



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Лукацкий, О системе образующих в группе диффеоморфизмов n -мерного тора, *Матем. заметки*, 1979, том 26, выпуск 1, 27–34

<https://www.mathnet.ru/mzm6835>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.170

22 мая 2025 г., 16:10:02



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 [1979]

О СИСТЕМЕ ОБРАЗУЮЩИХ В ГРУППЕ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ n -МЕРНОГО ТОРА

А. М. Лукацкий

Рассмотрим n -мерный тор T^n . Обозначим через $D(T^n)$ группу всех C^∞ -дiffeоморфизмов T^n с равномерной C^∞ -топологией и через $D_0(T^n)$ — связную компоненту единицы в $D(T^n)$.

В заметке строится базис из двух элементов в топологической группе $D_0(T^n)$. (Конечный набор элементов в топологической группе называется базисом, если эти элементы порождают свободную всюду плотную подгруппу. См. [1].)

Введем на T^n стандартные координаты $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (φ_j берутся по модулю 2π). Пусть $V(T^n)$ — алгебра Ли C^∞ -векторных полей на T^n с C^∞ -топологией.

Положим $a_i = d/d\varphi_i$. Элементы a_1, \dots, a_n натягивают подалгебру \mathfrak{t}^n , соответствующую действию T^n на себе сдвигами.

Обозначим через $S_n \subset V(T^n)$ подалгебру, состоящую из векторных полей вида $\sum_j P_j(\varphi_1, \dots, \varphi_n) a_j$, где P_j — тригонометрические полиномы от $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Положим $S_n^C = S_n + iS_n = \{\sum_j Q_j a_j\}$, где Q_j — линейные комбинации функций вида $e^{i(k, \varphi)}$ (здесь $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $k \in \mathbb{Z}^n$).

Для дальнейшего полезно построить конечные системы образующих в алгебрах Ли S_n и S_n^C .

ЛЕММА 1. Алгебра Ли S_n^C порождается элементами

$$e^{\pm i\varphi_k} a_l, e^{\pm 2i\varphi_k} a_l, a_l \quad (1 \leq k, l \leq n).$$

Доказательство. Обозначим через \mathfrak{h}_n алгебру Ли, порожденную полями, указанными в условии леммы.

Будем вести индукцию по n . Пусть $n = 1$. Заметим, что

$$[e^{\pm i\varphi_1 a_1}, e^{\pm i k_1 \varphi_1 a_1}] = \pm i (k_1 - 1) e^{\pm (k_1+1)\varphi_1 a_1}.$$

Отсюда легко следует, что $\mathfrak{h}_1 = S_1^C$.

Пусть наше утверждение верно для T^k ($1 \leq k < n$). Рассмотрим T^n . Возьмем поле $w = e^{i k \varphi_j a_j}$ и покажем, что $w \in \mathfrak{h}_n$. Пусть для определенности $j = n$. Введем $w' = e^{i k' \varphi a_n}$, где $\vec{k}' = (0, k_2, \dots, k_n)$. Так как w' зависит только от $(\varphi_2, \dots, \varphi_n)$, то $w' \in S_{n-1}^C \subset S_n^C$ и по индукции $w' \in \mathfrak{h}_{n-1} \subset \mathfrak{h}_n$.

Разберем далее два случая. 1. $k_n \neq 0$. Тогда $w = (1/(i k_n)) [e^{i k_1 \varphi_1 a_n}, w']$. Так как

$$e^{i k_1 \varphi_1 a_n} = (1/i) [e^{i(k_1-1)\varphi_1 a_1}, e^{i\varphi_1 a_n}],$$

то $e^{i k_1 \varphi_1 a_n} \in \mathfrak{h}_n$, а значит, и $w \in \mathfrak{h}_n$.

2. $k_n = 0$. Рассмотрим поле $w'' = e^{i\varphi_n w}$. Из предыдущего $w'' \in \mathfrak{h}_n$. Так как $w = (1/(2i)) [e^{-i\varphi_n a_n}, w'']$, то $w \in \mathfrak{h}_n$. Лемма доказана.

Введем векторные поля

$$u = \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) (a_1 + \dots + a_n),$$

$$v = \sin \varphi_1 a_1 + \dots + \sin \varphi_n a_n$$

и диффеоморфизмы $\alpha = \exp u$, $\beta = \exp v$, $f = \exp(\sum_{i=1}^n 2^{i/n} a_i)$ (здесь $\exp: V(T^n) \rightarrow D_0(T^n)$ — лиев экспоненциал).

Заметим, что

$$f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = (\varphi_1 + 2^{1/n}, \dots, \varphi_i + 2^{i/n}, \dots, \varphi_n + 2).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 2$. Векторные поля a_1, \dots, a_n , u , v порождают алгебру Ли S_n и топологическую алгебру Ли $V(T^n)$. Диффеоморфизмы f , α , β порождают топологическую группу $D_0(T^n)$.

Доказательство. Обозначим через \mathfrak{g}_n алгебру Ли, порожденную векторными полями a_1, \dots, a_n , u , v , и положим $\mathfrak{g}_n^C = \mathfrak{g}_n + i\mathfrak{g}_n$. Легко проверить, что

$$\mathfrak{g}_n^C \ni e^{\pm i\varphi_k a_k} \quad (k = 1, \dots, n),$$

$$\mathfrak{g}_n^C \ni e^{\pm i(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)} (a_1 + \dots + a_n).$$

Далее,

$$\mathfrak{g}_n^C \ni \frac{1}{2} [e^{i\varphi_j} a_j [e^{-i\varphi_j} a_j, e^{i(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)} (a_1 + \dots + a_n)]] = e^{i(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)} a_j.$$

Индукцией по n покажем, что $\mathfrak{g}^C = S_n^C$. Пусть $n = 2$. Тогда

$$\mathfrak{g}_2^C \ni [e^{\pm i(\varphi_1 + \varphi_2)} a_2, e^{\mp i\varphi_2} a_2] = \mp 2ie^{\pm i\varphi_1} a_2,$$

аналогично, $\mathfrak{g}_2^C \ni e^{\pm i\varphi_2} a_1$. Кроме того,

$$[[e^{\pm i(\varphi_1 + \varphi_2)} a_2, e^{\pm i\varphi_1} a_1] e^{\mp i\varphi_2} a_1] = -e^{\pm 2i\varphi_1} a_1 - 2e^{\pm 2i\varphi_1} a_2,$$

поэтому $\mathfrak{g}_2^C \ni e^{\pm i\varphi_1} a_1$ и, аналогично, $\mathfrak{g}_2^C \ni e^{\pm 2i\varphi_2} a_2$. Из леммы 1 $\mathfrak{g}_2^C = S_2^C$. Пусть $n > 2$. Фиксируем k : $1 \leq k \leq n$. Имеем

$$\mathfrak{g}_n^C \ni [\mp i e^{\mp i\varphi_k} a_k, e^{\pm i(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)} a_l] = e^{\pm i(\varphi_1 + \dots + \hat{\varphi}_k + \dots + \varphi_n)} a_l \quad (l \neq k).$$

Отсюда по индукции

$$\mathfrak{g}_n^C \supset S_{n-1}^C = \left\{ \sum_{j \neq k} Q_j a_j \mid Q_j (\varphi_1, \dots, \hat{\varphi}_k, \dots, \varphi_n) \right\}.$$

В силу произвольности k , \mathfrak{g}_n^C содержит поля из условия леммы 1, поэтому $\mathfrak{g}_n^C = S_n^C$, а, значит, $\mathfrak{g}_n = S_n$. Утверждение о $V(\mathbb{T}^n)$ вытекает из того, что $V(\mathbb{T}^n) = (\overline{S_n})_{C^\infty}$.

Используя [2] и [3], получаем, что потоки векторных полей a_1, \dots, a_n, u, v порождают топологическую группу $D_0(\mathbb{T}^n)$.

Далее заметим, что элементы f, β порождают в $D_0(\mathbb{T}^n)$ подгруппу G с алгеброй Ли $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}(2)^n$, натянутой полями $a_i, \cos \varphi_i a_i, \sin \varphi_i a_i$ ($i = 1, \dots, n$); легко проверить, что $G \cong \text{PSL}(2)^n = (\text{SL}(2)/\{\pm 1\})^n$, а замкнутая подгруппа, порожденная элементами f, α , содержит подгруппу H с алгеброй Ли $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{sl}(2)$, натянутой полями

$$a_1 + \dots + a_n, \cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)(a_1 + \dots + a_n), \\ \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)(a_1 + \dots + a_n),$$

причем $H \cong \widetilde{\text{SL}}(2)/\Gamma$, где $\widetilde{\text{SL}}(2)$ — односвязная накрывающая группы $\text{SL}(2)$, а Γ — дискретный нормальный делитель. В частности, замкнутая подгруппа, порожденная

элементами f, α, β , содержит потоки векторных полей a_1, \dots, a_n, u, v , что завершает доказательство теоремы.

Для дальнейшего полезно пояснить, как действуют группы G и H на \mathbf{T}^n . Выберем базис в алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $G_i \cong G$ подгруппу с алгеброй Ли

$$\mathfrak{g}_i = L \{a_i, \cos \varphi_i a_i, \sin \varphi_i a_i\}.$$

Действие группы G_i на \mathbf{T}^n определяется изоморфизмом алгебр Ли $p_i: \mathfrak{sl}(2) \rightarrow \mathfrak{g}_i$, заданным

$$p_i(\alpha) = 2a_i, \quad p_i(X) = 2 \sin \varphi_i a_i, \quad p_i(Y) = 2 \cos \varphi_i a_i,$$

продолжаемым до гомоморфизма $P_i: \mathrm{SL}(2) \rightarrow D_0(\mathbf{T}^n)$, причем имеем $\mathrm{Ker} P_i = \{\pm 1\}$, откуда

$$G_i \cong \mathrm{SL}(2)/\{\pm 1\} = \mathrm{PSL}(2).$$

Пусть \mathfrak{h} — алгебра Ли подгруппы H ; введем изоморфизм:

$$q(\alpha) = (2/n)(a_1 + \dots + a_n),$$

$$q(X) = (2/n) \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)(a_1 + \dots + a_n),$$

$$q(Y) = (2/n) \cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)(a_1 + \dots + a_n).$$

Обозначим через l алгебру Ли группы $\widetilde{\mathrm{SL}}(2)$, а через $\psi: l \rightarrow \mathfrak{sl}(2)$ — изоморфизм алгебр Ли, определяемый накрытием $\Psi: \widetilde{\mathrm{SL}}(2) \rightarrow \mathrm{SL}(2)$. Действие группы H на \mathbf{T}^n определяется изоморфизмом $p: l \rightarrow \mathfrak{h}$, $p = q\psi$, продолжаемым до гомоморфизма $P: \widetilde{\mathrm{SL}}(2) \rightarrow H$, причем $H \cong \cong \widetilde{\mathrm{SL}}(2)/\Gamma$, где $\Gamma = \mathrm{Ker} P \subset Z(\widetilde{\mathrm{SL}}(2))$.

С л е д с т в и е. *Топологическая группа $D_0(\mathbf{T}^n)$ порождается двумя подгруппами $G \cong \mathrm{PSL}(2)^n$ и $H \cong \cong \widetilde{\mathrm{SL}}(2)/\Gamma$.*

Для дальнейшего нам понадобится построить базис из двух элементов в группе $\mathrm{SL}(2)$. Пусть C_α — матрица поворота на угол α , несоизмеримый с 2π , а $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ЛЕММА 2. *Существует не более чем счетное подмножество $X \subset \mathbf{R}$ такое, что для любого $t \in \mathbf{R} \setminus X$ элементы C_α и $A(t)$ образуют базис в группе $\mathrm{SL}(2)$.*

Доказательство. Обозначим через F свободную группу ранга 2 над алфавитом $\{g, h\}$; пусть $\varphi_t: G \rightarrow \text{SL}(2)$ — гомоморфизм, заданный условием $\varphi_t(g) = C_\alpha$, $\varphi_t(h) = A(t)$. Возьмем $f \in F \setminus \{1\}$; пусть $f = g^k h^{l_1} \dots g^{k_n} h^{l_n}$, и рассмотрим кривую $f(t) = \varphi_t(f)$. Несложно проверить, что $d^n f/dt^n \neq 0$. Так как $f(t)$ полиномиальна по t , то множество $X(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) = 1\}$ конечно. Тогда можно взять $X = \bigcup_{f \in F \setminus \{1\}} X(f)$.

Пусть f то же, что и в теореме 1, а

$$r = \sum_{i=1}^n (1 + \cos \varphi_i) a_i, \quad s = \left(1 + \cos \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i\right)\right) \sum_{i=1}^n a_i.$$

Введем диффеоморфизмы: $g(\lambda, \mu) = \exp \lambda r \cdot \exp \mu s$. Если положить

$$\psi(\varphi, t) = \begin{cases} 2 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\varphi/2) + t), & \varphi \neq \pi, \\ \pi, & \varphi = \pi, \end{cases}$$

то имеем

$$\exp \lambda r(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = (\psi(\varphi_1, \lambda), \dots, \psi(\varphi_n, \lambda)),$$

$$\begin{aligned} \exp \mu s(\varphi_1, \dots, \varphi_n) &= \\ &= (\varphi_1 + (1/n)(\psi(\varphi_1 + \dots + \varphi_n, n\mu) - \\ &\quad - (\varphi_1 + \dots + \varphi_n)), \dots, \\ &\quad \varphi_n + (1/n)(\psi(\varphi_1 + \dots + \varphi_n, n\mu) - (\varphi_1 + \dots + \varphi_n))). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. *Существует такое подмножество $Y \subseteq \mathbb{R}^2$, нигде не плотное в \mathbb{R}^2 , что для $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus Y$ два элемента $f, g(\lambda, \mu)$ образуют базис в топологической группе $D_0(\mathbb{T}^n)$ при $n \geq 2$.*

Доказательство. Обозначим через $H(\lambda, \mu)$ замкнутую подгруппу в $D_0(\mathbb{T}^n)$, порожденную элементами $f, g(\lambda, \mu)$. Пусть $\mathfrak{h}(\lambda, \mu)$ — алгебра Ли этой группы, т. е. множество векторных полей, потоки которых лежат в $H(\lambda, \mu)$. Очевидно, $\mathfrak{h}(\lambda, \mu)$ является топологическим \mathbb{T}^n -модулем, и из [4] имеем $\mathfrak{h}(\lambda, \mu) = \overline{\mathfrak{h}(\lambda, \mu) \cap S_n}$. Введем \mathbb{T}^n -модуль $h(\lambda, \mu) = \mathfrak{h}(\lambda, \mu) \cap S_n$; $h(\lambda, \mu)$ разлагается в прямую сумму неприводимых \mathbb{T}^n -подмодулей, ортогональных относительно скалярного произведения

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{i=1}^n u_i(\varphi) v_i(\varphi) d\varphi.$$

Заметим, что

$$h(0, 0) = t^n, \quad h(\lambda, 0) = t^n + V, \quad h(0, \mu) = t^n + U,$$

где $\lambda, \mu \neq 0$,

$$V = L \{ \cos \varphi_i a_i, \sin \varphi_i a_i \mid i = 1, \dots, n \},$$

$$U = L \{ \cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)(a_1 + \dots + a_n), \\ \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)(a_1 + \dots + a_n) \}.$$

Покажем, что если $h(\lambda, \mu)$ неортогонально U и $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, то $H(\lambda, \mu) = D_0(\mathbb{T}^n)$. Действительно, для любой перестановки p аргументов $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ имеем $pg(\lambda, \mu)p^{-1} = g(\lambda, \mu)$. Поэтому $p_*(h(\lambda, \mu)) = h(\lambda, \mu)$ и $p_*(h(\lambda, \mu) \cap \cap U) = h(\lambda, \mu) \cap U$. В частности, отсюда следует, что если $h(\lambda, \mu)$ неортогонально U , то

$$h(\lambda, \mu) \ni u = \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)(a_1 + \dots + a_n).$$

Тогда имеем $H(\lambda, \mu) \ni \exp tu$ и $H(\lambda, \mu) \ni \exp tv$. Из теоремы 1 тогда следует, что $H(\lambda, \mu) = D_0(\mathbb{T}^n)$. Заметим, что при $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ имеем: $g(0, \mu)_* t^n$ неортогонально U , т. е. $h(0, \mu)$ неортогонально U . Так как $g(\lambda, \mu)_* a_i$ аналитично по (λ, μ) , то подмножество

$$Y_1' = \{(\lambda, \mu) \mid g(\lambda, \mu)_* t^n \perp U\}$$

нигде не плотно в \mathbb{R}^2 . Положим

$$Y_1 = Y_1' \cup \{(\lambda, \mu) \mid \lambda\mu = 0\}$$

для $(\lambda, \mu) \notin Y_1$; имеем $h(\lambda, \mu) = S_n$.

Далее заметим, из леммы 2 следует, что существует такое не более чем счетное подмножество $M \subset \mathbb{R}$, что при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus M$ элементы f и $g(\lambda, 0)$ порождают свободную подгруппу в $D_0(\mathbb{T}^n)$. Так как $g(\lambda, \mu)$ аналитично по (λ, μ) , то отсюда легко следует, что подмножество таких (λ, μ) , для которых некоторое нетривиальное соотношение между элементами f и $g(\lambda, \mu)$ обращается в единицу, нигде не плотно в \mathbb{R}^2 . Поэтому существует такое нигде не плотное подмножество $Y_2 \subset \mathbb{R}^2$, что для $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus Y_2$ элементы f и $g(\lambda, \mu)$ порождают свободную подгруппу. Тогда можно взять

$$Y = Y_1 \cup Y_2.$$

Теорема доказана.

Аналогичным образом можно построить базис в группе $D_0(\mathbf{T}^1)$, если взять в качестве $f(\varphi) = \varphi + 1$ и

$$g(\lambda, \mu) = \exp(\lambda(1 + \cos \varphi_1) a_1) \exp(\mu \sin 2\varphi_1 a_1).$$

Пусть M — однородное пространство некоторой компактной группы Ли K (т. е. $M = K/H$). В [5] автором было доказано, что в случае, когда группа K полупроста, в топологической группе $D_0(M)$ и ее подгруппах вида $H(K, \mathcal{V})$ (т. е. порожденных подмножествами K и $\{\exp(t \cdot \mathcal{V})\}$, где $\mathcal{V} \subset V(M)$, $t \in \mathbf{R}$) существуют базисы. Используя теорему 2, этот результат можно обобщить на однородные пространства произвольных компактных групп Ли.

ТЕОРЕМА 3. Пусть α — характеристика однородного пространства M , введенная в [5] (отметим, что $\alpha \leq \dim M$). В топологической группе $D_0(M)$ и ее подгруппах вида $H(K, \mathcal{V})$ существуют свободные всюду плотные подгруппы ранга $2\alpha + 2$.

Доказательство. Случай $M = \mathbf{T}^n$ следует из теоремы 2. Если $M \neq \mathbf{T}^n$, то $K = \mathbf{T}^s \cdot L$, где L — полупростая компактная группа Ли. В группе L существует счетное свободное подмножество $S = \{g_1, g_2, \dots\}$ такое, что любые два элемента из S образуют базис в L (см. [6]). Пусть $g \in \mathbf{T}^s$ — элемент, степени которого плотны в \mathbf{T}^s . Положим $q_i = gg_i$ и $S' = \{q_1, q_2, \dots\}$. Очевидно, S' обладает аналогичным свойством в K . По [5, теорема 1] можно построить α аналитических векторных полей u_1, \dots, u_α , которые порождают топологический K -модуль $V(M)$ (для случая подгруппы $H(K, \mathcal{V})$ — подмодуль $\mathfrak{h}(K, \mathcal{V})$, являющийся алгеброй Ли подгруппы $H(K, \mathcal{V})$), а потоки этих полей и подгруппа K порождают топологическую группу $D_0(M)$ ($H(K, \mathcal{V})$). В частности,

$$X_t = \{q_1, q_2, q_3 \exp tu_1, q_4 \exp \sqrt{2} tu_1, \dots \\ \dots, q_{2\alpha+1} \exp tu_\alpha, q_{2\alpha+2} \exp \sqrt{2} tu_\alpha\}$$

является системой образующих в $D_0(M)$ ($H(K, \mathcal{V})$) при $t \neq 0$. Далее, если имеется некоторое нетривиальное соотношение между элементами X_t , то множество t , на котором это соотношение равно единице, не более чем счетно (так как элементы из X_t аналитичны по t и при $t = 0$

свободны). Так как множество возможных соотношений счетно, то существует такое не более чем счетное подмножество $P \subset \mathbf{R}$, что для $t \in \mathbf{R} \setminus P$ элементы множества X_t образуют базис в $D_0(M) (H(K, \mathscr{P}))$. Теорема доказана.

Автор благодарит рецензента за полезные замечания.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
информации и технико-экономических
исследований в электротехнике

Поступило
12.V.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] У л а м С., Нерешенные математические задачи, М., «Мир», 1964.
- [2] Н е р м а н М. R., Sur le groupe des diffeomorphismes du tore, Ann. Inst. Fourier, 23, № 2 (1973), 75—86.
- [3] Л у к а ц к и й А. М., Конечнопорожденность групп диффеоморфизмов, Успехи матем. наук, 23, № 1 (1978), 219—220.
- [4] P a l a i s R. S., S t e w a r t T. E., The cohomology of differentiable transformation groups, Amer. J. Math., 83, № 4 (1961), 623—644.
- [5] Л у к а ц к и й А. М., Об однородных векторных расслоениях и группах диффеоморфизмов компактных однородных пространств, Изв. АН СССР, Сер. матем., 39, № 6 (1975), 1274—1283.
- [6] T i t s J., Free subgroups in linear groups, J. Algebra, 20, № 2 (1972), 250—270.
- [7] L e s l i e J., On a differential structure for the group of diffeomorphisms, Topology, 6 (1967), 263—271.
- [8] Н е р м а н М. R., Sur le groupe des diffeomorphyses \mathbf{R} -analytique du tore, Differential topology and geometry, Lect. Notes Math., 484 (1975), 36—42.