строго поворачивает поле при  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Приближенно найдем предельные циклы  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ , системы (12) при  $a = a_i$ ,  $\mu = \mu_i$ , проходящие соответственно через точки  $x = c < \alpha$ ,  $y = 0$  и  $x = b > \beta$ ,  $y = 0$ . Они существуют, если значение  $c$  достаточно близко к  $\alpha$ , а  $b$  — к  $\beta$ . При сохранении определенной точности вычислений кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  являются трансверсальями системы (3) соответственно при  $a = a_1$ ,  $a = a_2$  и образуют кольцеобразную область  $\Omega_0$ , в которой находятся все предельные циклы системы (3), проходящие через точки  $(x_0, 0)$ ,  $x_0 \in I$ .

Далее используем теорему 3. Алгоритм построения функции  $\Psi$  для системы (3) при  $l = 3$  в области  $\Omega$  для конкретных значений  $a$  хорошо разработан (см. [12–14]). Поэтому, выбрав в области  $\Omega$  сетку, численно найдем коэффициенты  $C_j(a_i)$  функции  $\Psi$ ,  $a_i = a_1 + hi$ ,  $i = \overline{0, l}$ ,  $h = (a_2 - a_1)/l$  так, чтобы выполнялось неравенство (11). Затем по значениям  $C_j(a_i)$  строим сглаживающие многочлены  $C_j(a)$  на отрезке  $[a_1, a_2]$ . Если построенная функция  $\Phi(x, y, a)$  удовлетворяет условию (11), то это доказывает возрастание функции  $AH(x)$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$ .

Аналогично строится функция  $\Psi$  в окрестности точки экстремума, только вместо функции (11) рассматривается функция (9). Теперь пусть по численному прогнозу функция  $AH(x)$  имеет на отрезке  $[\alpha_1, \beta_1]$  одну точку экстремума, и мы должны подтвердить это алгебраически. Сначала по описанной выше процедуре убедимся в справедливости теоремы 3 на соседних монотонных отрезках  $[\alpha, \beta]$  и  $[\alpha_2, \beta_2]$ ,  $\alpha_1$  выбираем достаточно близким к  $\beta$ , а  $\beta_1$  — к  $\alpha_2$ , причем  $\alpha_1 < \beta < \alpha_2 < \beta_1$ . Затем находим предельные циклы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  системы (12), проходящие соответственно через точки  $x = c < \alpha_1$ ,  $y = 0$  и  $x = b > \beta_1$ ,  $y = 0$  и образующие кольцеобразную область  $\Omega_0$ . Для применения теоремы 2 выберем в области  $\Omega_0$  сетку и в каждом ее узле численно найдем коэффициенты  $C_j(a_i)$  функции (8) так, чтобы выполнялось неравенство (9). По найденным значениям  $C_j(a_i)$  строим сглаживающие многочлены  $C_j(a)$  на отрезке  $[a_1, a_2]$ ,  $a_1 \approx AH(\alpha_1)$ ,  $a_2 \approx AH(\beta_1)$ . Если полученная функция  $\Phi(x, y, a)$  удовлетворяет условию (9), то в силу теоремы 2 функция  $AH(x)$  на отрезке  $[\alpha_1, \beta_1]$  имеет единственную точку экстремума.

Построение функции  $\Psi = \sum_{i+j=0}^4 \Psi_{ij}$  в окрестности фокуса  $O(0, 0)$ , соответствующей функции  $a = AH(x)$  на отрезке  $[0, \varepsilon]$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , опишем для системы (2) при  $a_{00} = b_{00} = 0$ ,  $-a_{01} = b_{10} = 1$ ,  $a_{10} = b_{01} = a$ , имеющей при  $a = 0$  негрубый фокус. Из работы [12] в этом случае имеем  $\Psi_{00}, \Psi_{01}, \Psi_{10}, \Psi_{11} \rightarrow 0$ ,  $\Psi_{20}, \Psi_{02} \rightarrow 1$ , если  $a \rightarrow 0$ . Остальные  $\Psi_{ij}$  можно выбрать таким образом, чтобы полином

$$\Phi = -\frac{8a^2(k+1)}{g_3} + \left(\frac{2k+1}{4}g_3 + aN\right)(x^2 + y^2)^2 + \dots$$

сохранял знак в этой окрестности, если  $-1 < k < -0.5$ ; первая фокусная величина Ляпунова  $g_3 = b_{02}(b_{11} + 2a_{02}) - a_{20}(a_{11} + 2b_{20}) - a_{11}a_{02} + b_{11}b_{20}$  предполагается отличной от нуля. При этом условие разрешимости соответствующей системы линейных уравнений относительно  $\Psi_{ij}$ ,  $i + j = 4$ , опирается на лемму.

Реализуем теперь сказанное выше на конкретном примере системы Лъенара (3) при  $l = 3$ , имеющей в конечной части фазовой плоскости единственную особую точку  $O(0, 0)$ , которая является фокусом при  $|a_1| < 2$  и узлом при  $|a_1| \geq 2$ . Бесконечность фазовой плоскости системы (3) является отталкивающей. К настоящему времени для системы (3) известно следующее [20]: при  $F(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  и  $a_1a_3 < 0$  она имеет точно один предельный цикл, который является устойчивым, если  $a_1 < 0$ , и неустойчивым, если  $a_1 > 0$ ; при  $F(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5$  имеется не более двух предельных циклов; с помощью метода малого параметра получены системы, имеющие точно  $l$  предельных циклов.

Однако в общем случае возникают трудности уже при  $l = 3$  и известно только несколько примеров индивидуальных систем (3), имеющих точно три предельных цикла [20, 21]. С по-

мощью нашего подхода при  $l = 4$  и  $5$  будут построены примеры систем, имеющих соответственно четыре и пять предельных циклов, а также показана возможность контролировать число предельных циклов однопараметрических семейств систем (3).

**Пример 1.** Численными методами для системы Льенара вида (3) при

$$F(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 0.4)x^3 - ax, \quad (13)$$

где  $a$  – параметр, поворачивающий поле, можно на отрезке  $[0, 1.2]$  приближенно найти функцию Андронова–Хопфа, которая после аппроксимации по методу наименьших квадратов имеет вид

$$\begin{aligned} AH(x) = & 0.07792671x^2 + 3.83223294x^3 - 26.10615207x^4 + 84.43890066x^5 - \\ & - 157.39711996x^6 + 167.24354198x^7 - 93.70813723x^8 + 21.59025520x^9. \end{aligned}$$

Она возрастает при  $x \in [0, 0.467775]$  и  $x \in [0.925658, +\infty]$ , убывает при  $x \in [0.467775, 0.925658]$ ,  $A(0.467775, 0.0294654)$  – точка максимума,  $B(0.925658, -0.0441165)$  – точка минимума.

Исследование поведения функции  $AH(x)$  начнем с доказательства простоты ее точек экстремума с помощью теоремы 2 на примере точки минимума  $B$ . Для построения функций (8), удовлетворяющих условию (9), воспользуемся подходом из работ [15–17] и будем искать положительный максимин

$$\max_{|C| \leq 1} \min_{(x,y) \in \Omega_0} \Phi(x, y, a, C(a)) = 1/R,$$

$C = (C_1, \dots, C_{n+1})$ ,  $|C| = \max |C_i|$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ . Только для удобства вместо функции  $\Phi$  из (9) рассмотрим функцию

$$\tilde{\Phi}(x, y, a, C(a)) = \sum_{i=1}^{n+2} C_i(a) \Phi(x, y, a),$$

$$C = (C_1, \dots, C_{n+2}), \quad C_{n+1} > 0, \quad C_{n+2} > 0, \quad \Phi_{n+1} = H_2, \quad \Phi_{n+2} = 1,$$

для которой всегда существует положительный максимин. При  $n = 6$  имеем  $\Phi_1 = a - 1.2x^2 + 7x^4 - 7x^6$ ,  $\Phi_2 = 2ax - 1.6x^3 + 8.4x^5 - 8x^7 + y$ ,  $\Phi_3 = -x + ay - 1.2x^2y + 7x^4y - 7x^6y$ ,  $\Phi_4 = 3ax^2 - 2x^4 + 9.8x^6 - 9x^8 + 2xy$ ,  $\Phi_5 = -x^2 + 2axy - 1.6x^3y + 8.4x^5y - 8x^7y + y^2$ ,  $\Phi_6 = -2xy + ay^2 - 1.2x^2y^2 + 7x^4y^2 - 7x^6y^2$ ,  $\Phi_7 = H_2$ .

В качестве  $\Omega_0$  выбираем кольцо, образованное предельными циклами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  системы (12), проходящими соответственно через точки  $x = 0.8233$ ,  $y = 0$  и  $x = 1.0233$ ,  $y = 0$ . Кольцо  $\Omega_0$  содержит в себе кратный предельный цикл  $\Gamma$ , который соответствует точке  $B$ . На этом кольце берем сетку с  $N = n_x n_r$  узлами, где  $n_r = 5$  – число узлов вдоль радиуса кольца,  $n_x = 40$  – число узлов вдоль границ (окружностей) кольца. Для нахождения  $C_i(a)$  выбираем окрестность  $I_a = [a(x_0) - \varepsilon, a(x_0) + \varepsilon]$  точки  $B$  при  $\varepsilon = 0.002$ , которую разбиваем на восемь равных отрезков. В каждой из девяти узловых точек находим численным образом решение  $C = (C_1, \dots, C_7)$ , на котором достигается положительный максимин функции  $\tilde{\Phi}$ . После квадратичного сглаживания всех координат вектора-решения  $C$  имеем  $C_1(a) = 0.741954 + 0.270885a - 1.42163a^2$ ,  $C_2(a) = -1.83239 \cdot 10^{-7} + 1.04188 \cdot 10^{-6}a + 1.59405 \cdot 10^{-6}a^2$ ,  $C_3(a) = -4.60983 \cdot 10^{-8} - 2.79575 \cdot 10^{-7}a + 1.82113 \cdot 10^{-6}a^2$ ,  $C_4(a) = -0.464958 + 0.0877839a - 0.893628a^2$ ,  $C_5(a) = 0.118882 - 0.4231a - 0.807322a^2$ ,  $C_6(a) = -0.467099 + 0.245621a - 1.08145a^2$ ,  $C_7(a) = -0.0300755 - 0.048893a + 0.159816a^2$ . Тогда функция  $\tilde{\Phi}$  принимает вид

$$\tilde{\Phi}(x, y, a) = \frac{\tilde{\Phi}(x, y, a)}{x^2 + (y - (x^2 - 1)(x^2 - 0.4)x^3 + ax)^2}$$

и ее знак определяется знаком числителя  $\tilde{\Phi}$ , так как знаменатель в кольце  $\Omega_0$  положителен. Числитель  $\tilde{\Phi}(x, y, a)$  представляет собой полином 36-й степени относительно переменных  $x, y$



и 7-й степени относительно параметра  $a$ . В связи с этим используем разложение  $\bar{\Phi}$  в ряд по параметру  $a$  в окрестности  $I_a$ :

$$\bar{\Phi}(x, y, a) = \bar{\Phi}(x, y, a_0) + \bar{\Phi}'(a - a_0) + \frac{\bar{\Phi}''(a - a_0)^2}{2!} + \dots + \frac{\bar{\Phi}^{(7)}(a - a_0)^7}{7!}.$$

Очевидно, что

$$\bar{\Phi}(x, y, a) > S = S_0 - \sum_{j=1}^7 |\Delta a|^j S_j,$$

где

$$S_0 = \min_{\Omega_0} \bar{\Phi}(x, y, a_0), \quad S_j = \max_{\Omega_0} \frac{|\bar{\Phi}^{(j)}(x, y, a_0)|}{j!}, \quad \Delta a = a - a_0,$$

и из положительности  $S$  следует положительность  $\bar{\Phi}(x, y, a)$  в  $\Omega_0$ .

В данном примере, где  $a = \varepsilon = 0.002$ ,  $a_0 = a(x_0)$  - ордината точки  $B$ , на сетке с  $n_x n_r = 40 \cdot 5 = 200$  узлами получаем  $S_0 = 0.006$ ,  $S_1 = 0.451107$ ,  $S_2 = 3.10058$ ,  $S_3 = 9.44489$ ,  $S_4 = 12.8652$ ,  $S_5 = 14.2009$ ,  $S_6 = 7.93816$ ,  $S_7 = 4.8913$ . И, следовательно,  $S = 0.00508$ . Причем полученные результаты существенно не изменяются при произвольном уменьшении шага сетки. Таким образом, получаем доказательство положительности полинома  $\bar{\Phi}$ , а функция  $\Psi$  имеет вид

$$\Psi(x, y, a) = C_1(a) + C_2(a)x + C_3(a)x^2 + C_4(a)y + C_5(a)xy + C_6(a)y^2. \quad (14)$$

Отсюда на основании теоремы 2 заключаем, что система (13) в кольце  $\Omega_0$  имеет не больше двух предельных циклов. Поведение функции  $AH(x)$  в окрестности точки максимума  $A$  исследуется аналогично.

Исследование монотонных участков функции  $AH(x)$  покажем на примере отрезка  $I = [-0.001, 0.001]$ . В качестве  $\Omega_0$  выбираем кольцо, образованное предельными циклами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  системы (12), проходящими соответственно через точки  $x = 0.604134$ ,  $y = 0$  и  $x = 0.804134$ ,  $y = 0$ . На выбранном кольце возьмем сетку с  $N = n_x n_r$  узлами, где  $n_r = 5$ ,  $n_x = 40$ . Для нахождения  $C_i(a)$  отрезок  $I$  разбиваем на восемь равных отрезков. При  $k = -0.9$ ,  $n = 6$  в каждой из девяти узловых точек находим численным образом решение  $C = (C_1, \dots, C_7)$ , на котором достигается положительный максимин функции  $\bar{\Phi}$ . После квадратичного сглаживания каждой из функций имеем  $C_1(a) = 0.0978615 - 0.186095a + 0.0602491a^2$ ,  $C_2(a) = 4.51955 \cdot 10^{-9} + 1.09652 \cdot 10^{-6}a - 0.00219789a^2$ ,  $C_3(a) = -0.574461 - 0.0183586a + 0.102675a^2$ ,  $C_4(a) = -1.07479 \cdot 10^{-8} - 1.38023 \cdot 10^{-6}a + 0.00283695a^2$ ,  $C_5(a) = 0.0300243 - 0.524741a - 0.0500072a^2$ ,  $C_6(a) = -0.574031 - 0.0224273a + 0.0731783a^2$ ,  $C_7(a) = 0.574461 + 0.0183586a - 0.102675a^2$ .

Функция  $\Phi(x, y, a)$  из теоремы 3, где  $\Phi_1 = -0.9a + 1.08x^2 - 6.3x^4 + 6.3x^6$ ,  $\Phi_2 = 0.1ax + 0.68x^3 - 4.9x^5 + 5.3x^7 + y$ ,  $\Phi_3 = 1.1ax^2 + 0.28x^4 - 3.5x^6 + 4.3x^8 + 2xy$ ,  $\Phi_4 = -x - 0.9ay + 1.08x^2y - 6.3x^4y + 6.3x^6y$ ,  $\Phi_5 = -x^2 + 0.1axy + 0.68x^3y - 4.9x^5y + 5.3x^7y + y^2$ ,  $\Phi_6 = -2xy - 0.9ay^2 + 1.08x^2y^2 - 6.3x^4y^2 + 6.3x^6y^2$ , представляет собой полином 8-й степени относительно переменных  $x$ ,  $y$  и 3-й степени относительно параметра  $a$ . Положительность  $\Phi(x, y, a)$  на множестве  $\Omega_0 \times I$  доказываем, как и в негрубом случае, используя разложение в ряд по параметру  $a$ :

$$\Phi(x, y, a) = \Phi(x, y, a_0) + \sum_{j=1}^3 \frac{\Phi^{(j)}(x, y, a_0)}{j!} > S = S_0 - \sum_{j=1}^3 |\Delta a|^j S_j.$$

При  $\Delta a = 0.001$ ,  $a_0 = 0$  на сетке с  $n_x n_r = 40 \cdot 5 = 200$  узлами получаем  $S_0 = 0.00232675$ ,  $S_1 = 0.13235$ ,  $S_2 = 0.171949$ ,  $S_3 = 0.0990326$ . Тогда  $S = 0.0021942$  и при уменьшении шага сетки результаты существенно не изменяются. Функция  $\Psi(x, y, a)$  имеет структуру вида (14), и выполняются условия теоремы 4.

Для исследования поведения функции  $AH(x)$  при значениях параметра  $a$  из интервала  $(0.0294654, +\infty)$ ,  $x \in J = (1.07373, +\infty)$  воспользуемся результатами Лефшеца [22].

**Теорема 6.** Система Лъенара вида

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x), \quad F(0) = 0$$

обладает единственным (устойчивым) предельным циклом, если 1)  $F'(x) = F'(x)$ ,  $F'(0) < 0$ ; 2)  $g(x) = -g(-x)$ ; 3)  $F(x)(x - x_0) > 0$  для любого  $x \in (0; x_0) \cup (x; +\infty)$ , причем  $F(x)$  монотонна для  $x > x_0$  и  $F(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Из теоремы 6 следует, что  $AH(x)$  возрастает в интервале  $J$ .

В окрестности  $U_\sigma \times V_\varepsilon$  фокуса  $O(0,0)$ , где  $U_\sigma = \{-0.1 \leq x \leq 0.1, -0.1 \leq y \leq 0.1\}$ ,  $V_\varepsilon = [0, 0.001]$ , при  $k = -0.9$  построена функция  $\Psi(x, y)$ , при  $a = 0.001$  она имеет вид:

$$\Psi(x, y) = -0.00111111 + 6x^2 - 2.38659x^4 + 0.0054xy + 0.239602x^3y + 6y^2 - 4.7711x^2y^2 + 1.43785xy^3 - 2.38551y^4,$$

для которой выполняются условия теоремы 5. При этом соответствующая функция  $\Phi$  имеет вид

$$\Phi = 1 \cdot 10^{-6} + 1.44(x^2 + y^2)^2 - 19.766x^6 + 27.4706x^8 - 5.48916x^{10} - 0.0552122x^5y - 0.474544x^7y + 0.790686x^9y - 39.1359x^4y^2 + 54.4988x^6y^2 - 20.5157x^8y^2 + 0.97774x^3y^3 - 7.04548x^5y^3 + 7.62062x^7y^3 - 2.57635x^2y^4 + 15.0287x^4y^4 - 15.0287x^6y^4.$$

Подведем итоги оценки числа предельных циклов  $N(a)$  системы Лъенара (3) с  $F(x)$  вида (13):  $N = 0$  при  $a \in (-\infty, -0.0411165)$ ,  $N = 1$  при  $a \approx -0.0411165$  (двукратный полуустойчивый предельный цикл),  $N = 2$  при  $a \in (-0.0411165, 0)$ ,  $N = 3$  при  $a \in (0, 0.0294654)$ ,  $N = 2$  при  $a \approx 0.0294654$  (один грубый и один двукратный полуустойчивый предельный цикл),  $N = 1$  при  $a \in (0.0294654, +\infty)$ .

Соответствующая функция  $AH(x)$  изображена на рисунке.

Теперь воспользуемся алгоритмом, разработанным в работах [15–17] для построения функции  $\Psi(x, y)$  в виде полинома четной степени относительно  $y$ , равной  $n-1$ , с коэффициентами, являющимися полиномами относительно  $x$ :

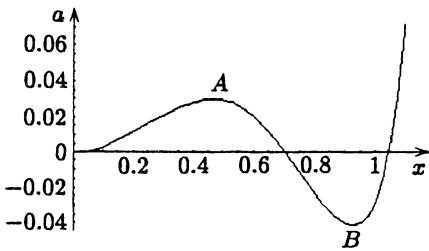


Рисунок.

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \Psi_i(x)y^{n-i} \tag{15}$$

и такой, что соответствующая функция  $\Phi$  представляет собой полином только от одной переменной  $x$

$$\Phi = \sum_{i=1}^n C_i \Phi_i(x). \tag{16}$$

При этом для уменьшения разброса значений получаемых полиномов  $\Phi(x)$  можно использовать для них нормирующий множитель типа  $1/(1 + x^{2z})$ , где  $z \in \mathbb{N}$ .

С помощью нашего метода легко доказывается существование трех предельных циклов у системы вида (3) с  $F(x) = x(x^2 - 2)(x^2 - 1)(x^2 - 1/4)$ , которая построена в работе [21] с использованием функций  $\Psi$  и  $\Phi$  соответственно вида (15) и (16).

**Пример 2.** Рассмотрим параметрическое семейство систем (3), когда  $F(x) = 0.6x^7 - 3.2x^5 + 4x^3 + 0.2x^2 - ax$ . Для указанных систем при значениях параметра  $a_i = 0.5 + 0.1i$ ,  $i = 0, \dots, 5$ , из отрезка  $I = [0.5, 1]$ ,  $k = -1$ ,  $z = 8$ , на сетке с числом узлов  $N_0 = 89$ , взятой на промежутке  $-2.3 \leq x \leq 2.3$ , построены функции Дюлака  $\Psi$  вида (15) при  $n = 7$ . Таким образом, доказано существование трех предельных циклов у каждой рассматриваемой системы семейства в полосе фазовой плоскости  $\Omega = \{(x, y) \mid -2.3 \leq x \leq 2.3\}$ . Для полинома  $\Phi(x, a) = \sum_{i=1}^n C_i(a)\Phi_i(x, a)$  после нахождения численным образом коэффициентов  $C_i$  и сглаживания их многочленами второй степени получаем  $C_1(a) = 0.231136 - 0.0858525a - 0.0332589a^2$ ,

$$C_2(a) = -0.610766 + 1.05656a - 0.542623a^2, \quad C_3(a) = -1.00731 + 0.0329189a - 0.0193054a^2, \\ C_4(a) = 2.7523 - 6.1521a + 3.57559a^2, \quad C_5(a) = 1.62094 - 2.90357a + 1.8393a^2, \quad C_6(a) = -0.169772 + \\ + 0.355976a - 0.201139a^2, \quad C_7(a) = -0.0191326 - 0.0172374a + 0.0275044a^2.$$

Функция  $\Phi(x, a)$  является полиномом 36-й степени относительно  $x$  и 7-й относительно  $a$  и его положительность в прямоугольнике  $\Omega \times I$  доказывается средствами анализа. Таким образом показано существование трех предельных циклов на полосе  $\Omega$  у каждого представителя рассматриваемого семейства систем при  $a \in I$ .

Успех исследования предложенным методом предельных циклов систем Льенара вида (3) при  $l = 1, 2, 3$  подтолкнул нас построить примеры таких систем с числом предельных циклов, большим трех.

**Пример 3.** Добавив еще один множитель в функцию  $F(x)$  из примера работы [21], получим  $F(x) = x(x^2 - 2)(x^2 - 1)(x^2 - 1/4)(x^2 - 1/64)$ . Для системы (3) с указанной функцией  $F(x)$  при  $k = -1$ ,  $n = 9$ ,  $z = 8$  с помощью построения подходящей функции Дюлака на сетке с числом узлов  $N_0 = 500$ , взятой в полосе  $-1.6 \leq x \leq 1.6$ , доказано существование четырех предельных циклов. В этом случае многочлен  $\Phi(x)$  имеет 56-ю степень и достигает своего положительного максимума, равного  $2.96353 \cdot 10^{-6}$ , на решении  $C^* = (0.212333, 0, -0.950949, 0, 0.999994, 0, -0.216935, 0, 0.001437)$ .

Исследования показывают, что прибавление одного предельного цикла у системы вида (3) влечет за собой в нашем подходе увеличение степени соответствующего многочлена  $\Phi(x)$  практически в два раза. Это приводит к многократному увеличению разброса значений многочлена  $\Phi(x)$  в полосе локализации предельных циклов и нахождению его положительного максимума при  $n > 9$  не помогает использование нормирующего множителя. Этот факт побудил нас использовать в качестве  $F(x)$  полиномы Чебышева [23]

$$F(x) = T_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n-1}}(2xT_n(x) - T_{n-1}(x)), \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad n \geq 1, \quad (17)$$

как наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке  $[-1, 1]$ .

**Пример 4.** Таким образом, взяв  $k = -1$  и  $F(x)$  вида (17) при  $n = 11$ , для системы (3) доказано существование пяти предельных циклов за счет построения функции Дюлака  $\Psi(x)$  на сетке с  $N_0 = 89$  в полосе  $-1 \leq x \leq 1$ . В этом случае  $\Phi(x)$  является многочленом 100-й степени, который достигает в указанной полосе глобального положительного минимума, равного  $9.6468 \cdot 10^{-7}$ . Функция же  $\Psi(x, y)$  определяет четыре концентрические кольцеобразные области, в каждой из которой находится по одному предельному циклу, а пятый предельный цикл охватывает внешний овал кривой  $\Psi(x, y) = 0$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., 1966.
2. Проблемы Гильберта / Под общ. ред. Александрова П.С. М., 1969.
3. Pyashenko Y. // Bull. of the AMS. 2002. V. 39. № 3. P. 301–354.
4. Yamato K. // Nagoya Math. J. 1979. V. 74. P. 35–114.
5. Yanqian Ye. // Transl. of AMS. Math. Monographs. Providence. 1986. V. 66.
6. Giacomini H., Neukirch S. // Physical Review E. 1997. V. 56. № 4. P. 3809–3813.
7. Giacomini H., Neukirch S. // Physical Review E. 1998. V. 57. № 6. P. 6573–6576.
8. Giacomini H., Neukirch S. // Physics Letters A. 1998. V. 244. P. 53–58.
9. Llibre J., Pizarro L., Ponce E. // Physical Review E. 1999. V. 58. № 7. P. 7134–7139.
10. Smale S. // Math. Intelligencer. 1998. V. 20. P. 7–15.
11. Черкас Л.А. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 5. С. 779–801.

12. Черкас Л.А. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 689–699.
13. Гринь А.А., Черкас Л.А. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2000. Т. 4. С. 29–38.
14. Cherkas L.A., Artes J.C., Libre J. // Buletinul Academiei de stiinte a Republicii Moldova. Matematica. 2003. V. 41. № 1. P. 31–46.
15. Черкас Л.А., Гринь А.А. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 3. С. 384–390.
16. Черкас Л.А., Щукина И.С. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 4. С. 481–487.
17. Черкас Л.А., Гринь А.А. // Вестн. ГрГУ им. Янки Купалы. 2001. Сер. 2. № 6. С. 7–17.
18. Duff G.F. // Ann. Math. 1953. V. 57. № 1. P. 15–31.
19. Амелькин В.В., Левин А.В. // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 3–7.
20. Perko L. Differential equations and dynamical systems. Texts in applied mathematics 7. Berlin, 2001.
21. Gasull A., Giacomini H. // J. of Differ. Equat. 2002. V. 185. P. 54–73.
22. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1974.
23. Данилов Ю.А. Многочлены Чебышева. Минск, 1984.

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,  
Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники, г. Минск

Поступила в редакцию  
22.10.2003 г.