А. П. Киселев, Энергетический баланс точечных источников упругих волн в плавно-неоднородной среде, *ЖТФ*, 1983, том 53, выпуск 2, 224–229

1983 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 53, в. 2
1983 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 53, № 2

УДК 53 : 51

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ УПРУГИХ ВОЛН В ПЛАВНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. П. Киселев

Исследуется распределение энергии модулированных колебаний высокой частоты, возбуждаемых неподвижными точечными источниками разных типов, между продольными и поперечными волнами. Рассматриваются задачи о сосредоточенной силе, центре расширения и центре вращения. Возбуждение поперечной волны во втором случае и продольной в третьем является асимптотическим эффектом второго порядка.

Для приложений часто полезно знать, как распределяется энергия, излучаемая данным источником, между продольными и поперечными волнами. Нередко (например, в задачах сейсмики) возникает необходимость в рассмотрении нестационарных колебаний, зависящих от времени негармонически (см. [1]), и в учете неоднородности среды.

В работе исследуется довольно общий класс модулированных по фазе и амплитуде колебаний, встречавшийся ранее в [2, 3]. Рассматриваются трехмерные нестационарные задачи с большим параметром p

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \Phi(t;\ p)\,\mathbf{F}(\mathbf{x}),\quad p \to \infty, \tag{1}$$

$$\mathbf{u}\,|_{t<0} \equiv 0,$$

где $L_j(\mathbf{u}) = \partial_i t_{ij}(\mathbf{u}) - \rho(\mathbf{x})\,\ddot{u}_j$; $t_{ij}(\mathbf{u}) = \mu(\mathbf{x})(\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \lambda(\mathbf{x})\,\delta_{ij}\partial_s u_s$; $\partial_s = \partial/\partial x_s$; точка обозначает дифференцирование по времени t; $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$; $\lambda + 2\mu > \mu > 0$; $\rho > 0$; λ, μ и ρ — гладкие функции. Векторная обобщенная функция $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ сосредоточена при $\mathbf{x} = 0$,

$$\Phi(t;\ p) = \mathscr{A}(t)\,\mathscr{F}(p\varphi(t)), \tag{2}$$

$\mathscr{A}$, $\mathscr{F}$ и φ гладки, причем $\mathscr{A}\,|_{t<0} \equiv 0$. Предполагается также, что φ вещественна, и для всех t

$$\dot{\varphi}(t) \neq 0. \tag{3}$$

Функция $\mathscr{F}$ играет роль высокочастотного заполнения импульса, φ имеет смысл фазы, $|\mathscr{A}|$ — амплитуды огибающей. Условие (3) гарантирует необращение в нуль фазовой и групповой скоростей. Особый интерес представляет случай импульса с квазигармоническим заполнением

$$\mathscr{F}(p\varphi) = \exp(ip\varphi). \tag{4}$$

Для приложений наиболее важны следующие сосредоточенные источники $\mathbf{F}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -4\pi\mathbf{e}_3\delta(\mathbf{x}), \tag{5}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -4\pi\,\mathrm{grad}\,\delta(\mathbf{x}), \tag{6}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -4\pi\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3\delta(\mathbf{x})) \tag{7}$$

[e_j — орт оси x_j, $\delta(x)$ — дельта-функция], соответственно называемые силой, направленной вдоль оси e_3, центром расширения (центром давления) и центром вращения вокруг оси e_3.

Если среда однородна, то сферически-симметричный источник (6) не возбуждает поперечной волны, а источник (7) — продольной. В неоднородной среде (6) и (7) порождают волны обоих типов [4].

Предметом работы является асимптотическое (при $p \to \infty$) вычисление в каждой из задач (1), (5)—(7) потоков энергии через сферу малого радиуса $|\mathbf{x}| \equiv r = \varepsilon$ такого, что

$$rp \to \infty, \quad r^2 p \to 0. \tag{8}$$

Размерные условия (8) в [3-5] и ниже означают, что $r\omega \gg c(0)$, $r^2\omega\,|\nabla c\,(0)| \ll c\,(0)$, $r^2\omega\,|\nabla\rho\,(0)| \ll \rho\,(0)\,c\,(0)$, где $\omega = \omega(t) = p\,|\dot\varphi\,(t)|$ — мгновенная частота колебаний; c имеет смысл продольной или поперечной скорости. Если среда однородна, то последние два соотношения (изображаемые вторым условием (8)) выполняются во всем пространстве.

Сферический слой (8), следуя [5], назовем промежуточной зоной. Этот термин связан с пригодностью в (8) так называемых внутреннего и внешнего разложений [3-5].

В промежуточной зоне неоднородность среды может трактоваться как малое возмущение, и при этом поле $\mathbf{u}$ имеет вид быстроосциллирующих колебаний, бегущих из источника с продольной и поперечной скоростями $a = (\lambda + 2\mu)^{1/2}\rho^{-1/2}$, $b = \mu^{1/2}\rho^{-1/2}$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t;\ p) \sim \mathbf{u}^a(\mathbf{x},\ t;\ p) + \mathbf{u}^b(\mathbf{x},\ t;\ p). \tag{9}$$

Изучению энергетических характеристик конкретных источников мы предпошлем одну общую формулу, обобщающую результат [6] на случай негармонических колебаний в неоднородной среде.

1. Выражение потока энергии через диаграммы в промежуточной зоне

1. Если в некоторой области пара произвольных (но не слишком сингулярных) полей $\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)$ и $\mathbf{u}^*(\mathbf{x},\ t)$ удовлетворяет уравнениям $L(\mathbf{u})=0$, $L(\mathbf{u}^*)=0$, то имеет место обобщенное тождество Умова

$$\dot E + \partial_j \sigma_j = 0,$$

где

$$E = E(\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t),\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x},\ t)) = \frac{1}{2}(t_{ik}u^*_{ik} + t^*_{ik}u_{ik}) + \frac{1}{2}\rho\dot u_m \dot u^*_m,\quad 2u_{ik} = \partial_i u_k + \partial_k u_i,$$

$$2u^*_{ik} = \partial_i u^*_k + \partial_k u^*_i,\quad t^*_{ik} = t_{ik}(\mathbf{u}^*),\quad \sigma_l = \sigma_l(\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t),\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x},\ t)) =$$
$$= -\frac{1}{2}(t_{lm}\dot u^*_m + t^*_{lm}\dot u_m). \tag{10}$$

Функцию E и вектор σ назовем соответственно плотностью смешанной энергии и плотностью потока смешанной мощности полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}^*$.

Пусть поверхность Σ охватывает все источники объемных сил для $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}^*$, $d^2\mathbf{x}$ — элемент площади ее поверхности, а $\xi(\mathbf{x})$ — внешняя нормаль. Назовем выражения

$$\Pi(t) = \int\limits_{\Sigma} \xi_k(\mathbf{x})\,\sigma_k(\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t),\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x},\ t))\,d^2\mathbf{x}, \tag{11}$$

$$\mathscr{E}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t)\,dt \tag{12}$$

потоком смешанной мощности, переносимой через Σ полями $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}^*$ в данный момент, и полной смешанной энергией (или работой источников) полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}^*$. Мы предполагаем, что интеграл в (12) существует.

Если, как это принято в дальнейшем, * означает операцию комплексного сопряжения, то (10)—(12) совпадают с традиционными выражениями для плотности потока мощности, потока мощности и полной энергии поля $\mathbf{u}$.

В соответствии с (9) $\Pi(t)$ разбивается на сумму потоков мощности продольной волны Π^a, поперечной волны Π^b и потока смешанной мощности $\tilde{\Pi}$ полей $\mathbf{u}^a$ и $\mathbf{u}^b$

$$\Pi(t) \sim \Pi^a(t) + \Pi^b(t) + \tilde{\Pi}(t). \tag{13}$$

Слагаемые в правой части (13) определяются как интегралы вида (11) от $\sigma^a = \sigma(\mathbf{u}^a, \mathbf{u}^{a*})$, $\sigma^b = \sigma(\mathbf{u}^b, \mathbf{u}^{b*})$, $\tilde{\sigma} = \sigma(\mathbf{u}^a, \mathbf{u}^{b*}) + \sigma(\mathbf{u}^{a*}, \mathbf{u}^b)$ соответственно. По формуле (12) вводятся полные энергии продольных и поперечных волн $\mathcal{E}^a$ и $\mathcal{E}^b$ и полная смешанная энергия $\tilde{\mathcal{E}}$.

В дальнейшем Σ — сфера $|\mathbf{x}| = \varepsilon$, $\xi = \mathbf{x} : |\mathbf{x}| = \mathbf{x} : r$. Удобно использовать сферические координаты $(r, \vartheta, \eta) : x_1 = r \sin\vartheta \sin\eta$, $x_2 = r \sin\vartheta \cos\eta$, $x_3 = r \cos\vartheta$. Очевидно, $\Sigma = \{|\xi| = 1, \ r = \varepsilon\} = \{r = \varepsilon, \ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \eta < 2\pi\}$, $d^2\mathbf{x} = r^2 d^2\xi = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta d\eta$.

2. Из [3] следует, что при любом точечном источнике $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ главные члены разложений продольной и поперечной волн (9) имеют в промежуточной зоне вид

$$\mathbf{u}^a(\mathbf{x}, t; p) \approx \frac{\Phi^a(t - \alpha r; p)}{r} \mathbf{f}^a(\xi), \quad \mathbf{u}^b(\mathbf{x}, t; p) \approx \frac{\Phi^b(t - \beta r; p)}{r} \mathbf{f}^b(\xi), \tag{14}$$

$$\alpha = \frac{1}{a(0)} = \sqrt{\frac{\rho(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)}}, \quad \beta = \frac{1}{b(0)} = \sqrt{\frac{\rho(0)}{\mu(0)}}.$$

Здесь Φ^a и Φ^b выражаются через временну́ю зависимость Φ источника с помощью конечного числа дифференцирований по t; $\mathbf{f}^a(\xi)$ и $\mathbf{f}^b(\xi)$ — гладкие на единичной сфере $|\xi| = 1$ вектор-функции, определяемые вектором $\mathbf{F}$ и обладающие свойством $\mathbf{f}^a(\xi) \parallel \xi$, $\mathbf{f}^b(\xi) \perp \xi$, т. е.

$$f_m^a(\xi)\,\xi_m \xi_n = f_n^a(\xi), \quad f_m^b(\xi)\,\xi_m = 0. \tag{15}$$

Ввиду очевидного сходства (14)—(15) с формулами асимптотики в дальней зоне для однородной среды мы назовем $\mathbf{f}^a$ и $\mathbf{f}^b$ диаграммами источника $\mathbf{F}$ в промежуточной зоне.

Представления вида (14)—(15) справедливы и для задач (1) с неточечными $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, сосредоточенными в области, диаметр которой порядка $o(p^{-3/4})$. В случае точечного источника компоненты $\mathbf{f}^a(\xi)$ и $\mathbf{f}^b(\xi)$ полиномиальны по ξ_1, ξ_2, ξ_3.

В формуле (14) можно писать знак равенства, если домножить правые части на $(1 + O(p^{-1}r^{-1}) + O(pr^2))$. Дальнейшие вычисления имеют такую же погрешность.

3. Перейдем к вычислению потоков мощности. Заметим, что производные по x_j от Φ^a, Φ^b в слое (8) старше, чем соответствующие производные от f_m^a, f_m^b и r.

Используя (15), с помощью очевидных тождеств $\partial_m r = \xi_m$, $\xi_m \xi_m = 1$, получим

$$\dot{u}_n^a \approx r^{-1} \dot{\Phi}^a f_n^a, \quad \dot{u}_n^b \approx r^{-1} \dot{\Phi}^b f_n^b,$$

$$t_{mn}(\mathbf{u}^a) \approx -\alpha r^{-1} \dot{\Phi}^a \{\mu(0)(f_m^a \xi_n + f_n^a \xi_m) + \lambda(0) f_k^a \xi_k\},$$

$$t_{mn}(\mathbf{u}^b) \approx -\beta r^{-1} \dot{\Phi}^b \mu(0)(f_m^b \xi_n + f_n^b \xi_m).$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_m^a \xi_m \approx \rho(0)\, a(0) \frac{\dot{\Phi}^a \dot{\Phi}^{a*}}{r^2} f_n^a(\xi) f_n^{a*}(\xi), \tag{16}$$

$$\sigma_m^b \xi_m \approx \rho(0)\, b(0) \frac{\dot{\Phi}^b \dot{\Phi}^{b*}}{r^2} f_n^b(\xi) f_n^{b*}(\xi). \tag{17}$$

Рассмотрим выражение для $\tilde{\sigma}_m \xi_m$. Заметим, что

$$t_{mn}(\mathbf{u}^b)\, \dot{u}_m^{a*} \xi_n \approx \beta\mu(0)\, r^{-2} \dot{\Phi}^{a*} \dot{\Phi}^b (f_m^b \xi_n + f_n^b \xi_m) f_n^{a*} \xi_m = 0.$$

Аналогично $t_{mn}(\mathbf{u}^a)\dot{u}_n^b\xi_m \approx 0$, откуда

$$\tilde{\Pi} \approx 0. \tag{18}$$

Интегрируя (16) и (17) по сфере Σ, найдем

$$\Pi^a(t) \approx \rho(0)\, a(0)\, |\dot{\Phi}^a(t-\alpha r;\ p)|^2 \int\limits_{|\xi|=1} |\mathbf{f}^a(\xi)|^2 d^2\xi, \tag{19}$$

$$\Pi^b(t) \approx \rho(0)\, b(0)\, |\dot{\Phi}^b(t-\beta r;\ p)|^2 \int\limits_{|\xi|=1} |\mathbf{f}^b(\xi)|^2 d^2\xi. \tag{20}$$

Если перейти к сферическим координатам вектора ξ и условиться писать $\mathbf{f}^{a,b}(\xi) = \mathbf{f}^{a,b}(\vartheta, \eta)$, то

$$\int\limits_{|\xi|=1} |\mathbf{f}^{a,b}(\xi)|^2 d^2\xi = \int\limits_0^{2\pi} d\eta \int\limits_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta\, |\mathbf{f}^{a,b}(\vartheta, \eta)|^2. \tag{21}$$

Имеется тесная аналогия между проведенным вычислением и выражением потока через диаграммы в дальней зоне для однородной среды [6]. В случае однородной среды и гармонических колебаний полученный результат сводится к найденному в [6] (кажущаяся разница в формулах связана с тем, что автор [6] оперирует с потенциалами, а мы — с полями).

4. Рассмотрим вопрос о точности формулы (18), т. е. об относительной величине смешанной мощности.

В задаче о сосредоточенной силе (5) функции $\mathbf{u}^a$ и $\mathbf{u}^b$ имеют одинаковый порядок по p (см. раздел 2). Поэтому из (18) следует, что $\tilde{\Pi} = O(p^{-1}\Pi^{a,b})$. Отсюда

$$|\Pi^a| \gg |\tilde{\Pi}|, \quad |\Pi^b| \gg |\tilde{\Pi}|. \tag{22}$$

Неравенства (22) имеют место для любого источника $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, который возбуждает в однородной среде волны обоих типов, и, следовательно, в среде неоднородной порядок $\mathbf{u}^a$ и $\mathbf{u}^b$ по p одинаков. Это выполнено, в частности, если $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — любая сосредоточенная при $\mathbf{x}=0$ однородная обобщенная функция, кроме (6), (7) и отличающихся от них постоянным множителем.

В случае источника (6) $\mathbf{u}^a = O(p\mathbf{u}^b)$, поэтому $\Pi^a = O(p^2\Pi^b)$, $\tilde{\Pi} = o(p\Pi^b)$, откуда еще не следует (22). Аналогично обстоит дело и с центром вращения (7).

Верны ли для источников (6) и (7) в неоднородной среде неравенства (22) или хотя бы неравенства для полных энергий

$$|\mathscr{E}^a| \gg |\tilde{\mathscr{E}}|, \quad |\mathscr{E}^b| \gg |\tilde{\mathscr{E}}| \tag{23}$$

при общей временно́й зависимости (2), неизвестно.

Мы докажем (23) лишь в квазигармоническом случае (4) при дополнительном условии на фазу

$$\ddot{\varphi}(t) \neq 0. \tag{24}$$

В самом деле, из (4), (11) и (24) следует, что $\tilde{\Pi}$ — сумма быстроосциллирующих слагаемых

$$\tilde{\Pi}(t) \sim \exp(ip\psi_+)\,\Pi_+ + \exp(ip\psi_-)\,\Pi_-, \tag{25}$$

$$p\psi_\pm = \pm p\{\varphi(t-\alpha r) - \varphi(t-\beta r)\} \approx \pm(\beta-\alpha)\, p\dot{\varphi}(t)\, r, \tag{26}$$

причем вследствие (8) $p\psi_\pm \to \infty$. Благодаря (24) интегралы по t в обоих слагаемых в (25) не имеют стационарных точек, и

$$\tilde{\mathscr{E}} = o(p^{-\infty}\mathscr{E}^{a,b}). \tag{27}$$

При конечной гладкости φ, $\mathscr{A}$ или упругих параметров оценка (27) заменится на степенну́ю.

В однородной среде, как легко показать, $\tilde{\Pi} \equiv 0$ не только для гармонических колебаний (см. [6]), но и для любой временно́й зависимости источника.

2. Формулы для конкретных источников

1. Рассмотрим случай точечной силы (5). Как показано в [3],

$$\Phi^a(\tau;\ p) = \frac{\alpha^2}{\rho(0)}\Phi(\tau;\ p), \quad \Phi^b(\tau;\ p) = \frac{\beta^2}{\rho(0)}\Phi(\tau;\ p), \quad f_j^a(\xi) = \xi_3\xi_j, \quad f_j^b(\xi) = \delta_{3j} - \xi_3\xi_j.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|\xi|=1} |\mathbf{f}^a(\xi)|^2 d^2\xi = 2\pi\int\limits_0^\pi \sin\vartheta\cos^2\vartheta d\vartheta = \frac{4\pi}{3}, \qquad \int\limits_{|\xi|=1} |\mathbf{f}^b(\xi)|^2 d^2\xi = 2\pi\int\limits_0^\pi \sin^3\vartheta d\vartheta = \frac{8\pi}{3},$$

откуда

$$\Pi^a(t) \approx \frac{4\pi}{3\rho(0)\,a^3(0)}|\dot\Phi(t-\alpha r;\ p)|^2, \tag{28}$$

$$\Pi^b(t) \approx \frac{8\pi}{3\rho(0)\,b^3(0)}|\dot\Phi(t-\beta r;\ p)|^2, \tag{29}$$

$$\mathscr{E}^b/\mathscr{E}^a \approx 2\gamma^3, \tag{30}$$

где обозначено

$$\gamma = a(0)/b(0). \tag{31}$$

Неоднородность среды не сказывается на главных членах асимптотики поля и энергии в случае источника (5) [как, впрочем, и для любого однородного сосредоточенного $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, кроме (6) и (7)].

2. Рассмотрим задачу о центре расширения (6). Главный член асимптотики $\mathbf{u}^a$ такой же, как и в однородной среде (см. [3])

$$\Phi^a(\tau;\ p) = \frac{\alpha^3}{\rho(0)}\dot\Phi(\tau;\ p), \quad f_j^a(\xi) = \xi_j.$$

Выражение для $\mathbf{u}^b$, полученное в [3] методом пограничного слоя, таково

$$\Phi^b(\tau;\ p) = \frac{1}{\rho(0)\,(b^2(0)-a^2(0))}\Phi(\tau;\ p); \quad f_j^b = q_j - q_k\xi_k\xi_j,$$

$$q_j = \left\{4\frac{\partial_j b(\mathbf{x})}{b(\mathbf{x})} - \frac{\partial_j\rho(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})}\right\}_{\mathbf{x}=0}.$$

Предполагая, что $\mathbf{q}\neq 0$, выберем оси координат так, чтобы ось $\mathbf{e}_3$ была бы параллельна $\mathbf{q}$, т. е. $q_j = |\mathbf{q}|\delta_{3j}$, $f_j^b = |\mathbf{q}|(\delta_{3j} - \xi_3\xi_j)$. Следовательно, $|\mathbf{f}^b|^2 = |\mathbf{q}|^2(1-\xi_3^2)$. Далее

$$\int\limits_{|\xi|=1} |\mathbf{f}^b(\xi)|^2 d^2\xi = 2\pi|\mathbf{q}|^2\int\limits_0^\pi \sin^3\vartheta d\vartheta = \frac{8\pi}{3}|\mathbf{q}|^2, \qquad \int\limits_{|\xi|=1} |\mathbf{f}^a(\xi)|^2 d^2\xi = 2\pi\int\limits_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta = 4\pi.$$

Отсюда

$$\Pi^a(t) \approx \frac{4\pi}{\rho(0)\,a^5(0)}|\ddot\Phi(t-\alpha r;\ p)|^2, \tag{32}$$

$$\Pi^b(t) \approx \frac{8\pi|\mathbf{q}|^2 b(0)}{3\rho(0)\,(a^2(0)-b^2(0))^2}|\dot\Phi(t-\beta r;\ p)|^2. \tag{33}$$

Следовательно,

$$\frac{\mathscr{E}^b}{\mathscr{E}^a} \approx \frac{2}{3}\frac{\gamma^4}{(\gamma^2-1)^2}a(0)\,b(0)\,M\,|\mathbf{q}|^2, \tag{34}$$

где

$$M = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\dot\Phi(\tau;\ p)|^2 d\tau : \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\ddot\Phi(\tau;\ p)|^2 d\tau. \tag{35}$$

При квазигармоническом импульсе (4)

$$M \approx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathscr{A}(t)|^2 |\dot\varphi(t)|^2 dt : p^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathscr{A}(t)'|^2 |\dot\varphi(t)|^4 dt.$$

В случае гармонических колебаний $[\mathscr{A} \equiv 1,\ \varphi(t) = t]$ $M = p^{-2}$.

3. Рассмотрим центр вращения (7). На главный член асимптотики $\mathbf{u}^b$ неоднородность среды не влияет. Как следует из [3],

$$\Phi^b(\tau;\ p) = \frac{\beta^3}{\rho(0)} \dot\Phi(\tau;\ p), \quad f_j^b = \delta_{1j}\xi_2 - \delta_{2j}\xi_1.$$

Воспользовавшись результатами [7], можно аналогично [3] получить, что

$$\Phi^a(\tau;\ p) = \frac{1}{\rho(0)(b^2(0) - a^2(0))} \Phi(\tau;\ p),$$

$$\xi^a(\xi) = (P_1\xi_2 - P_2\xi_1)\,\xi,$$

$$P_j = \left\{\left(\frac{2}{\gamma^2} - 1\right)\frac{\partial_j \rho(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})} + \frac{4}{\gamma^2}\frac{\partial_j b(\mathbf{x})}{b(\mathbf{x})}\right\}_{\mathbf{x}=0}.$$

Полагая $P_1 = |\mathbf{P}|\sin\vartheta_0 \sin\eta_0$, $P_2 = |\mathbf{P}|\sin\vartheta_0\cos\eta_0$, $P_3 = |\mathbf{P}|\cos\vartheta_0$, находим

$$\int\limits_{|\xi|=1} |\mathbf{f}^a(\xi)|^2 d^2\xi = |\mathbf{P}|^2 \sin^2\vartheta_0 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2(\eta - \eta_0)\, d\eta \int\limits_0^{\pi} \sin^3\vartheta d\vartheta =$$

$$= \frac{4\pi}{3}|\mathbf{P}|^2 \sin^2\vartheta_0 = \frac{4\pi}{3}|[\mathbf{P},\ \mathbf{e}_3]|^2,$$

$$\int\limits_{|\xi|=1} |\mathbf{f}^b(\xi)|^2 d^2\xi = 2\pi \int\limits_0^{\pi} \sin^3\vartheta d\vartheta = \frac{8\pi}{3}.$$

Отсюда

$$\Pi^b(t) \approx \frac{8\pi}{3\rho(0)\, b^5(0)} |\ddot\Phi(t - \beta r;\ p)|^2, \tag{36}$$

$$\Pi^a(t) \approx \frac{4\pi |[\mathbf{P},\ \mathbf{e}_3]|^2 a(0)}{3\rho(0)(a^2(0) - b^2(0))^2} |\dot\Phi(t - \alpha r,\ p)|^2, \tag{37}$$

$$\frac{\mathscr{E}^a}{\mathscr{E}^b} \approx \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)^2} a(0)\, b(0)\, M\, |[\mathbf{P},\ \mathbf{e}_3]|^2. \tag{38}$$

Отметим, что величина (38) по крайней мере на порядок меньше, чем (34), поскольку при $\lambda + 2\mu > \mu > 0$ $\gamma > \sqrt{2}$.

Автор признателен Н. Н. Пузыреву и А. В. Тригубову за беседу, стимулировавшую написание статьи, и В. М. Бабичу и А. С. Зильберглейту за полезные замечания.

Литература

[1] *С. Я. Коган.* Сейсмическая энергия и методы ее измерения. «Наука», М. (1975).
[2] *В. М. Бабич.* Изв. АН СССР, физика Земли, 2, 3 (1979).
[3] *А. П. Киселев.* Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, **104**, 111 (1981).
[4] *А. П. Киселев.* ДАН СССР, **219**, 829 (1974).
[5] *В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова.* Метод пограничного слоя в задачах дифракции. «Наука», Л. (1974).
[6] *А. С. Зильберглейт.* Письма ЖТФ, **7**, 598 (1981).
[7] *А. П. Киселев.* Вопр. динам. теории распростр. сейсмич. волн, **15**, 6 (1975).

Научно-производственное объединение
«Рудгеофизика»
Ленинград

Поступило в Редакцию
5 февраля 1982 г.