А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

Том 4
Выпуск I Руководитель А.И.Мальцев 1965 г.

СЛОЖНОСТЬ РАСПОЗНАВАНИЯ СИММЕТРИИ НА МАШИНАХ ТЬЮРИНГА С ВХОДОМ

Р.Фрейвалд

Введение

Существуют разные концепции автоматов (машины Тьюринга, автоматы Неймана-Черча, растущие автоматы). Один из естественных способов их сравнения - брать конкретные операторы или предикаты и оценить сложность их вычисления на различных автоматах (например, число затрачиваемых шагов). В ряде работ в качестве такого конкретного предиката рассматривались предикат симметрии и подобные ему предикаты и операторы. Так, например, Г.С.Цейтин [2] оценил необходимое количество подстановок для обращения слова при помощи нормального алгорифма Маркова.

Недавно Я.М.Барздинь доказал следующую теорему:

Если машина Тьюринга T распознает симметрию, то существует константа C_T, что почти для всех симметричных слов X время распознавания

$$t(X) \geqslant C_T |X|^2 ,$$

где $|X|$ - длина слова X.

Эта теорема остается в силе и для некоторого более общего класса предикатов.

При другой концепции автомата может оказаться, что для распознавания симметрии нужно не $|X|^2$ шагов, а только $const \cdot |X|$. Это так, например, для машин Тьюринга с двумя головками.

В настоящей работе рассматриваются машины Тьюринга с входом.

Легко убедиться, что на этих машинах можно вычислить за $|X|$ шагов даже некоторые такие предикаты, для вычисления которых на обычной машине Тьюринга нужно $c\cdot|X|^2$ шагов. Таков, например, предикат "слово симметрично, в середине слова стоит одна буква $*$ и в слове нет других букв $*$ ". Однако в работе доказывается

ТЕОРЕМА. Для всякой машины, распознающей симметрию, существует константа C_T, что для бесконечно многих слов X

$$t(X) \geqslant C_T\cdot|X|^2 .$$

Из этого следует, что оператор симметрии нельзя реализовать в реальное время на машинах Тьюринга с одной головкой и входом. Для машин с многими головками вопрос о возможности реализации оператора симметрии в реальное время остается открытым. Р.Мак-Нотон [3] высказал даже гипотезу, что ни при какой концепции автомата предикат симметрии не вычислим в реальное время. Я.М.Барздинь доказал, что это не так: существует автомат Неймана-Черча размерности I, на котором симметрия распознается в реальное время.

Из вышеупомянутых результатов, в частности, вытекает, что даже одномерный автомат Неймана-Черча, с точки зрения скорости вычисления, существенно сильнее машины Тьюринга.

§ I. Машины Тьюринга с входом

Машина Тьюринга [I] дополняется входом, т.е. состояние машины в следующий момент и действие головки (запись буквы, передвижение) зависят не только от состояния машины и обозреваемой буквы, но также от входа в данный момент.

В этой статье рассматриваются машины с односторонней (правой) лентой и функцией отражения от начала ленты. Однако излагаемые в дальнейшем результаты остаются верными и для двусторонних лент.

Под переработкой слова P (в алфавите $\{0,1\}$) будем понимать следующее: в начале работы машины лента пуста, а головка находится на первой ячейке. В первый момент на вход подается первая слева буква слова P, во второй момент - вторая и т.д. После последней буквы слова P подается буква $*$. Машина устроена так, что после подачи $*$, она работает уже независимо от дальнейших входов. Вся работа машины распадается таким образом на два этапа: первый этап - до входа $*$ (включительно), второй этап - после.

В § 2 мы будем рассматривать машины, распознающие свойства слов. Это означает следующее: когда машина останавливается, вся лента, кроме первой ячейки, пуста. В первой ячейке записана единица, если входное слово (поступившее до первой $*$) обладает данным свойством, и записан нуль-в противном случае.

Следуя [I], i -ую слева ячейку ленты обозначим через $Я_i$ $(i=1,2,\dots)$. Точкой i назовем границу между ячейками $Я_i$ и $Я_{i+1}$ (см. рис. I).

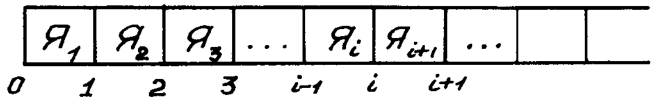

Рис. I

При $i<j$ $(i,j=0,1,2,\dots)$ через $\langle i,j\rangle$ обозначим зону, состоящую из всех $j-i$ ячеек, расположенных между точками i,j;

При $j=\infty$ $\langle i,j\rangle$ - бесконечная зона, расположенная правее i Помимо общей нумерации ячеек на ленте $(Я_1, Я_2,\dots)$на каждой зоне принята своя в н у т р е н н я я нумерация ячеек также слева направо.

К о н ф и г у р а ц и е й K (отнесенной к такту τ) называется функция, указывающая для каждого натурального n : I) какая буква вписана в ячейку $Я_n$, а если $Я_n$ обозревается головкой, то 2) в каком состоянии, 3) входную букву в момент τ (только для моментов первого этапа).

Под конфигурацией $K(i,j)$ зоны $\langle i,j\rangle$ (отнесенной к такту τ) понимается функция, указывающая для каждого натурального n , не большего длины зоны; I) какая буква вписана в ячейку с внутренним номером n зоны $\langle i,j\rangle$, а если эта ячейка обозревается головкой, то 2) в каком состоянии , 3) входную букву в момент τ (только для моментов первого этапа).

В дальнейшем будем считать, что у нас фиксирована некоторая машина. Пусть при переработке слова P головка в первый раз переходит точку i в состоянии $q(1)$, затем в состоянии $q(2)$ и т.д., притом j раз переход был совершен на первом этапе; тогда мы скажем, что слово P имеет в точке i с л е д $j; q(1)q(2)\dots$. Длиной следа назовем длину слова $q(1)q(2)\dots$,т.е. число переходов этой точки. Если переходов нет, то говорим, что след пуст.

Пусть дана точка $r>0$ на ленте машины. Определим процедуру разделения слова P на куски относительно точки r :на вход машины подаем слово P . Ту часть слова P , которое при этом поступит на вход между $(i-1)$ -ым и i -ым переходом головкой точки r , назовем i -ым куском слова P . Так как в начале работы головка находилась на $Я_1$, нетрудно заметить,что буквы из кусков с четными номерами появились на входе, когда головка находилась правее точки τ, а буквы из кусков с нечетными номерами, когда головка была левее.

Пусть след слова P_1 в точке $\tau_1 > 0$ и след слова P_2 в точке $\tau_2 > 0$ совпадают. Рассмотрим следующую конструкцию: разделим слово P_1 на куски относительно точки τ_1 и слово P_2 относительно точки τ_2. Возьмем куски с нечетными номерами из P_1, а куски с четными номерами из P_2 и соединим их в порядке возрастания номеров. Слово, полученное такой конструкцией, назовем составленным из P_1 и P_2 и обозначим через $S(P_1, P_2; \tau_1, \tau_2)$.

Легко видеть, что слово $S(P_1, P_2; \tau_1, \tau_2)$ имеет такой же след в τ_1, как P_1 в τ_1 и P_2 в τ_2 и справедлива

ЛЕММА I (лемма о замещениях). *Запись в зоне $\langle 0, \tau_1 \rangle$ при остановке машины после переработки слова $S(P_1, P_2; \tau_1, \tau_2)$ совпадает с соответствующей записью в зоне $\langle 0, \tau_1 \rangle$ для слова P_1, а запись в зоне $\langle \tau_1, \infty \rangle$ совпадает с записью в зоне $\langle \tau_2, \infty \rangle$ для слова P_2.*

В дальнейшем под словом P будем понимать слова в алфавите $\{0, 1\}$. Подадим на вход машины слово $P*$. Число шагов до остановки данной машины обозначим через $t(P)$. Как и во введении, длину слова P обозначим через $|P|$. Временной сигнализирующей функцией данной машины называется $t(\lambda) = \max t(P)$, где максимум берется по всем словам P длины $|P| = \lambda$.

Пусть P - некоторое слово четной длины. Подадим на вход машины слово $P*$. Совокупность ячеек, где головка находилась хотя бы один раз, пока на вход подавалась первая половина слова P, назовем *исходной зоной слова* P. $\sqrt{t(|P|)}$ ячеек направо от исходной зоны назовем *контрольной зоной этого слова* (см. рис. 2). Работа машины

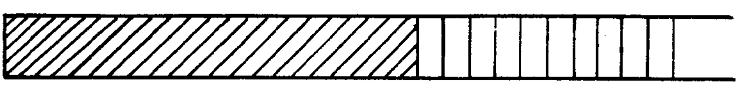

Рис. 2

занимает не более $t(|P|)$ шагов. Следовательно, для каждого слова P в контрольной зоне найдется по крайней мере одна такая точка, что головка перешла её не более $\frac{t(|P|)}{\sqrt{t(|P|)}} = \sqrt{t(|P|)}$ раз. Зафиксируем для каждого слова одну такую точку. Назовем её **контрольной точкой слова** P

Пусть число состояний машины равно a. Все слова данной длины $|P|$ имеют в своих контрольных точках следы, длина которых $\leqslant\sqrt{t(|P|)}$. Поэтому слова длины $|P|$ могут иметь в своих контрольных точках не более

$$\sqrt{t(|P|)}\cdot a^{1+\sqrt{t(|P|)}}\leqslant a^{2\sqrt{t(|P|)}}=2^{2\log_2 a\cdot\sqrt{t(|P|)}}$$

различных следов.

Пусть $\mathfrak{M}$ - некоторое множество слов длины 2λ, α - некоторый след, S_1, S_2, S_3 - некоторые числа, не превосходящие 2λ.

Обозначим через $\mathfrak{M}(\alpha, S_1, S_2, S_3)$ подмножество всех тех слов множества $\mathfrak{M}$, для которых:

а) след в контрольной точке этого слова равен α,

б) суммарное количество букв в кусках с четными номерами (при делении на куски относительно контрольной точки) равно S_1;

в) перд самым длинным из кусков с четными номерами (если таких несколько, то перед первым из них) в слове имеются ровно S_2 букв;

г) среди первых S_2 букв слова ровно S_3 принадлежат кускам с четными номерами.

Число слов во множестве $\mathfrak{M}$ обозначим через $|\mathfrak{M}|$.

ЛЕММА 2. (α, S_1, S_2, S_3) **можно зафиксировать так, что**

$$|\mathfrak{M}(\alpha, S_1, S_2, S_3)|\geqslant\frac{|\mathfrak{M}|}{2^{C_0\cdot\sqrt{t(2\lambda)}}},$$

где C_0 **- некоторая величина, зависящая лишь от параметров машины.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В контрольных точках слов длины 2λ может быть не более $2^{2\log_2 a\cdot\sqrt{t(2\lambda)}}$ различных следов. Каждый из параметров S_1, S_2, S_3 не превосходит 2λ. Следовательно, имеется $\leqslant 2^{2\log_2 a\cdot\sqrt{t(2\lambda)}}\cdot(2\lambda)^3\leqslant 2^{C_0\sqrt{t(2\lambda)}}$ четверок (α, S_1, S_2, S_3). Каждое слово из $\mathfrak{M}$ входит в некоторое $\mathfrak{M}(\alpha, S_1, S_2, S_3)$, отсюда следует утверждение леммы.

§ 2. Распознавание симметрии

В дальнейшем будем считать, что у нас зафиксирована некоторая машина, распознающая симметрию.

ЛЕММА 3. **Если на вход машины поданы разные слова, то в момент пода-**

чи последней буквы их конфигурации различны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть машина при подаче двух различных слов переходит в одинаковые конфигурации. Это значит, что машина не различает эти слова. Тогда можно так подобрать следующие буквы, что удлиненное слово будет симметричным при одном начальном слове и несимметричным при другом. Однако машина не будет знать, который из этих случаев имеет место.

Пусть $\mathfrak{M}$ - множество всех симметричных слов длины 2λ, а $\mathfrak{M}_{C_1}$ - подмножество $\mathfrak{M}$, содержащее те и только те слова P, у которых во время входа второй половины слова головка машины отходит правее контрольной точки на расстояние $\psi(P) \geqslant C_1 \cdot \sqrt{t(2\lambda)}$.

ЛЕММА 4. Число слов в $\mathfrak{M}_{C_1}$ не превосходит $2^{\lambda-(C_1-C_0)\sqrt{t(2\lambda)}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сперва, что при любой фиксации (α, S_1, S_2, S_3) у всех слов $\mathfrak{M}_{C_1}(\alpha, S_1, S_2, S_3)$ совпадают подслова длины $C_1 \cdot \sqrt{t(2\lambda)}$, начинающиеся (S_2+1) -ой буквой (ниже будем их называть C -подсловами).

Пусть $P_1, P_2 \in \mathfrak{M}_{C_1}(\alpha, S_1, S_2, S_3)$. Так как у P_1 и P_2 совпадают следы в их контрольных точках, можно построить составленное слово $P' = S'(P_1, P_2$; контр. точка 1, контр. точка 2).

Слово P' обладает следующими свойствами:

1) P' симметрично. (Согласно лемме о замещениях машина перерабатывает P' в единицу, ибо каждое из P_1, P_2 она перерабатывает в единицу).

2) P' имеет такую же длину 2λ, как и данные слова (суммарное количество букв из кусков с четными номерами совпадает у всех слов).

3) у P' и P_1 совпадают C - подслова (первая половина P' совпадает с первой половиной P_1, так как во время подачи букв первой половины слова P_1 головка находилась в исходной зоне, т.е. левее контрольной точки. Из симметричности P_1 и P' следует, что и вторые половины этих слов совпадают, в том числе совпадают и C -подслова).

4) C -подслова совпадают также у P' и P_2. (C -подслова по определению принадлежат кускам с четными номерами, притом в словах P_1 и P_2 перед C -подсловами находится одинаковое число букв из кусков с четными номерами).

Следовательно, C -подслова совпадают также у P_1 и P_2 и, значит, у всех слов из $\mathfrak{M}_{C_1}(\alpha, S_1, S_2, S_3)$. Из симметричности всех слов $\mathfrak{M}_{C_1}(\alpha, S_1, S_2, S_3)$ и совпадения C -подслов следует, что при любой фиксации (α, S_1, S_2, S_3)

$$|\mathfrak{M}_{C_1}(\alpha, S_1, S_2, S_3)| \leqslant 2^{\lambda - C_1\sqrt{t(2\lambda)}}.$$

По лемме 2 можно так зафиксировать (α, S_1, S_2, S_3), что

$$|\mathfrak{M}_{C_1}(\alpha, S_1, S_2, S_3)| \geqslant \frac{|\mathfrak{M}_{C_1}|}{2^{C_0\sqrt{t(2\lambda)}}}. \qquad (2)$$

Из (I) и (2) следует утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ. Можно так зафиксировать $C_1^{(0)}$, что

$$|\mathfrak{M}_{C_1^{(0)}}| = o\left(2^{\lambda - \sqrt{t(2\lambda)}}\right).$$

Глубиной ячейки исходной зоны назовем её расстояние от правого конца исходной зоны (см. рис. 3).

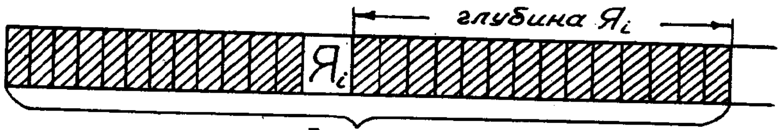

Рис. 3

Через $\mathfrak{M}^-$ обозначим множество всех тех симметричных входных слов P длины 2λ, для которых максимальная глубина ячеек, посещенных головкой во время подачи второй половины слова P:

$$\xi(P) < \frac{\lambda}{3\log_2 B}$$

(B - число букв в алфавите ленты, включая пустой знак).

Квантор $\exists^\infty x$ означает "существуют сколь угодно большие x". $\forall^\infty x$ означает "для всех достаточно больших x".

ЛЕММА 5. $\exists C_3 \forall^\infty \lambda [|\mathfrak{M}^-| \geqslant 2^{\lambda - \sqrt{t(2\lambda)}} \rightarrow t(2\lambda) > C_3\lambda^2]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ниже D -зоной слова будем называть зону, занимающую $\frac{\lambda}{3\log_2 B}$ самых правых ячеек исходной зоны этого слова, и ещё $(1+C_1^{(0)})\sqrt{t(2\lambda)}$ ячеек правее её (см. рис. 4).

Очевидно, различных конфигураций в D -зоне возможно $\leqslant 2^{\frac{\lambda}{3} + o(\lambda) + (1+C_1^{(0)})\sqrt{t(2\lambda)}}$.

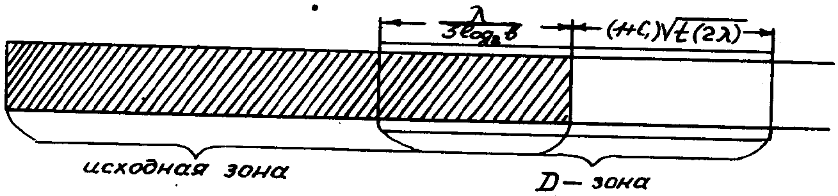

Рис. 4

Рассмотрим $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}^- \setminus \mathfrak{M}_{C_1^{(0)}}$.

$$|\mathfrak{M}^*| = |\mathfrak{M}^- \setminus \mathfrak{M}_{C_1^{(0)}}| \geqslant 2^{\lambda-\sqrt{t(2\lambda)}} - o(2^{\lambda-\sqrt{t(2\lambda)}}) = \mathcal{O}(2^{\lambda-\sqrt{t(2\lambda)}}). \quad (3)$$

(Здесь $\varphi(x)=\mathcal{O}(f(x))$ означает, что функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ имеют одинаковый порядок роста).

Пусть K_1 и K_2 – две конфигурации $\mathcal{D}$ -зоны. Обозначим через $\mathfrak{M}^*(K_1,K_2)$ множество всех слов из $\mathfrak{M}^*$, у которых конфигурация $\mathcal{D}$ -зоны в момент λ равна K_1, а в момент 2λ равна K_2.

Каждое слово из $\mathfrak{M}^*$ попадает в некоторое $\mathfrak{M}^*(K_1,K_2)$, поэтому можно зафиксировать K_1 и K_2 так, что

$$|\mathfrak{M}^*(K_1,K_2)| \geqslant \frac{|\mathfrak{M}^*|}{2^{\frac{2}{3}\lambda+o(\lambda)+2\cdot(1+C_1^{(0)})\sqrt{t(2\lambda)}}}. \quad (4)$$

Однако, если бы $\mathfrak{M}^*(K_1,K_2)$ содержало бы два разных слова P_1 и P_2, то слово, составленное из первой половины P_1 и второй половины P_2, имело бы в момент 2λ такую же конфигурацию, как P_1, что противоречит лемме 3.

Поэтому $$|\mathfrak{M}^*(K_1,K_2)| \leqslant 1$$

и $$|\mathfrak{M}^*| \leqslant 2^{\frac{2}{3}\lambda+o(\lambda)+2\cdot(1+C_1^{(0)})\sqrt{t(2\lambda)}}.$$

Сравнение этого с (3) дает $\sqrt{t(2\lambda)} \geqslant \frac{\lambda}{6(1+C_1^{(0)})} - o(\lambda)$, что и требовалось доказать.

Из леммы 5 непосредственно следует, что теорема (см.введение) верна, если $|\mathfrak{M}^-| \geqslant 2^{\lambda-\sqrt{t(2\lambda)}}$ для бесконечно многих λ. Остается доказать теорему для тех машин, у которых $\overset{\infty}{\forall} \lambda \; |\mathfrak{M}^-| < 2^{\lambda-\sqrt{t(2\lambda)}}$. В § 3 мы рассмотрим только слова специального вида и усилим леммы 4 и 5, формулируя их применительно к этим словам. Доказательства проводятся аналогично, только в подсчетах учитывается, что $\mathfrak{M}$ содержит не 2^λ слов, а существенно меньше. В § 4 мы завершим доказательство теоремы.

§ 3. Специальные слова

Специальным словом с параметрами

$$d; c; \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$$

назовем следующее слово из нулей и единиц:

Первые d букв $x_1 x_2 \ldots x_d$ произвольны – они составляют первый массив свободных букв. Следующие δ_1 букв называются связанными и подчиняются закону

$$x_{d+i} = x_{d-i+1} \qquad (i=1,2,\ldots \delta_1).$$

После массива связанных букв следуют $\left[\frac{d}{c}\right]$ свободных, т.е.произвольных, потом δ_2 связанных, т.е. подчиняющихся

$$x_{z+i} = x_{z-i+1} \qquad \left(\begin{array}{l} i = 1,2,\dots,\delta_2 \\ z = d+\delta_1+\left[\frac{d}{c}\right] \end{array} \right).$$

Потом следует снова $\left[\frac{d}{c}\right]$ свободных и δ_3 связанных букв и т.д. (см. рис. 5). Слово оканчивается массивом свободных букв.

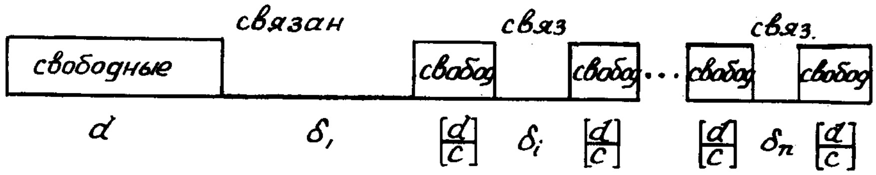

Рис. 5.

При этом требуется, чтобы любое δ_j было не больше общей длины всех предыдущих массивов.

Пусть P – специальное слово с параметрами $d; c; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Приведенной длиной слова P (обозначается $\|P\|$) называется число свободных букв в нем, т.е. $d+n\cdot\left[\frac{d}{c}\right]$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – множество всех симметричных слов длины 2λ, у которых первая половина – специальное слово, притом параметры $d; c; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ совпадают для первых половин всех слов из $\mathfrak{M}$. Приведенную длину $d+n\cdot\left[\frac{d}{c}\right]$ слов множества $\mathfrak{M}$ обозначим через ℓ.

Обозначим через $\mathfrak{M}_{c_1}$ подмножество $\mathfrak{M}$, содержащее те и только те слова, у которых во время подачи второй половины слова головка нашей фиксированной машины отходит правее контрольной точки слова на расстояние $\psi(P) \geq c_1\cdot\sqrt{t(2\lambda)}$.

ЛЕММА 4а. Число слов в $\mathfrak{M}_{c_1}$ не больше $2^{\ell-\left(\frac{c_1}{1+n}-c_0\right)\sqrt{t(2\lambda)}}$.

СЛЕДСТВИЕ. Можно так зафиксировать $c_1^{(n)}$, что $|\mathfrak{M}_{c_1^{(n)}}| = o\left(2^{\lambda-\sqrt{t(2\lambda)}}\right)$.

Через $\mathfrak{M}^-$ обозначим подмножество всех слов из $\mathfrak{M}$, для которых максимальная глубина ячеек, посещенных головкой во время подачи второй половины слова

$$\xi(P) < \frac{\ell}{3\log_2 6}.$$

ЛЕММА 5а. $\exists c_3 \, \forall n \, \forall c \, \forall^\infty d \, \forall \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \left[|\mathfrak{M}^-| \geq 2^{\ell-\sqrt{t(2\lambda)}} \longrightarrow t(2\lambda) > c_3\lambda^2 \right]$.

Выше были рассмотрены специальные слова, у которых параметр n принимает значения $1,2,3,\dots$. В дальнейшем, чтобы считать лемму 4 частным случаем леммы 4а и лемму 5 частным случаем леммы 5а , под специальным словом с параметром $n=0$ будем понимать произвольное слово (в алфавите $\{0,1\}$) длины d

§ 4. Нижняя оценка временной сигнализирующей функции

Обращенное слово слова P обозначим $\widetilde{P}$. Слово,образованное первыми δ буквами слова $\widetilde{P}$, обозначим $\widetilde{P}_\delta$.

ЛЕММА 6. $[\forall n \forall c \forall^\infty d \forall \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n (|m^-| < 2^{e-\sqrt{t(2\lambda)}})] \to$
$\to \exists C_4 \exists^\infty \tau \; (t(\tau) > C_4 \tau^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дано:

$$\forall n \forall c \forall^\infty d \forall \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n (|m^-| < 2^{e-\sqrt{t(2\lambda)}}). \qquad (5)$$

Возьмем $c = 3\log_2 b$ и рассмотрим конечное число разных n : $0,1,2,\ldots,6\log_2^2 b$. Пусть d_0 настолько велико, что при указанных n и c (5) истинно. Обозначим через R_0 множество всех слов длины d_0 в алфавите $\{0,1\}$.

Пусть R_0' будет подмножеством всех тех слов P из R_0, что

$$\xi(P\widetilde{P}) \geq \frac{d_0}{3\log_2 b},\ \psi(P\widetilde{P}) < c_1^{(0)}\sqrt{t(2d_0)}.$$

По лемме 4 и формуле (5)

$$|R_0'| \geq 2^{d_0} - 2 \cdot 2^{d_0 - \sqrt{t(2d_0)}}.$$

Отнесем к $R_0'(\delta)$ $(\delta = 1,2,\ldots,d_0)$ все те слова $P \in R_0'$, что в результате подачи $P\widetilde{P}_\delta$ головка заходит в исходную зону слова $P\widetilde{P}$*) на глубину $\geq \frac{d_0}{3\log_2 b}$.

Зафиксируем некоторое δ_1 так,чтобы

$$|R_0'(\delta_1)| \geq \frac{2^{d_0} - 2 \cdot 2^{d_0 - \sqrt{t(2d_0)}}}{d_0} \geq 2^{d_0 - 2\log_2 d_0}.$$

R_1 определим как множество всех слов вида $P\widetilde{P}_{\delta_1} Q$,где $P \in R_0'(\delta_1)$, а Q - произвольное слово (в алфавите $\{0,1\}$)длины $\frac{d_0}{3\log_2 b}$.

Для R_1 справедливы следующие утверждения:

1) все слова из R_1- специальные слова с одинаковыми параметрами $d_0; 3\log_2 b; \delta_1$ (и, следовательно, с одинаковой длиной $d_1 = d_0 + \delta_1 + \frac{d_0}{3\log_2 b}$);

2) $|R_1| \geq 2^{d_0 + \frac{d_0}{3\log_2 b} - 2\cdot\log_2 d_0}$;

3) пока подается любое слово из R_1, головка побывает не более чем на $L_1 = d_0 + c_1^{(0)}\sqrt{t(2d_0)}$ ячейках ленты.

Аналогичным способом из R_1 получим R_2. Для этого определя-

---

*) Т.е. в зону, где головка находилась, пока на вход подавалось слово P.

ем R как множество всех тех слов $S\in R_1$, что

$$\xi(S\tilde{S})\geq\frac{d_0}{3\log_2 B},\quad \psi(S\tilde{S})<C_1^{(1)}\cdot\sqrt{t(2d_1)}$$

По лемме 4а и формуле (5)

$$|R_1'|\geq 2^{d_0+\frac{d_0}{3\log_2 B}-2\log_2 d_0}-2\cdot 2^{d_0+\frac{d_0}{3\log_2 B}-\sqrt{t(2d_1)}}$$

Далее, к $R_1'(\delta)$ отнесем все те слова $S\in R_1'$, что в результате подачи $S\tilde{S}_\delta$ головка заходит в исходную зону слова $S\tilde{S}$ на глубину $\geq\frac{d_0}{3\log_2 B}$. Зафиксируем некоторое δ_2 так, чтобы

$$|R_1'(\delta_2)|\geq\frac{|R_1'|}{d_0+\delta_1+\frac{d_0}{3\log_2 B}}\geq 2^{d_0+\frac{d_0}{3\log_2 B}-4\log_2 d_0}.$$

Наконец, R_2 определим как множество всех слов вида $S\tilde{S}_{\delta_2}Q$, где $S\in R_1'(\delta_2)$, а Q – произвольное слово (в алфавите $\{0,1\}$) длины $\frac{d_0}{3\log_2 B}$.

При этом:

I) все слова из R_2 – специальные слова с одинаковыми параметрами d_0; $3\log_2 B$; δ_1,δ_2 (и, следовательно, с одинаковой длиной $d_2=d_1+\delta_2+\frac{d_0}{3\log_2 B}$);

2) $|R_2|\geq 2^{d_0+2\cdot\frac{d_0}{3\log_2 B}-4\log_2 d_0}$;

3) пока подается слово из R_2, головка побывает не более чем на

$$d_0+C_1^{(0)}\sqrt{t(2d_0)}+C_1^{(1)}\sqrt{t(2d_1)}\leq$$

$$\leq d_0+2\cdot\max_{i=1,2}C_1^{(i)}\cdot\max_{j=1,2}\sqrt{t(2d_j)}=L_2$$

ячейках ленты.

Аналогично построим множества $R_3,R_4,\ldots,R_N$, где $N=6\log_2^2 B$, попутно определяя $\delta_3,\delta_4,\ldots,\delta_N$ и $d_3,d_4,\ldots,d_N$, а также пользуясь $C_1^{(3)},C_1^{(4)},\ldots,C_1^{(N)}$.

R_N обладает аналогичными свойствами:

I) все слова из R_N – специальные слова с одинаковыми параметрами $d_0;3\log_2 B;\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_N$ (и, следовательно, с одинаковой длиной $d_N=d_{N-1}+\delta_N+\frac{d_0}{3\log_2 B}$);

2) $|R_N|\geq 2^{d_0+N\cdot\frac{d_0}{3\log_2 B}-2N\log_2 d_0}$;

3) пока подается любое слово из R_N, головка побывает не более чем на

$$L_N=d_0+N\cdot\max_{i=1,2,\ldots,N}C_1^{(i)}\cdot\max_{j=1,2,\ldots,N}\sqrt{t(2d_j)}$$

ячейках ленты.

Пусть максимум достигается при некоторых i и j. Так как конфигурации разных слов разные, число $\tau(L_N)$ конфигураций длины L_N не меньше числа слов в R_N :

$$2^{2\cdot(d_0+N\cdot C_1^{(i)}\sqrt{t(2d_j)})\cdot\log_2 b} > \tau(L_N) \geq |R_N| \geq 2^{d_0+N\cdot\frac{d_0}{3\log_2 b}-2N\log_2 d_0}.$$

Отсюда

$$\sqrt{t(2d_j)} > \frac{d_0}{2N\cdot C_1^{(i)}\log_2 b} - \frac{\log_2 d_0}{C_1^{(i)}\cdot\log_2 b}.$$

Так как d_0 можно было взять сколь угодно большим и $d_0 < d_1 < \dots < d_N < d_0\cdot 2^{1+N}$, заключаем, что при некотором C_4 у нашей машины $t(\tau) > C_4\,\tau^2$ для бесконечного числа разных τ, что и требовалось доказать.

Из лемм 5а и 6 теорема вытекает непосредственно.

В заключение автор выражает благодарность Б.А.Трахтенброту и Я.М.Барздиню.

Поступила в редакцию
II.XII.1964 г.

Литература

1. Трахтенброт Б.А. Тьюринговы вычисления с логарифмическим замедлением. Алгебра и логика. Семинар., 3, № 4 (1964), 33-48.

2. Цейтин Г.С. Оценка числа шагов в нормальных алгорифмах в связи с передачей информации внутри слова. Доклад на IУ Всесоюзном математическом съезде, 1961 г. Новосибирск.

3. Mc.Naughton R. The theory of automata, a survey. Advances in Computers. Vol. 2. pp. 379-421, Academic Press, New York - London, 1961.