



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. K. Dauylbaev, The asymptotic behavior of solutions to singularly perturbed nonlinear integro-differential equations,
Sibirsk. Mat. Zh., 2000, Volume 41, Number 1, 60–71

<https://www.mathnet.ru/eng/smj1517>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.85

May 19, 2025, 02:14:06



АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ
ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. К. Дауылбаев

Аннотация: Рассмотрено сингулярно возмущенное нелинейное интегродифференциальное уравнение произвольного порядка с начальными условиями в правой точке рассматриваемого отрезка, причем в отсутствие интегральных членов решение экспоненциально стремится к бесконечности и, следовательно, конечного предела не имеет. Изложен алгоритм построения асимптотики решения эквивалентной задачи Коши с начальным скачком в левой точке отрезка. Доказана теорема о существовании, единственности и асимптотическом представлении решения вспомогательной задачи Коши с начальным скачком, с помощью которой доказана аналогичная основная теорема для первоначальной задачи Коши с начальными условиями в правой точке. Библиогр. 2.

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A(t, y, \dots, y^{(n-2)})y^{(n-1)} = F(t, y, \dots, y^{(n-2)}, J) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$y(1, \varepsilon) = y_0^0, \quad y'(1, \varepsilon) = y_1^0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(1, \varepsilon) = y_{n-1}^0, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $y_i^0, i = \overline{0, n-1}$, — некоторые известные постоянные и

$$J \equiv \int_0^1 K(t, x, y(x, \varepsilon), y'(x, \varepsilon), \dots, y^{(n-2)}(x, \varepsilon))y^{(n-1)}(x, \varepsilon) dx.$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

I. Функция $A(t, y, y', \dots, y^{(n-2)})$ в области $D_1 = (0 \leq t \leq 1, |y| < +\infty, \dots, |y^{(n-2)}| < +\infty)$, функция $F(t, y, y', \dots, y^{(n-2)}, J)$ в области $D_2 = (0 \leq t \leq 1, |y| < +\infty, \dots, |y^{(n-2)}| < +\infty, |J| < +\infty)$ и функция $K(t, x, y, \dots, y^{(n-2)})$ в области $D_3 = (0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1, |y| < +\infty, \dots, |y^{(n-2)}| < +\infty)$ имеют непрерывные частные производные до любого порядка по всем своим аргументам.

II. Функция $A(t, y, \dots, y^{(n-2)})$ в области D_1 удовлетворяет неравенству

$$A(t, y, y', \dots, y^{(n-2)}) \geq \gamma = \text{const} > 0.$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A(t, y, \dots, y^{(n-2)})y^{(n-1)} = F(t, y, \dots, y^{(n-2)}, 0) \quad (3)$$

с начальными условиями (2). Пусть $\bar{y}(t)$ — решение вырожденного уравнения

$$A(t, \bar{y}, \dots, \bar{y}^{(n-2)})\bar{y}^{(n-1)} = F(t, \bar{y}, \dots, \bar{y}^{(n-2)}, 0) \quad (4)$$

с начальными условиями

$$\bar{y}(1) = y_0^0, \bar{y}'(1) = y_1^0, \dots, \bar{y}^{(n-2)}(1) = y_{n-2}^0. \quad (5)$$

Известно [1, 2], что решение $y(t, \varepsilon)$ дифференциальной задачи (3), (2) в случае выполнения условия устойчивости II не будет стремиться при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению $\bar{y}(t)$ вырожденной задачи (4), (5), а стремится к бесконечности в полуинтервале $0 \leq t < 1$ и, следовательно, не имеет предела. В противоположность этому решение $y(t, \varepsilon)$ интегродифференциальной задачи (1), (2), как доказывается в настоящей работе, имеет предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^{(i)}(t, \varepsilon) = \begin{cases} \bar{y}^{(i)}(t), & i = \overline{0, n-3}, 0 \leq t \leq 1, \\ \bar{y}^{(i)}(t), & i = n-2, n-1, 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Однако $\bar{y}(t)$ не является решением обычного вырожденного уравнения, получаемого из уравнения (1) при $\varepsilon = 0$, а удовлетворяет измененному вырожденному уравнению

$$L_0 \bar{y} = F(t, \bar{y}, \dots, \bar{y}^{(n-2)}), \Delta(t) + \int_0^1 K(t, x, \bar{y}(x), \dots, \bar{y}^{(n-2)}(x)) \bar{y}^{(n-1)}(x) dx \quad (6)$$

и начальным условиям (5), где $\Delta(t)$ — так называемый начальный скачок интегрального члена.

Для исследования решения задачи (1), (2) предварительно рассмотрим задачу Коши с начальным скачком

$$y(0, \varepsilon) = a^0(\varepsilon), \dots, y^{(n-2)}(0, \varepsilon) = a^{n-2}(\varepsilon), y^{(n-1)}(0, \varepsilon) = \frac{c(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad (7)$$

где $a^i(\varepsilon)$, $c(\varepsilon)$ — регулярно зависящие от ε неизвестные постоянные, имеющие следующие асимптотические представления:

$$a^i(\varepsilon) = a_0^i + \varepsilon a_1^i + \dots, \quad i = \overline{0, n-2}, \quad c(\varepsilon) = c_0 + \varepsilon c_1 + \dots, \quad c_0 \neq 0,$$

а a_k^i , c_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, — пока неизвестные коэффициенты, которые подберем так, чтобы решение $y(t, a^0, \dots, a^{n-2}, c, \varepsilon)$ задачи (1), (7) удовлетворяло условиям (2).

Рассмотрим вырожденное уравнение (6) с начальными условиями

$$\bar{y}(0) = a_0^0, \dots, \bar{y}^{(n-3)}(0) = a_0^{n-3}, \quad \bar{y}^{(n-2)}(0) = a_0^{n-2} + \Delta a_0^{n-2}, \quad (8)$$

где Δa_0^{n-2} — начальный скачок $(n-2)$ -й производной решения, который вместе с $\Delta(t)$ с учетом условия II однозначно определяется из формул

$$c_0 = \int_{a_0^{n-2}}^{a_0^{n-2} + \Delta a_0^{n-2}} A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y) dy, \quad a_0^{n-2} + \Delta a_0^{n-2} \equiv \bar{y}^{(n-2)}(0), \quad (9)$$

$$\Delta(t) = \int_{a_0^{n-2}}^{a_0^{n-2} + \Delta a_0^{n-2}} K(t, 0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y) dy.$$

Задача Коши (6), (8) называется *вырожденной задачей для задачи Коши с начальным скачком* (1), (7).

III. Пусть вырожденная задача (6), (8) на отрезке $0 \leq t \leq 1$ имеет единственное решение $\bar{y}(t)$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{dv}{d\tau} = - \int_{\bar{v}}^{\bar{v}+v} A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y) dy, \quad v(0) = a_0^{n-2} - \bar{v}, \quad \tau \geq 0, \quad (10)$$

где $\bar{v} \equiv \bar{y}^{(n-2)}(0) = a_0^{n-2} + \Delta a_0^{n-2}$. Дифференциальное уравнение (10) в соответствии с терминологией А. Н. Тихонова называется *присоединенным уравнением*.

IV. Пусть начальное значение $a_0^{n-2} - \bar{v}$ принадлежит области влияния точки покоя $v = 0$ присоединенного уравнения (10).

Асимптотику решения задачи (1), (7) будем искать в виде

$$y(t, \varepsilon) = y_\varepsilon(t) + \varepsilon^{n-2} W_\varepsilon(\tau), \quad (11)$$

где $\tau = t/\varepsilon$ — погранслоинная независимая переменная, $y_\varepsilon(t)$ — регулярная часть и $W_\varepsilon(\tau)$ — погранслоинная часть суммы (11), которые представляются в виде разложений

$$y_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t), \quad W_\varepsilon(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k W_k(\tau). \quad (12)$$

Предварительно умножая обе части уравнения (1) на ε и подставляя сумму (11) в (1), получим уравнения для определения $y_\varepsilon(t)$ и $W_\varepsilon(\tau)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon y_\varepsilon^{(n)} + A(t, y_\varepsilon, \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}) y_\varepsilon^{(n-1)} &= F(t, y_\varepsilon, \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}, J_\varepsilon(t)), \\ W_\varepsilon^{(n)} + [A(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau) + \varepsilon^{n-2} W_\varepsilon(\tau), \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}(\varepsilon\tau) + \overset{(n-2)}{W_\varepsilon(\tau)}) (\varepsilon y_\varepsilon^{(n-1)}(\varepsilon\tau) & \\ + \overset{(n-1)}{W_\varepsilon(\tau)}) - A(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau), \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}(\varepsilon\tau)) \varepsilon y_\varepsilon^{(n-1)}(\varepsilon\tau)] & \\ = \varepsilon [F(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau) + \varepsilon^{n-2} W_\varepsilon(\tau), \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}(\varepsilon\tau) + \overset{(n-2)}{W_\varepsilon(\tau)}, J_\varepsilon(\varepsilon\tau)) & \\ - F(\varepsilon\tau, y_\varepsilon(\varepsilon\tau), y_\varepsilon^{(n-2)}(\varepsilon\tau), J_\varepsilon(\varepsilon\tau))] & \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(t) &= \int_0^1 Kl(t, x, y_\varepsilon(x), \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}(x)) y_\varepsilon^{(n-1)}(x) dx + \int_0^\infty [K(t, \varepsilon s, y_\varepsilon(\varepsilon s) & \\ + \varepsilon^{n-2} W_\varepsilon(s), \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}(\varepsilon s) + \overset{(n-2)}{W_\varepsilon(s)}) (\varepsilon y_\varepsilon^{(n-1)}(\varepsilon s) + \overset{(n-1)}{W_\varepsilon(s)} & \\ - K(t, \varepsilon s, y_\varepsilon(\varepsilon s), \dots, y_\varepsilon^{(n-2)}(\varepsilon s)) \varepsilon y_\varepsilon^{(n-1)}(\varepsilon s)] ds. & \end{aligned}$$

Представим $y_\varepsilon^{(i)}(\varepsilon\tau)$, $i = \overline{0, n-1}$, с учетом (12) в виде ряда по степеням ε :

$$y_\varepsilon^{(i)}(\varepsilon\tau) = \omega_i^{(i)}(\tau) + \varepsilon \omega_{i+1}^{(i)}(\tau) + \dots, \quad i = \overline{0, n-1},$$

где

$$\omega_i(\tau) = y_i(0) + \tau y'_{i-1}(0) + \dots + \frac{\tau^i}{i!} y_0^{(i)}(0).$$

Подставляя разложение (12) в уравнения (13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим последовательность уравнений для определения $y_k(t)$, $k \geq 0$.

Для $y_0(t)$ имеем нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$A(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t))y_0^{(n-1)}(t) = F(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t), J_0(t)), \quad (14)$$

а для $y_k(t)$, $k \geq 1$, получим линейное интегродифференциальное уравнение вида

$$\begin{aligned} A(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t))y_k^{(n-1)}(t) + \sum_{i=0}^{n-2} [A'_{y^{(i)}}(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t))y_0^{(n-1)}(t) \\ - F'_{y^{(i)}}(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t), J_0(t))]y_k^{(i)}(t) = F'_J(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t), J_0(t)) \\ \times \int_0^1 [K(t, x, y_0(x), \dots, y_0^{(n-2)}(x))y_k^{(n-1)}(x) \\ + \sum_{i=0}^{n-2} K'_{y^{(i)}}(t, x, y_0(x), \dots, y_0^{(n-2)}(x))y_0^{(n-1)}(x)y_k^{(i)}(x)] dx + H_k(t), \quad (15) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_0(t) = \int_0^1 K(t, x, y_0(x), \dots, y_0^{(n-2)}(x))y_0^{(n-1)}(x) dx \\ + \int_0^\infty K(t, 0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-3)}(0), y_0^{(n-2)}(0) + W_0^{(n-2)}(s)) W_0^{(n-1)}(s) ds, \quad (16) \end{aligned}$$

а $H_k(t)$ — известная функция, зависящая от $y_i(t)$, $W_i(\tau)$, $i < k$.

Для определения $W_0(\tau)$ получим квазилинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$W_0^{(n)}(\tau) + A(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-3)}(0), y_0^{(n-2)}(0) + W_0^{(n-2)}(\tau)) W_0^{(n-1)}(\tau) = 0, \quad (17)$$

а для $W_k(\tau)$, $k \geq 1$, — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} W_k^{(n)}(\tau) + \frac{d}{d\tau} [A(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-3)}(0), y_0^{(n-2)}(0) + W_0^{(n-2)}(\tau)) (\omega_{k+n-2}^{(n-2)}(\tau) \\ + W_k^{(n-2)}(\tau) - A(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-2)}(0)) \omega_{k+n-2}^{(n-2)}(\tau)] = S_k(\tau), \quad (18) \end{aligned}$$

где $S_k(\tau)$ — известная функция, зависящая от $W_i(\tau)$, $i < k$.

Для пограничных функций $W_k(\tau)$, $k \geq 0$, справедливо неравенство

$$|W_k^{(i)}(\tau)| \leq K \exp(-\gamma\tau), \quad \tau \geq 0, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (19)$$

где $K > 0$, $\gamma > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от t и ε .

Для однозначного определения коэффициентов разложения (12) надо задать начальные условия. С этой целью подставим (11) с учетом (12) в начальные условия (7) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Имеем

$$\begin{aligned} y_0^{(i)}(0) = \begin{cases} a_i^i, & i = \overline{0, n-3}, \\ a_0^{n-2} - W_0^{(n-2)}(0), & i = n-2, \end{cases} \quad W_0^{(n-1)}(0) = c_0, \\ y_k^{(i)}(0) = \begin{cases} a_k^i, & k+i < n-2, \\ a_k^i - W_{k+i-n+2}^{(i)}(0), & k+i \geq n-2, \end{cases} \quad y_{k-1}^{(n-1)}(0) = c_k - W_k^{(n-1)}(0). \end{aligned} \quad (20)$$

Недостающие начальные условия для однозначного определения $y_0(t)$, $W_0(\tau)$ получим из условия стремления к нулю пограничных функций при $\tau \rightarrow +\infty$.

Интегрируя уравнение (17) от 0 до ∞ и учитывая, что $W_0^{(n-2)}(\infty) = W_0^{(n-1)}(\infty) = 0$, имеем

$$c_0 = \int_{a_0^{n-2}}^{y_0^{(n-2)}(0)} A(0, y_0(0) \dots, y_0^{(n-3)}(0), y) dy. \quad (21)$$

Из формулы (21) в силу условия II однозначно определяется начальное условие $y_0^{(n-2)}(0)$. Для $y_0^{(i)}(0)$, $i = \overline{0, n-3}$, из (20) вытекает, что

$$y_0^{(i)}(0) = a_0^i, \quad i = \overline{0, n-3}. \quad (22)$$

Интегрируя уравнение (17) от 0 до τ , заменяя c_0 выражением (21) и вводя обозначение

$$W_0^{(n-2)}(\tau) = v_0(\tau), \quad (23)$$

приходим к следующей задаче:

$$\dot{v}_0 = \Phi(v_0), \quad v_0(0) = a_0^{n-2} - \bar{v}, \quad (24)$$

где

$$\Phi(v_0) \equiv - \int_{\bar{v}}^{\bar{v}+v_0(\tau)} A(0, y_0(0) \dots, y_0^{(n-3)}(0), y) dy, \quad \bar{v} \equiv y_0^{(n-2)}(0). \quad (25)$$

Из (25) вытекает, что $\Phi(0) = 0$. Следовательно, $v_0 = 0$ является точкой покоя уравнения (24). А так как в силу условия II

$$\Phi'(0) = -A(0, y_0(0) \dots, y_0^{(n-2)}(0)) < 0,$$

точка покоя $v_0 = 0$ нелинейного уравнения (24) будет асимптотически устойчивой по Ляпунову. Поскольку согласно условию IV значение $a_0^{n-2} - \bar{v}$ принадлежит области влияния точки покоя $v = 0$ уравнения (10), решение $v_0(\tau)$ задачи (24) при $\tau \rightarrow +\infty$ стремится к нулю, т. е. $v_0(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Путем последовательного интегрирования равенства (23) с учетом (19) получим

$$W_0^{(i)}(0) = (-1)^{n-i} \int_0^\infty \frac{s^{n-3-i}}{(n-3-i)!} v_0(s) ds, \quad i = \overline{0, n-3}, \quad (26)$$

Из (20) следует, что

$$W_0^{(n-2)}(0) = a_0^{n-2} - y_0^{(n-2)}(0), \quad W_0^{(n-1)}(0) = c_0. \quad (27)$$

Таким образом, решение $y_0(t)$ уравнения (14) определяется начальными условиями (21), (22), а решение $W_0(\tau)$ уравнения (17) — начальными условиями (26), (27) и тем самым нулевые приближения полностью определены.

Сравнивая (6) и (14), (16), получаем

$$\Delta(t) = \int_0^\infty K(t, 0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-3)}(0), y_0^{(n-2)}(0) + W_0^{(n-2)}(s)) W_0^{(n-1)}(s) ds.$$

Отсюда и из (21) с учетом (19), (22), (27) приходим к формулам начального скачка (9).

Для определения последующих приближений обратимся к уравнению (18) и проинтегрируем его от 0 до ∞ . С учетом (19) имеем

$$\begin{aligned} & W_k^{(n-1)}(0) + [A(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-3)}(0), a_0^{n-2}) (W_k^{(n-2)}(0) + \omega_{k+n-2}^{(n-2)}(0)) \\ & - A(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-2)}(0)) \omega_{k+n-2}^{(n-2)}(0)] = - \int_0^\infty S_k(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (28)$$

Если принять во внимание, что $\omega_{k+n-2}^{(n-2)}(0) = y_k^{(n-2)}(0)$, из (28) с учетом (20) находим начальное условие для $y_k^{(n-2)}(0)$:

$$y_k^{(n-2)}(0) = \frac{c_k - y_{k-1}^{(n-1)}(0) + A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-2}) a_k^{n-2} + \int_0^\infty S_k(\tau) d\tau}{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0))}, \quad (29)$$

а начальное условие для $y_k^{(i)}(0)$, $i = \overline{0, n-3}$, получается из (20):

$$y_k^{(i)}(0) = a_k^i, \quad i = \overline{0, n-3}. \quad (30)$$

Введем обозначение

$$W_k^{(n-2)}(\tau) = v_k(\tau). \quad (31)$$

Интегрируя уравнение (18) от 0 до τ и принимая во внимание (20), (28), имеем следующее линейное уравнение относительно $v_k(\tau)$:

$$\dot{v}_k(\tau) + A(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-3)}(0), y_0^{(n-2)}(0) + W_0^{(n-2)}(\tau)) v_k(\tau) = \Psi_k(\tau) \quad (32)$$

с начальным условием

$$v_k(0) = a_k^{n-2} - y_k^{(n-2)}(0), \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_k(\tau) = [A(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-2)}(0)) - A(0, y_0(0), \dots, y_0^{(n-3)}(0), y_0^{(n-2)}(0) \\ + W_0^{(n-2)}(\tau))] \omega_{k+n-2}^{(n-2)}(\tau) - \int_\tau^\infty S_k(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (34)$$

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям, проведенным при получении (26), из (31) получим

$$W_k^{(i)}(0) = (-1)^{n-i} \int_0^\infty \frac{s^{n-3-i}}{(n-3-i)!} v_k(s) ds, \quad i = \overline{0, n-3}, \quad (35)$$

где $v_k(\tau)$ — решение задачи (32), (33). Из (20) имеем

$$W_k^{(n-2)}(0) = a_k^{n-2} - y_k^{(n-2)}(0), \quad W_k^{(n-1)}(0) = c_k - y_{k-1}^{(n-1)}(0). \quad (36)$$

Таким образом, решение $y_k(t)$ уравнения (15) определяется начальными условиями (29), (30), а решение $W_k(\tau)$ уравнения (18) — начальными условиями (35), (36), и тем самым k -е приближения полностью определены.

Образум N -ю частичную сумму разложений (11), (12):

$$\bar{y}_N(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k y_k(t) + \varepsilon^{n-2} \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k W_k(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad (37)$$

где коэффициенты $y_0(t)$ и $y_k(t)$, $k = \overline{1, N}$, однозначно определяются из (14), (21), (22) и (15), (29), (30) соответственно и вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка ограничены на отрезке $[0, 1]$.

В случае $N \geq n-2$ коэффициенты $W_k(\tau)$, $k = \overline{0, N-n+2}$, однозначно определяются из уравнений (17), (18) с начальными условиями (26), (27), (35), (36) и вместе с производными $(n-1)$ -го порядка являются функциями типа пограничного слоя при $\tau \geq 0$, а коэффициенты $W_k(\tau)$, $k = \overline{N-n+3, N+1}$, однозначно определяются из того же уравнения (18) с начальными условиями

$$W_k^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, & j = \overline{0, k - (N - n + 3)}, \\ (-1)^{n-j} \int_0^\infty \frac{s^{n-3-j}}{(n-3-j)!} v_k(s) ds, & j = \overline{k - (N - n + 2), n - 3}, \\ a_k^{n-2} - y_k^{(n-2)}(0), & j = n - 2 \\ c_k - y_{k-1}^{(n-1)}(0), & j = n - 1, \end{cases} \quad (38)$$

и эти функции для $j = \overline{0, k - (N - n + 3)}$ ограничены при $\tau \geq 0$, а для $j = \overline{k - (N - n + 2), n - 1}$ при $\tau \geq 0$ являются функциями типа пограничного слоя.

В случае $N < n-2$ коэффициенты $W_k(\tau)$, $k = \overline{0, N+1}$, определяются из уравнений (17), (18) с начальными условиями (38) и функции $W_i^{(j)}(\tau)$ для $j = \overline{0, k - (N - n + 3)}$ ограничены при $\tau \geq 0$, а для $j = \overline{k - (N - n + 2), n - 1}$ являются функциями типа пограничного слоя при $\tau \geq 0$.

Можно убедиться, что функция $\bar{y}_N(t, \varepsilon)$, выражаемая формулой (37), на отрезке $0 \leq t \leq 1$ является приближенным решением задачи (1), (7) с точностью порядка $O(\varepsilon^{N+1})$.

Теорема 1. Пусть функции $A(t, y, \dots, y^{(n-2)})$, $F(t, y, \dots, y^{(n-2)}, J)$, $K(t, x, y, \dots, y^{(n-2)})$ соответственно в областях D_1, D_2, D_3 имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам до $(N+2)$ -го порядка включительно и выполнены условия II–IV. Тогда при достаточно малых ε решение задачи Коши с начальным скачком (1), (7) на отрезке $[0, 1]$ существует, единственно и представимо в виде следующего асимптотического разложения:

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k y_k(t) + \varepsilon^{n-2} \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k W_k(\tau) + R_N(t, \varepsilon), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad (39)$$

а остаточный член $R_N(t, \varepsilon)$ имеет оценки

$$|R_N^{(i)}(t, \varepsilon)| \leq K \varepsilon^{N+1}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (40)$$

где $N \geq 0$ — любое целое число, $K > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от t и ε .

Доказательство теоремы 1 проводится методом интегральных уравнений.

Теперь определим неизвестные коэффициенты $a_k^i, c_k, i = \overline{0, n-2}, k \leq 0$, входящие в начальные условия (7). Решение задачи Коши с начальным скачком (1), (7) обозначим через $y(t, a^0, \dots, a^{n-2}, c, \varepsilon)$. Постоянные a^0, \dots, a^{n-2}, c

подберем так, чтобы это решение $y(t, a^0, \dots, a^{n-2}, c, \varepsilon)$ удовлетворяло при $t = 1$ условиям (2):

$$y^{(i)}(1, a^0, \dots, a^{n-2}, c, \varepsilon) = y_i^0, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (41)$$

Подставим сумму (11) с учетом разложений (12) в (41). При этом вместо точного решения подставим его асимптотическое разложение, в котором будем указывать на зависимость y_k не только от t , но и от $a_k^0, \dots, a_k^{n-2}, c_k$. В силу оценки (19) и (41) имеем

$$y_0^{(i)}(1, a_0^0, \dots, a_0^{n-2}, c_0) + \varepsilon y_1^{(i)}(1, a_1^0, \dots, a_1^{n-2}, c_1) + \dots = y_i^0. \quad (42)$$

Из (42), сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующие системы алгебраических уравнений:

$$y_0^{(i)}(1, a_0^0, \dots, a_0^{n-2}, c_0) = y_i^0, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (43)$$

$$y_k^{(i)}(1, a_k^0, \dots, a_k^{n-2}, c_k) = 0, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad k \geq 1. \quad (44)$$

Обратимся теперь к уравнению (15) и представим его в виде

$$y_k^{(n-1)}(t) + \sum_{i=0}^{n-2} a_i(t) y_k^{(i)}(t) = \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} b_i(t, x) y_k^{(i)}(x) dx + d_k(t), \quad (45)$$

где

$$a_i(t) = \frac{A'_{y^{(i)}}(t, y_0, \dots, y_0^{(n-2)}) y_0^{(n-1)} - F'_{y^{(i)}}(t, y_0, \dots, y_0^{(n-2)}, J_0)}{A(t, y_0, \dots, y_0^{(n-2)})},$$

$$b_{n-1}(t, x) = \frac{F'_J(t, y_0, \dots, y_0^{(n-2)}, J_0) K(t, x, y_0(x), \dots, y_0^{(n-2)}(x))}{A(t, y_0, \dots, y_0^{(n-2)})}, \quad (46)$$

$$b_j(t, x) = \frac{F'_J(t, y_0, \dots, y_0^{(n-2)}, J_0) K'_{y^{(j)}}(t, x, y_0(x), \dots, y_0^{(n-2)}(x)) y_0^{(n-1)}(x)}{A(t, y_0, \dots, y_0^{(n-2)})},$$

$$j = \overline{0, n-2},$$

$$d_k(t) = \frac{H_k(t)}{A(t, y_0, \dots, y_0^{(n-2)})}.$$

Пусть функции $\Phi_i(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq 1$, $i = \overline{0, n-2}$, являются решениями однородной дифференциальной задачи

$$\Phi_{it}^{(n-1)}(t, s) + \sum_{j=0}^{n-2} a_j(t) \Phi_{it}^{(j)}(t, s) = 0, \quad (47)$$

$$\Phi_{it}^{(j)}(s, s) = \begin{cases} 1, & i = j, \quad i = \overline{0, n-2}, \\ 0, & i \neq j, \quad j = \overline{0, n-2}. \end{cases}$$

Тогда, обозначая правую часть (45) через $z_k(t)$, получаем решение задачи (15), (29), (30) в виде

$$y_k(t) = \sum_{i=0}^{n-2} y_k^{(i)}(0) \Phi_i(t, 0) + \int_0^t \Phi_{n-2}(t, s) z_k(s) ds. \quad (48)$$

Относительно $z_k(t)$ получается интегральное уравнение Фредгольма

$$z_k(t) = h_k(t) + \int_0^1 J(t, s) z_k(s) ds, \quad (49)$$

где

$$h_k(t) = d_k(t) + \sum_{i=0}^{n-2} y_k^{(i)}(0) \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 b_j(t, x) \Phi_i^{(j)}(x, 0) dx, \quad (50)$$

$$J(t, s) = b_{n-1}(t, s) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_s^1 b_j(t, x) \Phi_{n-2}^{(j)}(x, s) dx.$$

V. Пусть число 1 не является собственным значением ядра $J(t, s)$. Тогда интегральное уравнение (49) имеет единственное решение и это решение с помощью резольвенты $R(t, s)$ ядра $J(t, s)$ можно записать в виде

$$z_k(t) = h_k(t) + \int_0^1 R(t, s) h_k(s) ds. \quad (51)$$

Подставляя (51) с учетом (50) в (48) и выделяя члены, зависящие от a_k^i , c_k , $i = \overline{0, n-2}$, получаем решение задачи (15), (29), (30):

$$\begin{aligned} y_k(t) = & \sum_{i=0}^{n-3} a_k^i \left[\Phi_i(t, 0) + \int_0^t \Phi_{n-2}(t, s) D_i(s) ds \right. \\ & - \frac{\Phi_{n-2}(t, 0) + \int_0^t \Phi_{n-2}(t, s) D_{n-2}(s) ds}{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0))} \cdot \int_{a_0^{n-2}}^{y_0^{(n-2)}(0)} A'_{y^{(i)}}(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y) dy \\ & \left. + \int_0^t \Phi_{n-2}(t, s) (T_i(s) + \int_0^1 R(s, x) T_i(x) dx) ds \right] \\ & + a_k^{n-2} \left[(\Phi_{n-2}(t, 0) + \int_0^t \Phi_{n-2}(t, s) D_{n-2}(s) ds) \cdot \frac{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-2})}{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0))} \right. \\ & \left. + \int_0^t \Phi_{n-2}(t, s) (T_{n-2}(s) + \int_0^1 R(s, x) T_{n-2}(x) dx) ds \right] \\ & + c_k \left[\int_0^t \Phi_{n-2}(t, s) (T_{n-1}(s) + \int_0^1 R(s, x) T_{n-1}(x) dx) ds \right. \\ & \left. + \frac{\Phi_{n-2}(t, 0) + \int_0^t \Phi_{n-2}(t, s) D_{n-2}(s) ds}{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0))} \right] + m_k(t), \quad (52) \end{aligned}$$

где $\Phi_i(t, s)$ — решение задачи (47), $m_k(t)$ — известная функция, не зависящая от $a_k^i, c_k, i = \overline{0, n-2}$, а функции $D_i(t), T_i(t)$ выражаются формулами

$$D_i(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 \left(b_j(t, x) + \int_0^1 R(t, s) b_j(s, x) ds \right) \Phi_i^{(j)}(x, 0) dx, \quad i = \overline{0, n-2},$$

$$T_i(t) = \frac{F'_J(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t), J_0(t))}{A(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t))} \left[\int_{a_0^{n-2}}^{y_0^{(n-2)}(0)} \frac{\partial K(t, 0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y)}{\partial a_0^i} dy - \frac{K(t, 0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0))}{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0))} \int_{a_0^{n-2}}^{y_0^{(n-2)}(0)} \frac{\partial A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y)}{\partial a_0^i} dy \right], \quad i = \overline{0, n-3}, \quad (53)$$

$$T_{n-2}(t) = \frac{F'_J(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t), J_0(t))}{A(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t))} \left[K(t, 0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0)) \times \frac{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-2})}{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0))} - K(t, 0, a_0^0, \dots, a_0^{n-2}) \right],$$

$$T_{n-1}(t) = \frac{F'_J(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t), J_0(t))}{A(t, y_0(t), \dots, y_0^{(n-2)}(t))} \cdot \frac{K(t, 0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0))}{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0))}$$

Из (52) видно, что система (44) относительно $a_k^i, c_k, i = \overline{0, n-2}$, является неоднородной системой линейных алгебраических уравнений.

Обратимся теперь к задаче (14), (21), (22), продифференцируем ее по параметрам $a_0^i, c_0, i = \overline{0, n-2}$, и введем обозначение

$$u_i(t) = \begin{cases} \frac{\partial y_0(t)}{\partial a_0^i}, & i = \overline{0, n-2}, \\ \frac{\partial y_0(t)}{\partial c_0}, & i = n-1. \end{cases} \quad (54)$$

Тогда для $u_i(t)$ получаем линейное интегродифференциальное уравнение, аналогичное уравнению (45):

$$u_i^{(n-1)}(t) + \sum_{j=0}^{n-2} a_j(t) u_i^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 b_j(t, x) u_i^{(j)}(x) dx + T_i(t) \quad (55)$$

с начальными условиями

$$u_i^{(j)}(0) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad j = \overline{0, n-3}, \quad (56)$$

$$u_i^{(n-2)}(0) = \begin{cases} -\frac{1}{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0))} \int_{a_0^{n-2}}^{y_0^{(n-2)}(0)} \frac{\partial A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y)}{\partial a_0^i} dy, & i = \overline{0, n-3}, \\ \frac{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-2})}{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0))}, & i = n-2, \\ \frac{1}{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0))}, & i = n-1, \end{cases}$$

где функции $a_j(t)$, $b_j(t, x)$, $T_i(t)$ выражаются формулами (46), (53).

Решая задачу (55), (56) так же, как задачу (15), (29), (30), получаем

$$\begin{aligned}
u_i(t) &= \Phi_i(t, 0) + \int_0^t \Phi_{n-2}(t, s) D_i(s) ds \\
&\quad - \frac{\Phi_{n-2}(t, 0) + \int_0^t \Phi_{n-2}(t, s) D_{n-2}(s) ds}{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0))} \cdot \int_{a_0^{n-2}}^{y_0^{(n-2)}(0)} \frac{\partial A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y)}{\partial a_0^i} dy \\
&\quad + \int_0^t \Phi_{n-2}(t, s) \left[T_i(s) + \int_0^1 R(s, x) T_i(x) dx \right] ds, \quad i = \overline{0, n-3},
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
u_{n-2}(t) &= \left[\Phi_{n-2}(t, 0) + \int_0^t \Phi_{n-2}(t, s) D_{n-2}(s) ds \right] \frac{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-2})}{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0))} \\
&\quad + \int_0^t \Phi_{n-2}(t, s) \left[T_{n-2}(s) + \int_0^1 R(s, x) T_{n-2}(x) dx \right] ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{n-1}(t) &= \frac{\Phi_{n-2}(t, 0) + \int_0^t \Phi_{n-2}(t, s) D_{n-2}(s) ds}{A(0, a_0^0, \dots, a_0^{n-3}, y_0^{(n-2)}(0))} \\
&\quad + \int_0^t \Phi_{n-2}(t, s) \left[T_{n-1}(s) + \int_0^1 R(s, x) T_{n-1}(x) dx \right] ds,
\end{aligned}$$

где $\Phi_i(t, s)$, $i = \overline{0, n-2}$, — решение задачи (47), а функции $D_j(t)$, $j = \overline{0, n-2}$, $T_i(t)$, $i = \overline{0, n-1}$, выражаются формулой (53).

Предположим, что выполнено следующее условие.

VI. Система алгебраических уравнений (43) имеет единственное решение $\bar{a}_0^0, \dots, \bar{a}_0^{n-2}, \bar{c}_0$, и выполнено неравенство

$$\Delta_0 \equiv \begin{vmatrix} u_0(1) & u_1(1) & \dots & u_{n-1}(1) \\ u'_0(1) & u'_1(1) & \dots & u'_{n-1}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0^{(n-1)}(1) & u_1^{(n-1)}(1) & \dots & u_{n-1}^{(n-1)}(1) \end{vmatrix}_{a_i^0 = \bar{a}_i^0, i = \overline{0, n-2}, c_0 = \bar{c}_0} \neq 0,$$

где функции $u_i(t) \equiv u_i(t, a_0^0, \dots, a_0^{n-2}, c_0)$, $i = \overline{0, n-1}$, выражаются формулой (57). Тогда, как видно из (52), главный определитель неоднородной системы линейных алгебраических уравнений (44) совпадает с Δ_0 , который согласно условию VI отличен от нуля. Следовательно, система линейных алгебраических уравнений (44) имеет единственное решение $\bar{a}_k^0, \dots, \bar{a}_k^{n-2}, \bar{c}_k$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и условия V, VI. Тогда при достаточно малых ε в некоторой достаточно малой окрестности значений $\bar{a}_0^0, \dots, \bar{a}_0^{n-2}, \bar{c}_0$ существуют единственные значения $a^0 = a^0(\varepsilon), \dots, a^{n-2} = a^{n-2}(\varepsilon)$, $c = c(\varepsilon)$, представимые в виде

$$a^0 = \bar{a}_0^0 + O(\varepsilon), \dots, a^{n-2} = \bar{a}_0^{n-2} + O(\varepsilon), \quad c = \bar{c}_0 + O(\varepsilon),$$

такие, что решение $y(t, a^0, \dots, a^{n-2}, c, \varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи (1), (7) на отрезке $0 \leq t \leq 1$ является единственным решением $y(t, \varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи (1), (2) и это решение допускает следующее асимптотическое представление:

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k y_k(t, \bar{a}_k^0, \dots, \bar{a}_k^{n-2}, \bar{c}_k) + \varepsilon^{n-2} \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k W_k(\tau) + R_N(t, \varepsilon), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon},$$

а остаточный член $R_N(t, \varepsilon)$ имеет оценки

$$|R_N^{(i)}(t, \varepsilon)| \leq K \varepsilon^{N+1}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от t, ε .

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 2 утверждает существование и единственность в некотором локальном смысле решения системы (43). Под единственностью в локальном смысле понимается следующее. Система (43) относительно $a_0^0, \dots, a_0^{n-2}, c_0$ может иметь не единственное решение в силу нелинейности задачи. В этом случае утверждение теоремы 2 верно для всякого решения $a_0^0, \dots, a_0^{n-2}, c_0$ системы (43).

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
2. Иманалиев М. И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. Фрунзе: Илим, 1972.

Статья поступила 27 февраля 1998 г.

г. Алматы