



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. V. Skrypnik,
Solvability of boundary-value problems for non-
divergent nonlinear elliptic equations, *Zap. Nauchn.*
Sem. LOMI, 1979, Volume 84, 243–251

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that
you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

February 10, 2025, 09:55:44



РАЗРЕШИМОСТЬ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕДИВЕРГЕНТНЫХ
НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Применение топологических методов Лере-Шаудера [1] к исследованию разрешимости нелинейных эллиптических задач требует предварительного сведения граничных задач к операторному уравнению вида $u + Tu = 0$ с вполне непрерывным оператором T . Подобное сведение затруднительно в случае задачи Дирихле для общего нелинейного уравнения (см. [2]) и особенно сложно в случае задач с нелинейными граничными условиями. В монографии [3] показано, что стандартное сведение в случае нелинейной задачи Неймана приводит к операторному уравнению $u + Fu = 0$ с непрерывным, но, вообще говоря, некомпактным оператором F . И поэтому для сведения задач к уравнению с вполне непрерывным оператором требуются дополнительные построения, связанные с изучением некоторых вспомогательных задач.

В данной работе вводятся топологические характеристики общих нелинейных эллиптических граничных задач, основанные на введенном в монографии автора [4] вращении векторных полей. Введение этих характеристик не требует никаких дополнительных построений и не требует предварительного сведения граничных задач к операторному уравнению вида $u + Tu = 0$ с вполне непрерывным оператором T . Введенные характеристики позволяют исследовать разрешимость граничных задач и ветвление решений задач с параметром.

I. Далее Ω - ограниченная область в R^n с бесконечно дифференцируемой границей $\partial\Omega$, $n_0 = [\frac{n}{2}] + 1$, m, m_1, \dots, m_m - неотрицательные целые числа, $m > 0$, $m_j < 2m$, $M(q)$ - число различных мультииндексов с n компонентами длины не большей, чем q .

Пусть функции $\mathcal{F}: \bar{\Omega} \times R^{M(2m)} \rightarrow R^1, G_j: \bar{\Omega} \times R^{M(m_j)} \rightarrow R^1, j=1, \dots, m$ принадлежат соответственно пространствам $C^{l+1}, C^{l+2m-m_j+1}, l \geq n_0$ и удовлетворяют при некотором $\delta, 0 < \delta < \frac{1}{2}$ условиям:

I) для произвольной функции $v(x) \in C^{2m, \delta}(\bar{\Omega})$ оператор

$$U_v: H^{2m}(\Omega) \rightarrow H^{2m}(\Omega, \partial\Omega) = L_2(\Omega) \times H^{2m-m_1-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times \dots \times H^{2m-m_m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

$$U_v(u) = (L_v u, B_{1,v} u, \dots, B_{m,v} u), \quad (I)$$

$$L_v u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} F_\alpha(x, v, \dots, \mathcal{D}^{2m} v) \mathcal{D}^\alpha u, \quad B_{j,v} u = \sum_{|\beta| \leq m_j} G_{j,\beta}(x, v, \dots, \mathcal{D}^{m_j} v) \mathcal{D}^\beta u \Big|_{x \in \partial \Omega}$$

эллиптически и фредгольмов (см. [5]);

2) существует функция $H: \bar{\Omega} \times R^{M(2m-1)} \rightarrow R^1$ класса C^l такая, что при произвольной функции $v \in C^{2m, \delta}(\bar{\Omega})$ задача

$$L_v u + M_v u = 0, \quad x \in \Omega, \quad B_{j,v} u = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad x \in \partial \Omega \quad (2)$$

имеет только нулевое решение в $C^{2m, \delta}(\bar{\Omega})$. Здесь

$$M_v u = \sum_{|\gamma| \leq 2m-1} H_\gamma(x, v, \dots, \mathcal{D}^{2m-1} v) \mathcal{D}^\gamma u.$$

В 1), 2) использованы следующие обозначения:

$$F_\alpha(x, \xi) = \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi_\alpha}, \quad G_{j,\beta}(x, \eta_j) = \frac{\partial G_j(x, \eta_j)}{\partial \eta_{j,\beta}}, \quad H_\gamma(x, \xi) = \frac{\partial H(x, \xi)}{\partial \xi_\gamma},$$

$H^s(\Omega) = W_2^s(\Omega)$ - пространство Соболева, $\mathcal{D}^k u = \{\mathcal{D}^\alpha u : |\alpha| = k\}$,

$$\mathcal{D}^\alpha u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} u, \quad \text{если } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Пусть \mathcal{D} - произвольная ограниченная область в пространстве $H^{l+2m}(\Omega)$ с границей $\partial \mathcal{D}$; $f(x)$, $g_j(x)$ - фиксированные элементы пространств $H^l(\Omega)$, $H^{l+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\partial \Omega)$ и предположим, что граничная задача

$$F(x, u, \dots, \mathcal{D}^{2m} u) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$G_j(x, u, \dots, \mathcal{D}^{m_j} u) = g_j(x), \quad x \in \partial \Omega, \quad j = 1, \dots, m \quad (3)$$

не имеет решений, принадлежащих $\partial \mathcal{D}$.

Определим нелинейный оператор $A: \bar{\mathcal{D}} \rightarrow [H^{l+2m}(\Omega)]^*$ равенством

$$\langle Au, \varphi \rangle = (F(x, u, \dots, D^{2m} u) - f(x), L_u \varphi + M_u \varphi)_{\ell, \Omega} + \sum_{j=1}^m (G_j(x, u, \dots, D^{m_j} u) - g_j(x), B_{j,u} \varphi)_{\ell+2m-m_j-\frac{1}{2}, \partial\Omega}, \quad (4)$$

где $(\cdot, \cdot)_{\ell, \Omega}$, $(\cdot, \cdot)_{s, 2\Omega}$ - соответственно скалярные произведения в пространствах $H^{\ell}(\Omega)$, $H^s(\partial\Omega)$.

Здесь и далее для произвольного банахова пространства X через X^* обозначено сопряженное к X пространство, для элементов $h \in X^*$, $\varphi \in X$ через $\langle h, \varphi \rangle$ обозначено действие функции h на элементе φ .

Для дальнейшего существенное значение имеют два следующих определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть \mathcal{D} - произвольная область банахова пространства X и $A: \mathcal{D} \rightarrow X^*$ - нелинейный оператор. Говорим, что оператор A удовлетворяет в \mathcal{D} условию α) (см. [4]), если для произвольной последовательности $u_n \in \mathcal{D}$, слабо сходящейся к u_0 в X из $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u_0 \rangle \leq 0$ следует сильная сходимость u_n к u_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [6]. В условиях определения 1 говорим, что оператор $A: \mathcal{D} \rightarrow X^*$ удовлетворяет условию α_0), если для произвольной последовательности $u_n \in \mathcal{D}$, слабо сходящейся к u_0 , из $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u_0 \rangle \leq 0$ и слабой сходимости Au_n к нулю следует сильная сходимость u_n и u_0 .

ТЕОРЕМА 1. Определенный равенством (4) оператор $A: \overline{\mathcal{D}} \rightarrow [H^{\ell+2m}(\Omega)]^*$ непрерывен, ограничен и удовлетворяет условию α).

Выше предполагалось, что задача (3) не имеет решений, принадлежащих $\partial\mathcal{D}$. Отсюда, в силу условий 1), 2) получаем, что $Au \neq 0$ при $u \in \partial\mathcal{D}$. Из теоремы 1 и работы [4] следует, что определено вращение векторного поля Au на $\partial\mathcal{D}$, которое и будет приниматься в качестве топологической характеристики задачи (3).

Пусть $\mathcal{U}: H^{\ell+2m}(\Omega) \rightarrow H^{\ell+2m}(\Omega, \partial\Omega)$ - нелинейный оператор, определяемый равенством

$$\mathcal{U}(u) = (\mathcal{F}(x, u), \dots, \mathcal{D}^{2m} u) - f(x), G_j(x, u, \dots, \mathcal{D}^{m_j} u) - g_j(x) \Big|_{x \in \partial \Omega}$$

$$H^{\ell+2m}(\Omega, \partial \Omega) = H^{\ell}(\Omega) \times H^{\ell+2m-m_1-\frac{1}{2}}(\partial \Omega) \times \dots \times H^{\ell+2m-m_m-\frac{1}{2}}(\partial \Omega).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Вращением $\gamma(\mathcal{U}(u), \partial \Omega)$ векторного поля $\mathcal{U}(u)$ на $\partial \Omega$ называется вращение на $\partial \Omega$ векторного поля Au .

2. Вращение поля $\mathcal{U}(u)$ является гомотопическим инвариантом и обладает всеми обычными свойствами вращения, что непосредственно следует из [4]. В частности, справедлив

Принцип ненулевого вращения. Для того, чтобы задача (3) имела решение в области Ω достаточно, чтобы вращение поля $\mathcal{U}(u)$ на $\partial \Omega$ было отличным от нуля.

Дословно переносятся на $\gamma(\mathcal{U}(u), \partial \Omega)$ достаточные признаки отличия от нуля вращения, формула индекса критической точки.

Ограничимся формулировкой только одного из возможных следствий - условной теоремы существования.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\tilde{\mathcal{F}}: [0, 1] \times \bar{\Omega} \times R^{M(2m)} \rightarrow R^1, \tilde{G}_j: [0, 1] \times \bar{\Omega} \times R^{M(m_j)} \rightarrow R^1, j = 1, \dots, m$ - непрерывные отображения. Предположим, что при каждом $t \in [0, 1]$ функции $\mathcal{F}_t(x, \xi) = \tilde{\mathcal{F}}(t, x, \xi), G_{j,t}(x, \xi_j) = \tilde{G}_j(t, x, \xi_j)$ удовлетворяют всем предположениям п. I и выполнены условия:

а) существует положительная постоянная K такая, что для $t \in [0, 1], u \in H^{\ell+2m}(\Omega)$ из

$$\mathcal{F}_t(x, u, \dots, \mathcal{D}^{2m} u) = t f(x), G_{j,t}(x, u, \dots, \mathcal{D}^{m_j} u) \Big|_{\partial \Omega} = t g_j(x), \quad j = 1, \dots, m$$

следует $\|u\|_{\ell+2m} \leq K$

$$б) \mathcal{F}_0(x, -\xi) = -\mathcal{F}_0(x, \xi), G_{j,0}(x, -\eta_j) = -G_{j,0}(x, \eta_j).$$

Тогда задача

$$F_j(x, u, \dots, D^{2m} u) = f(x), G_{j,1}(x, u, \dots, D^{m_j} u) \Big|_{\partial\Omega} = g_j(x), \quad j=1, \dots, m$$

имеет, по крайней мере, одно решение в $H^{\ell+2m}(\Omega)$.

Отметим, что в этой и следующих теоремах получаемые решения являются классическими в силу вложения соболевских пространств в гельдеровские при рассматриваемых значениях параметров.

3. Ограничимся несколькими замечаниями, касающимися определения вращения в более общих условиях, чем в п.1, а также более простого определения вспомогательного оператора A в случае граничных данных Дирихле.

В п.1 было определено вращение векторного поля $U(u)$ на $\partial\Omega \in H^{\ell+2m}(\Omega)$ при $\ell \gg n_0$, что требовало высокой гладкости функций $F(x, \xi)$, $G_j(x, \eta_j)$. Можно уменьшить условия гладкости функций F, G_j , считая их соответственно принадлежащими пространствам $C^{\ell, \delta}, C^{\ell+2m-m_j}$, путем введения в рассмотрение соответствующего векторного поля в пространстве $W_p^{2m+1}(\Omega), p \gg n$.

В [6] определяется вращение векторного поля в случае операторов, удовлетворяющих условию L_0). Это позволяет повторить все предыдущие рассуждения, если оператор U_ν эллиптивен и фредгольмов не для всех $\nu \in C^{2m, \delta}(\bar{\Omega})$, а только для функций $\nu(x)$, являющихся решениями задачи (3).

Введенное выше вращение векторного поля определяется конструкцией отображения A и при конкретном вычислении вращений желательнее иметь по возможности более простое представление для соответствующих отображений. Используя доказанное в [7] неравенство коэрцитивности для пар линейных эллиптических операторов, можно ввести топологическую характеристику нелинейной задачи Дирихле более простым способом (см. [8]).

4. Укажем применение развитого выше метода к доказательству разрешимости нелинейных граничных задач. В данном пункте устанавливается существование регулярных вплоть до границы области решений задачи Дирихле для уравнений Монжа-Ампера и некоторых их обобщений. Эти результаты получены совместно с аспирантом А.Е.Шиковым.

Пусть K - круг радиуса R с центром в начале координат с границей ∂K . Рассмотрим в K задачу Дирихле

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = \varphi(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}), \quad (x, y) \in K \quad (5)$$

$$u|_{\partial K} = g(x, y). \quad (6)$$

Предполагается, что $g(x, y) \in C^{4, \lambda}(\partial K)$, $\varphi(x, y, u, p, q)$ - положительная функция класса $C^{2, \lambda}(G)$, $0 < \lambda < 1$, $G = \{x, y, u, p, q : (x, y) \in \bar{K}, u, p, q \in \mathbb{R}^1\}$, удовлетворяющая условиям:

$$а) \varphi(x, y, u, p, q) < \Phi(x^2 + y^2) f(p^2 + q^2), \text{ если } u \leq m = \max_{(x, y) \in \partial K} g(x, y)$$

$$в) \iint_K \Phi(x^2 + y^2) dx dy < \iint_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \inf_{(\xi, \eta)^2 < M_H} f^{-1}(\xi^2 + \eta^2) d\xi d\eta,$$

где M_H - нижнее изгибание кривой, определяемой условием (6) (определение изгиба см. в [9]).

Существование регулярного в замкнутой области \bar{K} решения задачи (5), (6) доказано в работе [9] методом Ньютона-Канторовича при условиях а), в) и дополнительном предположении:

$$\frac{\partial}{\partial u} \varphi(x, y, u, p, q) \geq 0. \quad (7)$$

В настоящей работе устанавливается существование регулярно в K решения задачи (5), (6) без предположения (7). Отметим, что в работах [9, 10] доказывалось существование обобщенного решения задачи (5), (6) без предположения (7). Однако регулярность обобщенного решения доказывается в [9, 10] только для внутренних точек K .

Обозначим через $H_4^+(K)$ совокупность функций, принадлежащих $W_2^4(K)$ и удовлетворяющих условиям:

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 > 0, \quad u_{xx} > 0, \quad (x, y) \in \bar{K}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $g(x, y) \in C^{4, \lambda}(\partial K)$, $\varphi(x, y, u, p, q) \in C^{2, \lambda}(G)$ и выполнены условия а), в). Тогда задача (5), (6) имеет решение в $H_4^+(K)$.

При доказательстве теоремы задача (5)-(6) включается в параметрическое семейство задач

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = t\varphi(x, y, u, u_x, u_y) + (1-t)\Phi(x^2 + y^2)f(|\nabla u|^2), \quad (x, y) \in K.$$

$$u|_{\partial K} = tg(x, y), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Приложение развитого выше топологического метода основано на имеющихся в [9] априорных оценках решений уравнения Монжа-Ампера.

Установлена также разрешимость задачи Дирихле

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 - [Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + D] = 0, \quad (x, y) \in K \quad (8)$$

$$u|_{\partial K} = 0, \quad (9)$$

где A, B, C, D - функции x, y, u, u_x, u_y класса C^2 . Предполагается выполненным условие сильной эллиптичности уравнения (8), которое, как известно, обеспечивается неравенствами

$$AC - B^2 > 0, \quad D > 0, \quad A > 0$$

при $(x, y) \in K$, всевозможных значениях u, u_x, u_y . Существование обобщенных решений задачи (8), (9) при определенных ограничениях на коэффициенты уравнения (8) и их регулярность внутри K доказана в [10]. Нами же установлено существование решения из $W_2^4(K)$, т.е. гладкого вплоть до границы K .

В отличие от задачи (5), (6), существование решения которой было основано на известных априорных оценках, при изучении задачи (8), (9) основное внимание было посвящено получению оценок решений. Были установлены априорные оценки в $W_2^4(K)$ решений некоторой параметрической задачи, а затем применен топологический подход для доказательства теоремы существования. При этом нет условия на знак производной D_u .

Ограничимся только формулировкой условия ограниченности первых производных задачи (8), (9).

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия:

- $A(x, y, u, p, q), C(x, y, u, p, q), |B(x, y, u, p, q)| < \psi_1(p^2 + q^2)$;
- $D(x, y, u, p, q) < \psi(x^2 + y^2) \psi_2(p^2 + q^2)$;
- функция $\psi_1(t) \cdot \psi_2^{-1}(t)$ не возрастает;
- $\int_0^R \int_0^R \psi(r^2) dr + R \int_0^\infty \frac{\psi_1(t^2)}{\psi_2(t^2)} dt < \frac{1}{\tau} \int_0^\infty \frac{dt}{\psi_2(t^2)}$.

Тогда существует такая постоянная C_0 , что для решений задачи (8), (9), принадлежащей $C^2(K)$, выполнена априорная оценка

$$\|u\|_{C^1(\bar{K})} \leq C_0.$$

5. В этом пункте устанавливается разрешимость задачи Дирихле для общего нелинейного эллиптического уравнения в узкой полосе.

Далее $\{\Omega_h, 0 \leq h \leq 1\}$ - семейство областей класса C^∞ таких, что

а) $\Omega_{h_1} \subset \Omega_{h_2}$ при $h_1 < h_2$;

в) существуют открытое покрытие $\{U_i, i=1, \dots, I\}$ множества $\bar{\Omega}_1$ и диффеоморфизмы $\varphi_i: U_i \cap \bar{\Omega}_1 \rightarrow R^n$ класса C^∞ , при которых $\varphi_i(U_i \cap \bar{\Omega}_h) = S_h = \{y \in R^n: |y'| \leq 1, 0 \leq y_n \leq h, y' = (y_1, \dots, y_{n-1})\}$.

Пусть $\{\varphi_i(x)\}$, $i=1, \dots, I$ - подчиненное покрытие $\{U_i\}$ разбиение единицы.

Обозначим через $W_p^{2m, l, k}(\Omega_h)$ замыкание множества бесконечно дифференцируемых в Ω_h функций по норме

$$\|u\|_p^{2m, l, k}(\Omega_h) = \sum_{i=1}^I \sum_{|\alpha| \leq 2m} \int_{S_h} \left\{ \sum_{\tau=0}^k |D_n^\tau D^\alpha v_i(y)|^p + \sum_{|\beta| \leq l} |D^\beta v_i(y)|^p \right\} dy,$$

где $v_i(y) = \varphi_i(\varphi_i^{-1}(y)) \cdot u(\varphi_i^{-1}(y))$, \sum' обозначает суммирование по всем тем мультииндексам, последняя координата которых равна нулю.

Изучается разрешимость в $W_2^{2m, l, 1}(\Omega_h)$, $l \geq n+1$, граничной задачи

$$F(x, u, \dots, D^{2m} u) = 0, \quad x \in \Omega_h \quad (I0)$$

$$D^\alpha u = 0, \quad x \in \partial\Omega_h, \quad |\alpha| \leq m-1 \quad (II)$$

в предположении, что $F(x, \xi) \in C^l(\bar{\Omega}_1 \times R^{M(2m)})$ и с некоторой положительной постоянной A при $x \in \bar{\Omega}_1$, $\xi \in R^{M(2m)}$, $\eta \in R^n$ выполнено неравенство

$$\sum_{|\alpha|=2m} \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi_\alpha} \eta^\alpha \geq A |\eta|^{2m}.$$

В этих условиях справедлива

ТЕОРЕМА 5. Существует $h_0 > 0$ такое, что задача (I0), (II) имеет в $W_2^{2m, l, 1}(\Omega_h)$, решение при $h \leq h_0$.

При доказательстве задача (I0), (II) включается в семейство задач

$$t\mathcal{F}(x, u, \dots, \mathcal{D}^{2m} u) + (1-t)(-\Delta)^m u = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x \in \Omega_h \quad (I_2)$$

$$\mathcal{D}^\alpha u = 0, \quad x \in \partial\Omega_h, \quad |\alpha| \leq m-1 \quad (I_3)$$

и устанавливается для всевозможных решений задачи (I₂), (I₃) априорная оценка в $W_2^{2m, l, 1}(\Omega_h)$. Отсюда следует утверждение теоремы 5 в силу пунктов I-3.

Анализ зависимости постоянной h_0 от данных задачи показывает, что условие малости h_0 не означает малости меры Ω_h и разрешимость задачи (I₀), (I₁) в условиях теоремы 5 может иметь место в области произвольной меры.

6. В заключение отметим, что развитым выше подходом установлены также теоремы существования решения нелинейной задачи Неймана для эллиптических уравнений второго порядка.

Литература

1. Д е р е Ж., Ш а у д е р Ю. Топология и функциональные уравнения. - УМН, 1946, № 3-4, с. 71-95.
2. B r o w d e r Ф.Е. Topological methods for non-linear elliptic equations of arbitrary order. - Pacif. J. Math., 1966, 17, № 1, p. 17-31.
3. Л а д ы ж е н с к а я О.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Линейные уравнения эллиптического порядка. М., "Наука", 1973.
4. С к р ы п н и к И.В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев, "Наукова думка", 1973.
5. А г р а н о в и ч М.С. Эллиптические интегро-дифференциальные операторы. - УМН, 1965, XX, № 5, с. 3-120.
6. С к р ы п н и к И.В. Разрешимость и свойства решений нелинейных эллиптических уравнений. - В сб.: "Современные проблемы математики", М., 1976, изд. ВИНТИ, с. 131-254.
7. С к р ы п н и к И.В. О неравенстве коэрцитивности для пар линейных эллиптических операторов. - ДАН СССР, 1978, 239, № 2, с. 275-278.
8. С к р ы п н и к И.В. О топологической характеристике общих нелинейных эллиптических операторов. - ДАН СССР, 1978, 239, № 3, с. 538-541.
9. Б а к е л ь м а н И.Я. Геометрические методы решения эллиптических уравнений. М., "Наука", 1965.
10. П о г о р е л о в А.В. Об уравнениях Монжа-Ампера эллиптического типа. Изд-во Харьков. ун-та, 1960.