М. И. Кузнецов, Теорема вложения для транзитивных фильтрованных алгебр Ли характеристики p, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, номер 10, 43–45

М. И. Кузнецов

УДК 512.554

ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ТРАНЗИТИВНЫХ ФИЛЬТРОВАННЫХ АЛГЕБР ЛИ ХАРАКТЕРИСТИКИ p

В связи с теоремой о минимальном вложении для транзитивных алгебр Ли характеристики $p>0$ (см. [1], [2]) представляет интерес вопрос о совпадении минимальных флагов для фильтрованной транзитивной алгебры Ли $\mathcal{L}$ и ее ассоциированной градуированной алгебры Ли $\mathfrak{G}=\operatorname{gr}\mathcal{L}=\bigoplus_{i=-q}^{r} L_i$. Отметим, что этот вопрос является центральным при описании простых конечномерных фильтрованных алгебр Ли. В [2] приведены достаточные условия для совпадения флагов в случае $q<\min(p, 3)$, а в [3] — для $q\leqslant(p-1)/2$ (однако приведенное там доказательство справедливо лишь для $q=1$). В данной работе приводится усовершенствованное доказательство теоремы 3.2 из работы [2], пригодное для случая $q<p$.

Мы будем использовать обозначения из работы [2]: $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0)$ — транзитивная алгебра Ли над совершенным полем K характеристики $p>0$, $A=U(\mathcal{L})$ — универсальная обертывающая биалгебра, $\mathcal{L}^{\#}=\mathcal{L}+\mathcal{L}^{p}+\mathcal{L}^{p^2}+\ldots=\operatorname{Prim}A$ — алгебра Ли примитивных элементов в A, $M=N_{\mathcal{L}^{\#}}(\mathcal{L}_0)$, B — подалгебра в A, порожденная M. В [2] показано, что $B\cong U(\hat{\mathcal{L}}_0)$, где $\hat{\mathcal{L}}_0=\mathcal{L}_0+\langle u_1, \ldots, u_n\rangle\subset M$, $n=\operatorname{codim}\mathcal{L}_0$. Если V есть B-модуль, то через $c(V)$ будем обозначать усеченный коиндуцированный $\mathcal{L}$-модуль $\overline{\operatorname{coind}} V=\operatorname{Hom}_B(A, V)$; $F(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0)=F$ — минимальный флаг для $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0)$, $\tau:\mathcal{L}\to W(F)$ — минимальное вложение.

Теорема. *Пусть транзитивная алгебра Ли* $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0)$ *обладает B-инвариантной фильтрацией* $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{-q}\supset\mathcal{L}_{-q+1}\supset\ldots\supset\mathcal{L}_0\supset\mathcal{L}_1\supset\ldots\supset\mathcal{L}_r\supset 0$, $\mathfrak{G}=\bigoplus_{i=-q}^{r} L_i$ — *ассоциированная градуированная алгебра Ли*, $\{\mathfrak{G}_i=\bigoplus_{j\geqslant i} L_j\}$ — *соответствующая фильтрация. Предположим, что*:

1) $q<p$;
2) L_i — *неприводимый нетривиальный L_0-модуль*, $-q\leqslant i<0$;
3) $H^1(L_0, L_i)=0$, $i<0$;
4) $\operatorname{mtp}(L_i, X(\mathfrak{G}_1))=0$ *для* $-q<i<0$ *и*

$$\operatorname{mtp}(L_{-q}, X(\mathfrak{G}_1))<m(F(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0))-n, \quad n=\operatorname{codim}\mathfrak{G}_0.$$

Тогда:

а) $F(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0)=F(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0)$;
б) $\operatorname{Der}\mathcal{L}\cong N_{\overline{W(F)}}(\tau(\mathcal{L}))$.

Здесь $\tau:\mathcal{L}\to W(F)$ — минимальное вложение, $\overline{W(F)}$ есть p-замыкание $W(F)$.

Напомним, что $X(L)=L/[L, L]$, $\operatorname{mtp}(L_i, X(\mathfrak{G}_1))$ — кратность L_0-модуля L_i в L_0-модуле $X(\mathfrak{G}_1)$.

Доказательству предпошлем две простые леммы.

Лемма 1. *Пусть L — алгебра Ли, V есть L-модуль, все простые факторы которого нетривиальны. Если для любого простого фактора U модуля V $H^1(L, U)=0$, то $H^1(L, V)=0$.*

Доказательство. Пусть $V=V_1\supset V_2\supset\ldots\supset V_n\supset 0$ — композиционный ряд L-модуля V. Для точной последовательности коэффициентов $0\to V_2\to V_1\to V_1/V_2\to 0$ имеем точную последовательность когомологий $0\to H^0(L, V_2)\to H^0(L, V_1)\to H^0(L, V_1/V_2)\to H^1(L, V_2)\to H^1(L, V_1)\to H^1(L, V_1/V_2)\to\ldots$ Так как $H^0(L, V_1/V_2)=H^1(L, V_1/V_2)=0$, то $H^1(L, V_1)\cong H^1(L, V_2)$. Доказательство заканчивается индукцией по длине композиционного ряда.

Лемма 2. *В условиях теоремы пусть $\overline{\mathcal{L}}_{-q+1}=\mathcal{L}_{-q+1}/\mathcal{L}_0$ есть $\hat{\mathcal{L}}_0$-модуль. Тогда $H^1(\mathcal{L}, c(\overline{\mathcal{L}}_{-q+1}))=0$.*

Доказательство. По лемме Шапиро $H^1(\mathcal{L}, c(\overline{\mathcal{L}}_{-q+1}))\cong H^1(\hat{\mathcal{L}}_0, \overline{\mathcal{L}}_{-q+1})$. В силу леммы 1 достаточно доказать, что $H^1(\hat{\mathcal{L}}_0, L_i)=0$ для $i=-q+1,\dots,-1$, т. к. $\{L_i,\ i=\overline{-q+1,-1}\}$ — семейство всех простых факторов $\hat{\mathcal{L}}_0$-модуля $\overline{\mathcal{L}}_{-q+1}$. Применим точную последовательность Серра — Хохшильда для алгебры Ли $\hat{\mathcal{L}}_0$, идеала $\mathcal{L}_0$ и $\hat{\mathcal{L}}_0$-модуля L_i:

$$0\to H^1(\hat{\mathcal{L}}_0/\mathcal{L}_0,\ L_i^{\mathcal{L}_0})\xrightarrow{\inf}H^1(\hat{\mathcal{L}}_0,\ L_i)\xrightarrow{\mathrm{res}}H^1(\mathcal{L}_0,\ L_i)^{\hat{\mathcal{L}}_0}\to H^2(\hat{\mathcal{L}}_0/\mathcal{L}_0,\ L_i^{\mathcal{L}})\to H^2(\hat{\mathcal{L}}_0,\ L_i).$$

Так как $L_i^{\mathcal{L}_0}=0$, то

$$H^1(\hat{\mathcal{L}}_0,\ L_i)\cong H^1(\mathcal{L}_0,\ L_i)^{\hat{\mathcal{L}}_0} \qquad (*)$$

Снова применяя точную последовательность Серра — Хохшильда для алгебры Ли $\mathcal{L}_0$, идеала $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_0$-модуля L_i и учитывая, что $\mathcal{L}_0/\mathcal{L}_1=L_0$, $L_i^{\mathcal{L}_1}=L_i$, получаем $0\to H^1(L_0,\ L_i)\xrightarrow{\inf}H^1(\mathcal{L}_0,\ L_i)\xrightarrow{\mathrm{res}}H^1(\mathcal{L}_1,\ L_i)^{\mathcal{L}_0}\to\dots$ Так как по условию $H^1(L_0,\ L_i)=0$, то $\mathrm{res}: H^1(\mathcal{L}_0,\ L_i)\to H^1(\mathcal{L}_1, L_i)^{\mathcal{L}_0}$ — вложение.

Покажем, что $H^1(\mathcal{L}_1,\ L_i)^{\mathcal{L}_0}=0$. Отсюда будет следовать, что $H^1(\mathcal{L}_0,\ L_i)=0$ и в силу $(*)$ $H^1(\hat{\mathcal{L}}_0,\ L_i)=0$. Так же, как в [2], получаем $H^1(\mathcal{L}_1,\ L_i)^{\mathcal{L}_0}=\mathrm{Hom}_{L_0}(X(\mathcal{L}_1),\ L_i)$ и $\dim H^1(\mathcal{L}_1,\ L_i)^{\mathcal{L}_0}=\mathrm{mtp}(L_i,\ X(\mathcal{L}_1))\leqslant \mathrm{mtp}(L_i,\ X(\mathfrak{G}_1))=0$ (условие 4) теоремы).

Доказательство теоремы в точности следует доказательству теоремы 3.2 в [2]. Надо лишь в нашей ситуации доказать, что морфизм γ в коммутативной диаграмме (см. [2]):

$$\begin{tikzcd}
 & & c(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{L}/\mathcal{L}_0 \arrow[d, "\pi"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "j"'] & & \\
 & & c(L_{-q}) \arrow[r, "\chi"] & L_{-q}=\mathcal{L}/\mathcal{L}_{-q+1}
\end{tikzcd}$$

индуцирует сюръективный морфизм $\gamma: N_{W(F)}(\tau\mathcal{L})\to N_{c(L_{-q})}(j(\mathcal{L}))$, $W(F)=c(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0)$, $F=F(\mathcal{L},\ \mathcal{L}_0)$ (см. [2]). Из приведенной выше диаграммы получаем морфизм коротких точных последовательностей $\mathcal{L}$-модулей

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, equal] & c(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & c(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0)/\mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r, "j"] & c(\mathcal{L}/\mathcal{L}_{-q+1}) \arrow[r] & c(\mathcal{L}/\mathcal{L}_{-q+1})/\mathcal{L} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

и соответствующий ему морфизм точных когомологических последовательностей. Учтем также, что в силу проективности B-модуля A из точности последовательности B-модулей $0\to\overline{\mathcal{L}}_{-q+1}\to\mathcal{L}/\mathcal{L}_0\to\mathcal{L}/\mathcal{L}_{-q+1}\to 0$ следует точность последовательности $\mathcal{L}$-модулей $0\to c(\overline{\mathcal{L}}_{-q+1})\to c(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0)\to c(\mathcal{L}/\mathcal{L}_{-q+1})\to 0$. В результате мы получаем следующую коммутативную диаграмму точных когомологических последовательностей:

$$(H^0(\mathcal{L},\ \mathcal{L})=H^0(\mathcal{L},\ c(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0))=H^0(\mathcal{L},\ c(L_{-q}))=H^0(\mathcal{L},\ c(\overline{\mathcal{L}}_{-q+1}))=0)$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & H^1(\mathcal{L},\ c(\overline{\mathcal{L}}_{-q+1})) \arrow[d, shift left] & \\
0 \arrow[r] & H^0(\mathcal{L},\ c(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0)/\mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"', shift right] \arrow[d, dashed, shift left] & H^1(\mathcal{L},\ \mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(\mathcal{L},\ c(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0)) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[u, dashed, shift left] & \dots \\
0 \arrow[r] & H^0(L,\ q(L_{-q})/\mathcal{L}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, leftarrow, shift right] & H^1(\mathcal{L},\ \mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & H^1(\mathcal{L},\ c(L_{-q})) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
 & & & H^2(\mathcal{L},\ c(\overline{\mathcal{L}}_{-q+1})) \arrow[d] & \\
 & & & \dots &
\end{tikzcd}$$

Путь в диаграмме, указанный пунктирными стрелками, дает точную последовательность $0 \to H^0(\mathcal{L}, c(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0)/\mathcal{L}) \to H^0(\mathcal{L}, c(L_{-q})/\mathcal{L}) \to H^1(\mathcal{L}, c(\overline{\mathcal{L}}_{-q+1}))$. По лемме 2 $H^1(\mathcal{L}, c(\overline{\mathcal{L}}_{-q+1}))=0$. Отсюда следует сюръективность γ,

$$\gamma: H(\mathcal{L}, c(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0)/\mathcal{L}) = N_{W(F)}(\mathcal{L})/\mathcal{L} \to N_{c(L-q)}(\mathcal{L})/\mathcal{L} = H^0(\mathcal{L}, \ c(L_{-q})/\mathcal{L}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов М. И. Теорема вложения для транзитивных алгебр Ли положительной характеристики //XIX Всесоюзн. алгебраическ. конф.: Тез. докл.— Львов, 1987.— Ч. 2.— С. 153.
2. Кузнецов М. И. Усеченные индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p//Изв. АН СССР. Сер. матем.—1989.— Т. 53.— № 3.— С. 557—589.
3. Wilson R. L. Differential forms and the algebra $W(m:n)$//Lect. Notes Math.— 1989.— V. 1373.— P. 29—41.

г. Нижний Новгород

Поступила
05.01.1990