

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. A. Gerasimov, S. V. Zhuiko, Исследование первых интегралов задачи двух неподвижных центров Л. Эйлера,
Matem. Mod. Kraev. Zadachi, 2005, Part 3, 74–81

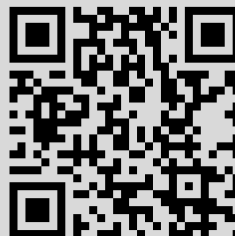
<https://www.mathnet.ru/eng/mm kz446>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.173

May 15, 2025, 03:13:11



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Засорин Ю.В. О свойствах симметрии преобразования Фурье-Бесселя // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, 1986. С. 52–58.
2. Ляхов Л.Н. Преобразование Фурье-Бесселя ядра сингулярного интегрального оператора, порожденного обобщенным сдвигом // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, 1986. С. 75–83.

УДК 521.13

И.А. Герасимов, С.В. Жуйко

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЗАДАЧИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ Л. ЭЙЛЕРА

Задача двух неподвижных центров была введена Л. Эйлером [1] в 1760 г. и до сих пор является одной из фундаментальных задач небесной механики. Рассмотрим ее постановку. Предположим, что на плоскости OXY находятся две неподвижные материальные точки (центры) P_1 и P_2 с массами m_1 и m_2 , под действием ньютоновского притяжения которых в этой же плоскости движется материальная точка P массы m . Длину отрезка $[P_1, P_2]$ будем считать равной $2c$ и для определенности положим, что $m_1 \geq m_2$.

Выберем прямоугольную систему координат OXY таким образом, чтобы центры P_1 и P_2 располагались на оси OX и были равноудалены от начала координат, т.е. их координаты были равны $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ соответственно. Тогда величины r_1 и r_2 , определяемые формулами

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

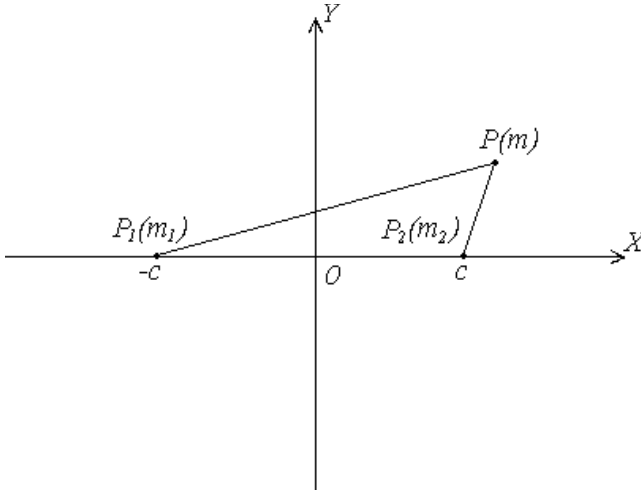
будут представлять расстояния точки P от центров P_1 и P_2 (см. рисунок).

Дифференциальные уравнения движения точки P , притягиваемой центрами P_1 и P_2 с силами, обратно пропорциональными квадратам расстояний, запишутся в следующем виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -fm_1 \frac{x+c}{r_1^3} - fm_2 \frac{x-c}{r_2^3},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -f m_1 \frac{y}{r_1^3} - f m_2 \frac{y}{r_2^3}, \quad (1)$$

где f – гравитационная постоянная, а t – время.



Решение задачи двух неподвижных центров заключается в интегрировании этих уравнений, т.е. в нахождении координат (x, y) точки P как функций времени, удовлетворяющих уравнениям движения (1) с заданными начальными условиями.

С целью упрощения записи последующих выкладок введем эллиптические координаты

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \mu = \frac{r_1 - r_2}{2} \quad (2)$$

и перейдем к системе единиц, в которой расстояние центров P_1 и P_2 от начала системы координат и величина гравитационной постоянной равняются единицам. В этом случае первые интегралы задачи можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^2 &= L(\lambda) = (\lambda^2 - 1)L_1(\lambda), \\ \left(\frac{d\mu}{d\tau} \right)^2 &= M(\mu) = (\mu^2 - 1)M_1(\mu). \end{aligned} \quad (3)$$

В этих формулах τ – собственное время, задаваемое соотношением

$$dt = (\lambda^2 - \mu^2)d\tau,$$

многочлены, стоящие в правых частях уравнений (3), –

$$L_1(\lambda) = g\lambda^2 + 2n_1\lambda - \gamma, \quad M_1(\mu) = g\mu^2 + 2n_2\mu - \gamma,$$

где g и γ – постоянные интегрирования, а коэффициенты n_1 и n_2 определяются соотношениями

$$n_1 = m_1 + m_2, \quad n_2 = m_1 - m_2.$$

Займемся непосредственно исследованием первых интегралов. При движении точки P ее эллиптические координаты λ и μ , как их производные по независимой переменной τ , будучи действительными в начальный момент, должны оставаться такими же и для всех последующих значений τ . Последнее означает условие неотрицательности правых частей интегралов

$$L(\lambda) \geq 0, \quad M(\mu) \geq 0.$$

Эти условия согласно выводам, изложенным ранее, приводят нас к двум группам неравенств

$$\lambda \geq 1, \quad -1 \leq \mu \leq 1$$

и

$$g\lambda^2 + 2n_1\lambda - \gamma \geq 0, \quad g\mu^2 + 2n_2\mu - \gamma \geq 0.$$

Поскольку значения основных полиномов $L(\lambda)$ и $M(\mu)$, зависят как от начальных величин λ_0 и μ_0 , так и от взаимного расположения их корней, то, прежде всего, следует рассмотреть последний вопрос. Таким образом, на плоскости постоянных g и γ необходимо установить перечень областей, в каждой из которых порядок расположения корней основных полиномов $L(\lambda)$ и $M(\mu)$ одинаков.

Обратимся сначала к основному полиному $L(\lambda)$ и рассмотрим различные случаи знака постоянной интегрирования g .

1. $g > 0$. Запишем выражения для корней $L_1(\lambda)$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-n_1 \pm \sqrt{n_1^2 + g\gamma}}{g}. \quad (4)$$

Если они действительны, то условимся считать $\lambda_1 \leq \lambda_2$, и поскольку $g > 0$, то $\lambda_1 < 0$. Очевидно, что кривые кратных корней могут быть получены при отыскании условий, когда $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \pm 1$ и, наконец, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Рассмотрим эти условия отдельно.

1.1. $\lambda_1 = \lambda_2$. Следовательно,

$$n_1^2 = -g\gamma. \quad (5)$$

Это ветвь гиперболы в четвертом квадранте плоскости (g, γ) .

1.2. $\lambda_1 = -1$. Из (4) находим

$$\sqrt{n_1^2 + g\gamma} = g - n_1, \quad (6)$$

что возможно, если

$$g \geq n_1 \quad \text{и} \quad \gamma \geq -\frac{n_1^2}{g}. \quad (7)$$

Решая уравнение (6), получаем

$$\gamma = g - 2n_1. \quad (8)$$

Учитывая условия (7), находим, что формула (8) задает полупрямую с $g \geq n_1$, то есть она касается в своем начале ($g = n_1$, $\gamma = -n_1$) гиперболы (5).

1.3. $\lambda_2 = -1$. По формуле (4) получаем

$$\sqrt{n_1^2 + g\gamma} = n_1 - g. \quad (9)$$

Для этого необходимо, чтобы

$$0 < g \leq n_1, \quad \gamma \geq -\frac{n_1^2}{g}. \quad (10)$$

Решение уравнения (9) вновь дает выражение (8), которое совместно с найденными условиями определяет полуоткрытый отрезок

$$0 < g \leq n_1, \quad -2n_1 < \gamma \leq -n_1, \quad (11)$$

касающийся в своем конце ($g = n_1$, $\gamma = -n_1$) гиперболы (4), продолжая, таким образом, луч (8). Очевидно, что точка касания ($g = n_1$, $\gamma = -n_1$) соответствует кратному корню $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

1.4. $\lambda_2 = 1$. Теперь, согласно формуле (4), получаем $\sqrt{n_1^2 + g\gamma} = g + n_1$. Решение этого уравнения определяет полупрямую

$$\gamma = g + 2n_1, \quad g > 0. \quad (12)$$

2. $g < 0$. В этом случае корни $L_1(\lambda)$ можно записать так

$$\lambda_{1,2} = \frac{n_1 \pm \sqrt{n_1^2 + g\gamma}}{-g}. \quad (13)$$

Очевидно, что $\lambda_2 > 0$ и ветви кривых кратных корней отвечают случаям $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1 = \pm 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Продолжим построение графиков кривых кратных корней.

2.1. $\lambda_1 = \lambda_2$. Этот случай опять соответствует гиперболе (5), но только теперь ее ветви, лежащей во втором квадранте плоскости (g, γ) .

2.2. $\lambda_1 = 1$. Из (13) находим

$$\sqrt{n_1^2 + g\gamma} = n_1 + g, \quad (14)$$

а для этого необходимо выполнение неравенств

$$\gamma \leq -\frac{n_1^2}{g}, \quad -n_1 \leq g < 0. \quad (15)$$

Решение уравнения (14) с учетом условия (15) определит отрезок, являющийся продолжением прямой (12) в полуплоскость $g < 0$ до точки $(g = -n_1, \gamma = n_1)$, в которой он и касается гиперболы (5).

2.3. $\lambda_2 = 1$. Теперь по формуле (13) находим

$$\sqrt{n_1^2 + g\gamma} = -n_1 - g. \quad (16)$$

Это равенство возможно только при выполнении неравенств

$$\gamma \leq -\frac{n_1^2}{g}, \quad g \leq -n_1. \quad (17)$$

Решение уравнения (15) при этих условиях будет соответствовать лучу, касающемуся гиперболы (5) в точке $(g = -n_1, \gamma = n_1)$, и отвечает, таким образом, кратному корню $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

2.4. $\lambda_1 = -1$. Из (13) следует $\sqrt{n_1^2 + g\gamma} = n_1 - g$. Решая это уравнение, находим $\gamma = g - 2n_1$, что является продолжением прямой (8) в полуплоскость $g < 0$.

3. $g = 0$. Здесь

$$L_1(\lambda) = 2n_1\lambda - \gamma \quad (18)$$

и корень

$$\lambda_5 = \frac{\gamma}{2n_1} \quad (19)$$

может стать кратным, если $\gamma = 2n_1$, либо $\gamma = -2n_1$, а это – точки пересечения прямых $g = 0$ и, соответственно, (8) и (12).

На основе полученных результатов можно построить все ветви кривой кратных корней полинома $L(\lambda)$. Указанные кривые разделяют плоскость постоянных интегрирования (g, γ) на области, линии и точ-

ки, отвечающие различным вариантам расположений корней полинома $L(\lambda)$. Используя метод движения по прямым $g = const$, нетрудно убедиться, что всем нумерованным множествам точек соответствуют варианты расположения корней $L(\lambda)$, которые для удобства сведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

№	Расположение корней $L(\lambda)$	№	Расположение корней $L(\lambda)$
1.	$\lambda_1 < -1, 1 < \lambda_2$	15.	$\lambda_5 = 1$
2.	$\lambda_1 = -1, 1 < \lambda_2$	16.	$\lambda_5 > 1$
3.	$-1 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$	17.	λ_1, λ_2 – комплексные
4.	$-1 < \lambda_1 < \lambda_2 = 1$	18.	$\lambda_1 = \lambda_2 < -1$
5.	$-1 < \lambda_1 = \lambda_2 = 1$	19.	$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
6.	$-1 < \lambda_1 = 1 < \lambda_2$	20.	$-1 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$
7.	$-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$	21.	$\lambda_1 < \lambda_2 < -1$
8.	$1 < \lambda_1 < \lambda_2$	22.	$-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$
9.	$-1 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$	23.	$\lambda_1 < \lambda_2 = -1$
10.	$1 < \lambda_1 = \lambda_2$	24.	$\lambda_1 = -1 < \lambda_2 < 1$
11.	λ_1, λ_2 – комплексные	25.	$\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 1$
12.	$\lambda_5 < -1$	26.	$\lambda_1 < -1 < \lambda_2 = 1$
13.	$\lambda_5 = -1$	27.	$\lambda_1 < -1, 1 < \lambda_2$
14.	$-1 < \lambda_5 < 1$		

Обратимся теперь к полиному $M(\mu)$. Как мы уже отмечали ранее, имеет место соотношение $L(\lambda, n_1) = M(\mu, n_2)$, и поэтому кривая кратных корней $M(\mu)$ получается из кривой для $L(\lambda)$ преобразованием подобия с коэффициентом $k = \frac{n_2}{n_1} < 1$ и центром в точке O . Очевидно,

что заменой в табл. 1 λ_1 и λ_2 на μ_1 и μ_2 мы получим 27 вариантов расположений корней полинома $M(\mu)$. Однако следует учесть, что если в случае равных масс вид полинома $L(\lambda)$ не изменяется, то для $M(\mu)$ это не так, и это следует рассмотреть дополнительно.

Действительно, в этом случае

$$M(\mu) = (\mu^2 - 1)(g\mu^2 - \gamma). \quad (20)$$

Очевидно, что вид кривой кратных корней $M(\mu)$ определяется значениями (g, γ) , при которых $\mu_1 = \mu_2$. Если $g \neq 0$, то $\mu_1 = \mu_2$ при $\gamma = g$. Когда $g = 0$, то

$$M(\mu) = \gamma(1 - \mu^2), \quad (21)$$

поэтому при $\gamma = 0$ $M(\mu) \equiv 0$, тогда мы можем формально считать корнем любой кратности произвольное значение μ .

Теперь, передвигаясь по прямым $g = const$, можно выявить все случаи расположения корней полинома $M(\mu)$. Если определить области с одинаковым расположением корней, то нетрудно установить, что новым множествам точек отвечают возможности, представленные в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

№	28	29	30
Расположение корней $M(\mu)$	$\mu_1 = -1, \mu_2 = 1$ ($g < 0$)	$M(\mu) \equiv 0$	$\mu_1 = -1, \mu_2 = 1$ ($g > 0$)

Итак, плоскость (g, γ) разбивается различными ветвями кривых кратных корней основных полиномов $L(\lambda)$, $M(\mu)$ на области, в пределах каждой из которых расположение корней одинаково. Если это расположение отвечает реальному движению, то и тип этого движения внутри каждой области один и тот же.

Применим метод передвижения по плоскости (g, γ) вдоль прямых $g = const$, что позволяет выявить все возможные сочетания расположения корней $L(\lambda)$, $M(\mu)$, отвечающие реальным движениям. Для этого необходимо выполнение следующих неравенств:

$$L_1(\lambda) \geq 0, \quad M_1(\mu) \geq 0, \quad \lambda \geq 1, \quad -1 \leq \mu \leq 1. \quad (22)$$

Используя результаты, полученные выше, и, определив области, в которых выполняются условия (22), мы получим 47 множеств расположения корней основных полиномов $L(\lambda)$ и $M(\mu)$. Таким образом, вся плоскость постоянных интегрирования (g, γ) разбивается кривыми кратных корней на 47 областей, в каждой из которых характер расположения корней основных полиномов, стоящих в правых частях первых интегралов, одинаков, а следовательно, и тип движения точки P в

поле притяжения двух неподвижных центров также одинаков.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Euler L.* Historie de L'Academie Royale des sciences et Belles-lettres, (1760), 1767, Vol. XVI. Pp. 228–247.

УДК 517.95

О. Ю. Данилкина

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим в области $Q_T = \{(x, t) : x \in (0, l), t \in (0, T)\}$ уравнение

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0. \quad (1)$$

Поставим для него задачу с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

граничным условием

$$u(0, t) = 0 \quad (3)$$

и нелокальным условием

$$u(l, t) - \int_0^l H(\xi, t) u(\xi, t) d\xi = 0, \quad (4)$$

где функции $\mu(t)$, $H(x, t)$ являются заданными.

Покажем, что если $\varphi(x) \in C[0, l]$, а $H(x, t) \in C(\overline{Q_T})$, то решение задачи (1)–(4) существует. Для доказательства этого факта рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) &= 0; \\ u(x, 0) &= \varphi(x); \\ u(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = \mu(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mu(t)$ — достаточно гладкая функция, которую будем считать временно известной.

Решение задачи (1)–(3), (5) нетрудно найти методом разделения переменных [1]: