Н. Д. Введенская, О зависимости гладкости решения вырожденного параболического уравнения от размеров области,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, том 11, номер 6, 1453–1461

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 11 Ноябрь 1971 Декабрь № 6

УДК 517.944/.947

О ЗАВИСИМОСТИ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОТ РАЗМЕРОВ ОБЛАСТИ

Н. Д. ВВЕДЕНСКАЯ

(Москва)

Показывается, что решение первой краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения, в котором квадратичная форма не вырождена в направлении x_n (но может вырождаться в других направлениях), существует в целом, если ширина области в направлении x_n достаточно мала. Приводится пример, когда это условие на ширину области существенно.

Приведем пример краевой задачи для вырожденного квазилинейного параболического уравнения специального вида, существование и гладкость решения которой зависят от ширины области, где ищется решение. Этот пример, как нам кажется, моделирует разрыв в решениях трехмерных уравнений пограничного слоя, обнаруженный при численных расчетах [1].

Рассмотрим в области $D^T = \{0 < t < T,\ x \in D^0\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, уравнение вида

$$L^0 u \equiv u_t - a^{ij}(u) u_{x_i x_j} + b^i(u) u_{x_i} + c(u) = 0, \tag{1}$$

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0, \qquad i,j = 1, \ldots, n,$$

где

$$a^{nn} \geqslant \alpha > 0. \tag{2}$$

На границе $\partial D^T = \{t = 0,\ x \in D^0;\ 0 < t < T,\ x \in \partial D^0\}$ (∂D^0 — граница D^0) для u ставится первое краевое условие

$$u|_{\partial D^T} = u_\partial. \tag{3}$$

Известно [2], что даже в случае линейного вырожденного параболического уравнения решение первой краевой задачи будет гладким в замкнутой области $\overline{D}^T$ лишь тогда, когда граничные условия u_∂ и поверхность ∂D^T удовлетворяют специфическим условиям, связанным с видом оператора L^0 на ∂D^T при $t > 0$ (кроме того, что должны удовлетворяться условия гладкости на u_∂, ∂D^0 и на коэффициенты L^0 и для u_∂ должны выполняться условия согласования на пересечении цилиндра $\{0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \partial D^0\}$ с плоскостью $t = 0$). В нелинейном случае задача вида (1) — (3) рассматривалась в [3], где приведены достаточные условия, при которых эта задача имеет гладкое решение в $\bar{D}^T$ для некоторого $T > 0$.

Мы будем дальше предполагать, не оговаривая этого особо, что коэффициенты L^0, функция u_∂ и граница ∂D^T достаточно гладки (например, что коэффициенты L^0 и u_∂ принадлежат классам C^K, ∂D^0 принадлежит A^K, где K достаточно велико). Будем считать кроме того, что функция u_∂ равномерно ограничена при всех t и что равномерно ограничены a^{ij}, b^i, c и их производные до порядка K; $|a_u^{ij}| \leqslant A'$, $|a_{uu}^{ij}| \leqslant A''$, $|b^i| \leqslant B$, $|b_u^i| \leqslant B'$, $|b_{uu}^i| \leqslant B''$, $|c_u| \leqslant C'$, $|c_{uu}| \leqslant C''$. (Случай, когда коэффициенты L^0 зависят от t и x, рассматривается совершенно аналогично; при $c \equiv 0$ коэффициенты b^i могут расти с ростом $|u|$.)

Решение (1) — (3) можно искать, как предел при $\varepsilon \to 0$ решений задач

$$L^\varepsilon u^\varepsilon \equiv L^0 u^\varepsilon - \varepsilon \Delta u^\varepsilon = 0, \qquad \Delta = \sum_i \partial^2/\partial x_i^2, \tag{4}$$

$$u^\varepsilon|_{\partial D^T} = u_\partial^\varepsilon, \tag{5}$$

где u_∂^ε стремятся к u_∂ со всеми своими производными до k-го порядка, $k \leqslant K$ (и удовлетворяют условиям согласования) *). Поскольку существование достаточно гладкого решения (4), (5) известно (см., например, [4]), вопрос о существовании и гладкости решений (1), (3) сводится к получению равномерных по ε априорных оценок для решений u^ε и их производных.

Докажем, что справедлива следующая условная

Теорема 1. *Пусть выполнено* (2) *и при всех* $t \leqslant T < \infty$ *производные от решений задач* (4), (5) *до* k*-го порядка равномерно по* ε *ограничены на* ∂D^T. *Если* D^T *лежит в достаточно узкой по* x_n *полосе* $|x_n| < m$, *то в* $\bar{D}^T$ *у* u^ε *будут равномерно по* ε *ограничены производные до порядка* $k/2$ **). *В случае когда* $a^{ij} = \mathrm{const}$, $a^{nn} = \alpha$, *величина* m *зависит от* α, n, B, B', C' *и от*

$$\max_{\varepsilon,\, \partial D^T} p_1^\varepsilon = M_1, \qquad p_1^\varepsilon = \sum_i (\partial u^\varepsilon/\partial x_i)^2.$$

В случае когда $a^{ij} = a^{ij}(u)$, *величина* m *зависит еще от* A', A'', B'', C'' *и от*

$$\max_{\varepsilon,\, \partial D^T} p_2^\varepsilon = M_2, \qquad p_2^\varepsilon = \sum_{i,j} (\partial^2 u^\varepsilon/\partial x_i\, \partial x_j)^2.$$

Доказательство. Равномерная по ε ограниченность u^ε в $\bar{D}^T$, $T < \infty$, следует из того, что $|u^\varepsilon|$ мажорируется решением уравнения

$$\frac{dv}{dt} = 2C'v, \qquad v(0) = \max_{\varepsilon,\, \partial D^T} |u_\partial^\varepsilon|.$$

Чтобы показать равномерную ограниченность p_1^ε, рассмотрим уравнение,

*) Решение (1), (3) мы будем иногда обозначать через u^0.

**) Оценка производных лишь до порядка $k/2$ очень груба, но для наших целей достаточна.

которому p_1^ε удовлетворяет:

$$\frac{\partial p_1^\varepsilon}{\partial t}=(a^{ij}+\varepsilon\delta^{ij})\frac{\partial^2 p_1^\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}-2(a^{ij}+\varepsilon\delta_j^{i})\frac{\partial^2 p_1^\varepsilon}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial^2 p_1^\varepsilon}{\partial x_j\partial x_k}-$$

(6)

$$-b^i\frac{\partial p_1^\varepsilon}{\partial x_i}-2b_u^i\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}p_1^\varepsilon-2c_u p_1^\varepsilon+2\sum_k\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k},$$

$$\partial a^{ij}/\partial x_k=a_u^{ij}\partial u^\varepsilon/\partial x_k.$$

В случае $a^{ij}=\text{const}$ последний член в правой части (6) отсутствует и для p_1^ε справедливо неравенство

$$(7)\qquad \frac{\partial p_1^\varepsilon}{\partial t}\leqslant(a^{ij}+\varepsilon\delta^{ij})\frac{\partial^2 p_1^\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}-b^i\frac{\partial p_1^\varepsilon}{\partial x_i}+2B'(p_1^\varepsilon)^{3/2}\sqrt{n}+2C'p_1^\varepsilon.$$

Пусть теперь $v=v(x_n)$ — решение уравнения $\alpha v_{x_nx_n}-(1+2B'\sqrt{n})|v|^{3/2}=0$, для которого $v<-M_1$, $B|v_{x_n}|+2C'|v|<|v|^{3/2}$ при $|x_n|\leqslant m$. Такое решение существует, и m зависит от M_1, α, n, B, B', C'. В самом деле, пусть $v^{(0)}$ — решение этого уравнения, для которого $v^{(0)}(0)=-1$, $v^{(0)}_{x_n}(0)=0$, и пусть $m^{(0)}$ таково, что $v^{(0)}<-{}^1/_2$ при $|x_n|\leqslant m^{(0)}$, $m^{(0)}=m^{(0)}(\alpha,\ n,\ B')$. Функция $v(x_n)=Nv^{(0)}(N^{1/4}x_n)$, $N=\text{const}$, снова является решением того же уравнения, причем $v(x_n)<-N/2$ при $|x_n|<N^{-1/4}m^{(0)}$ и $v_{x_n}(x_n)=N^{5/4}v^{(0)}_{x_n}(N^{1/4}x_n)$; если N выбрать достаточно большим, то, очевидно, v будет удовлетворять нужным неравенствам, причем $m=m^{(0)}N^{-1/4}$ будет зависеть от указанных констант. Покажем теперь, что $p_1^\varepsilon<|v|$ в $\bar D^T$, если D^T лежит в полосе $|x_n|<m$. Действительно, $w=p_1^\varepsilon+v<0$ над D^T, а в точках внутреннего отрицательного максимума w на сечении $t=\text{const}$

$$\frac{\partial w}{\partial t}\leqslant(a^{ij}+\varepsilon\delta^{ij})\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j}-b^i\frac{\partial w}{\partial x_i}+2B'\sqrt{n}[(p_1^\varepsilon)^{3/2}-$$

$$-|v|^{3/2}]+2C'w-\varepsilon v_{x_nx_n}+b^n v_{x_n}-2C'v-|v|^{3/2}<0,$$

и, следовательно, максимум w в D^T не может стать больше, чем $\max\limits_{\partial D^T} w<0$, а значит, $w<0$ в $\bar D^T$. Далее, функции $p_l^\varepsilon=\Sigma(\partial^l u^\varepsilon/\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n})^2$, $2\leqslant l\leqslant k$, $l_1+\ldots+l_n=l$, оцениваются по индукции (оценка не зависит от m): функция p_l^ε остается ограниченной в $\bar D^T$, так как она ограничена на ∂D^T, а внутри D^T удовлетворяет параболическому линейному уравнению, коэффициенты которого зависят лишь от p_r^ε, $r<l$. Наконец, производные вида $\partial^{s+l}u^s/\partial t^s\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}$, $2s+l\leqslant k$, ограничены в $\bar D^T$, так как они выражаются через $\partial^q u^\varepsilon/\partial x_1^{q_1}\ldots\partial x_n^{q_n}$, $q\leqslant 2s+l$.

В случае когда $a^{ij}=a^{ij}(u)$, последний член в (6) можно оценить, воспользовавшись тем, что (см. [2])

$$\left(\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)^2\leqslant N\left(1+\max_{l,m,i,j,D^T}\left|\frac{\partial^2 a^{ij}}{\partial x_l\,\partial x_m}\right|\right)a^{ij}\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i\,dx_k}\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_j\,\partial x_k}=$$

$$=N\left(1+\max_{\cdots}\left|a^{ij}_{uu}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_l}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_m}+a^{ij}_u\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_l\,\partial x_m}\right|\right)a^{ij}\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_j\,\partial x_k}\leqslant$$

$$\leqslant N(1+A'+A'')(p_1^\varepsilon+\sqrt{p_2^\varepsilon})\,a^{ij}\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_j\,\partial x_k},\qquad N=\text{const}.$$

Поэтому

$$-a^{ij}\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial x_j\partial x_k}+\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\leqslant$$
$$\leqslant -a^{ij}\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial x_j\partial x_k}+\left[\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}\right]^2\times$$
$$\times N^{-1}(1+A'+A'')^{-1}(p_1^\varepsilon+\sqrt{p_2^\varepsilon})^{-1}+N(1+A'+A'')\times$$
$$\times(p_1^\varepsilon+\sqrt{p_2^\varepsilon})\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k}\right)^2\leqslant N_1((p_1^\varepsilon)^2+p_2^\varepsilon),\qquad N_1=\mathrm{const}.$$

Оценивая в уравнении для p_2^ε член вида

$$\sum_{k,l}\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial x_l\,\partial x_i\,\partial x_j}\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial x_k\partial x_l}$$

аналогичным образом, мы можем показать, что сумма $(p_1^\varepsilon)^2+p_2^\varepsilon$ при $|x_n|<m$ мажорируется модулем решения уравнения $\alpha v_{x_nx_n}-(1+N_2)v^4=0$, $N_2=N_2(A', A'', B, B', B'', n)$, $v<-M_1^2-M_2$, а m зависит от величин, перечисленных в формулировке теоремы. Функции p_l^ε, $l\geqslant 3$, и производные вида $\partial^{s+l}u^\varepsilon/\partial t^s\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}$ оцениваются далее так же, как и выше.

Следствие 1. Если условия теоремы 1 выполнены, то в $\bar{D}^T$ существует гладкое ($k/2-1$ раз дифференцируемое) решение задачи (1), (3).

Следствие 2. Если в D^T существует гладкое решение задачи (1), (3) с ограниченными на ∂D^T производными до порядка $k'<k/2$ и если D^T лежит в полосе $|x_n|<m$, то указанные производные удовлетворяют в $\bar{D}^T$ априорным оценкам типа оценок, приведенных в доказательстве теоремы.

Обозначим через $\nu_A=(0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ внутреннюю нормаль к ∂D^T в точке $A\in\partial D^T$, $0<t<T$.

Будем рассматривать дальше лишь случай $n=2$.

Лемма 1. *Пусть* $a^{11}=a^{12}=0$, $a^{22}=\alpha=\mathrm{const}$, $c\equiv 0$, D^0 — *выпуклая область. Пусть решения* u^ε *являются* k *раз непрерывно дифференцируемыми в* $\bar{D}^T$, $u_\partial^\varepsilon=\mathrm{const}$ *в фиксированной окрестности на* ∂D^T *тех точек* $A\in\partial D^T$, $0<t<T$, *в которых* $\nu_A=(0, \theta, 0)\,\theta=\pm 1$, *и кроме того* u^ε *таковы, что для них* $b^1(u^\varepsilon)>0$ *в фиксированной окрестности в* D^T *тех точек* $A\in\partial D^T$, *где* $\nu_A=(0, 1, 0)$, *и* $b^1(u^\varepsilon)<0$ *в фиксированной окрестности в* D^T *тех точек* $A\in\partial D^T$, *где* $\nu_A=(0, -1, 0)$. *Если при этом* D^T *лежит в полосе* $|x_2|<m$, *где* m *достаточно мало, то производные* u^ε (*до порядка* $k/2$) *равномерно ограничены в* $\bar{D}^T$.

Доказательство проводится по той же схеме, что в [2, 3]. (Равномерная ограниченность $\partial u^\varepsilon/\partial\nu$ на ∂D^T показывается так же, как в [2].) Мы, однако, повторим эти довольно длинные рассуждения, так как в нашем случае они требуют некоторых уточнений.

Заметим сначала, что если $v(x)$ — решение задачи

(8) $$-\varepsilon v_{xx}+qv_x+rv=0,\quad v(0)=V^{(0)},\quad v(\rho)=V^{(\rho)},$$

где ε, q, r — const; ε, q, ρ, $V^{(0)}$, $V^{(\rho)}$ неотрицательны, то

$$v(x) = (V^{(0)} + h)e^{\lambda_1 x} - he^{\lambda_2 x},$$
$$h = \mathrm{const}, \qquad \lambda_1 > \lambda_2, \qquad -\varepsilon\lambda_i^2 + q\lambda_i + r = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Если ε достаточно мало, то $\lambda_1 = q/\varepsilon + O(1)$, $\lambda_2 = r/q + O(\varepsilon)$; $v \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant \rho$; $h = O(V^{(0)} + V^{(\rho)}e^{-q\rho/\varepsilon})$, $v'(0) = O(\varepsilon^{-1}h)$, $v'(0) > 0$.

Пусть $\nu = (0, 1, 0)$ в $A_1(t, x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$, $\nu = (0, -1, 0)$ в $A_2(t, x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$. Обозначим $g_\mu^T = D^T \cap \{x_1^{(1)} < x < x_1^{(1)} + \mu\}$, $g_\mu'^T = D^T \cap \{x_1^{(2)} - \mu < x < x_1^{(2)}\}$, $G_\mu^T = g_\mu^T \cup g_\mu'^T$ и выберем μ настолько малым, что $b^1(u^\varepsilon) > 0$ в g_μ^T, $b^1(u^\varepsilon) < 0$ в $g_\mu'^T$, $u_\partial^\varepsilon = \mathrm{const}$ на $\partial g_\mu^T \cap \partial D^T$ и $\partial g_\mu'^T \cap \partial D^T$. Покажем, что $|u^\varepsilon - u_\partial^\varepsilon| < 0(e^{-\sigma/\varepsilon})$ в g_μ^T и в $g_\mu'^T$, $\mu_1 < \mu$, $\sigma > 0$. Достаточно рассмотреть g_μ^T, и можно считать, что $x_1^{(1)} = 0$. Пусть $v(x)$ — решение (8) с $x = x_1$,

$$q = \min_{\varepsilon, g_\mu^T} b^1(u^\varepsilon), \quad r = 0, \quad V^{(0)} = 0, \quad \rho = \mu, \quad V^{(\rho)} = \max_{D^T} |u^\varepsilon - u_\partial^\varepsilon|,$$

так что $u^\varepsilon - u_\partial^\varepsilon - v \leqslant 0$ на ∂g_μ^T. (Мы считаем, что $u_\partial^\varepsilon = \mathrm{const}$ продолжено в D^T.) Рассмотрим (4) как линейное уравнение (с коэффициентами, зависящими от t, x_i). Тогда $L^\varepsilon(u^\varepsilon - u_\partial^\varepsilon - v) = \varepsilon v_{xx} - b^1 v_x = (q - b^1)v_x < 0$ в g_μ^T и, следовательно, $u^\varepsilon - u_\partial^\varepsilon - v \leqslant 0$ в g_μ^T; так же показывается, что $u^\varepsilon - u_\partial^\varepsilon + v \geqslant 0$ в $g_\mu'^T$, т. е. $|u^\varepsilon - u_\partial^\varepsilon| \leqslant N_1 e^{-\sigma/\varepsilon}$ в $g_{\mu_1}^T$, $\mu_1 < \mu$, $\sigma = q(\mu - \mu_1)$. Ясно, что аналогичная оценка справедлива в $g_{\mu_1}'^T$, т. е. в $G_{\mu_1}^T$ (при этом $u^0 - u_\partial^0 = 0$ в $G_{\mu_1}^T$).

Перейдем в окрестности некоторой точки $A_0(0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in \partial D^0$ от x_1, x_2 к таким локальным координатам y_1, y_2, что $y_1 = 0$ совпадает с ∂D^0 и $y_1 > 0$ в D^0 в окрестности A_0, $y_1(A_0) = y_2(A_0) = 0$. Тогда вблизи точек $A(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$, $0 \leqslant t < T$, уравнение (4) можно записать в виде

$$(4') \qquad u_t^\varepsilon - a_\varepsilon^{y_i y_j} u_{y_i y_j}^\varepsilon + b_\varepsilon^{y_i} u_{y_i}^\varepsilon = 0, \qquad a_\varepsilon^{y_i y_j} \geqslant \varepsilon.$$

Введем функцию $w = N\exp[-\gamma y_1 + \psi(y_2)]$, где $\gamma = \mathrm{const} > 0$, ψ — финитная функция, $y_2\psi' \leqslant 0$, $\max\psi = \psi(0) = \ln 3$, и рассмотрим цилиндр, $d_A^T = \{0 < t < T, -\gamma y_1 + \psi > 0\}$, ограниченный поверхностями $t = 0$, $y_1 = 0$, $-\gamma y_1 + \psi = 0$, так что $w \geqslant N$ в $\bar d_A^T$. (Если носитель ψ достаточно мал, а γ достаточно велико, то $d_A^T \subset D^T$.) Положим $N = \max_{d_A^T} |u^\varepsilon - u_\partial^\varepsilon|$, тогда $\max_{dt_A^T}(w + u^\varepsilon - u_\partial^\varepsilon)$ принимается *) в точках A и можно так выбрать $\gamma = \gamma(A)$, что

$$L^\varepsilon(w + u^\varepsilon - u_\partial^\varepsilon) = \{-a_\varepsilon^{y_1y_1}\gamma^2 - a_\varepsilon^{y_1y_2}\gamma\psi' - a_\varepsilon^{y_2y_2}[\psi'' + (\psi')^2] -$$
$$- b^{y_1}\gamma + b^{y_2}\psi'\}w + a_\varepsilon^{y_2y_2}(u_\partial^\varepsilon)_{y_2y_2} - b^{y_2}(u_\partial^\varepsilon)_{y_2} < 0.$$

((4′) рассматривается в d_A^T опять как линейное уравнение). Но тогда $\max_{d_A^T}(w + u^\varepsilon - u_\partial^\varepsilon)$ принимается на границе ∂d_A^T, т. е. в A, и, следователь-

*) Мы считаем опять, что u_∂^ε продолжено в d_A^T, $u_\partial^\varepsilon(y_1, y_2) = u_\partial^\varepsilon(0, y_2)$.

но, $\partial(w+u^\varepsilon)/\partial y_1|_A \leqslant 0$, $\partial u^\varepsilon/\partial y_1|_A \leqslant N\gamma$. Аналогично показывается, что $\partial u^\varepsilon/\partial y_1|_A \geqslant -N\gamma$. Нам остается заметить, что $a^{y_1y_1} > \beta(\mu_2) > 0$ в $d_A{}^T$ для $A \notin \overline{G}_{\mu_2}{}^T$, $0 < \mu_2 < \mu_1$, и поэтому можно выбрать $\gamma = \gamma(\mu_2)$ настолько большим, что оно будет пригодно для всех таких $A: |\partial u^\varepsilon/\partial y| \leqslant N\gamma = \mathrm{const}$. (Подчеркнем, что $\gamma(\mu_2)$ не зависит от ε.) В точках $A \in \partial G_{\mu_2}{}^T \cap \partial D^T$ выберем ψ и γ так, чтобы все $d_A{}^T \subset G_{\mu_1}{}^T$, и положим $N = N_1 e^{-\sigma/\varepsilon}$. Выберем γ_1 настолько большим, чтобы $L^\varepsilon(w+u^\varepsilon-u_\partial{}^\varepsilon) < 0$ при $\gamma = \gamma_1/\varepsilon$, тогда для $\partial u^\varepsilon/\partial y_1|_A$, $A \in \partial G_{\mu_2}{}^T \cap \partial D^T$, получится оценка вида $|\partial u^\varepsilon/\partial y_1||_A \leqslant O(\varepsilon^{-1}e^{-\sigma/\varepsilon}) = O(e^{-\sigma_1/\varepsilon})$, $\sigma_1 < \sigma$. Поскольку производные u^ε вдоль ∂D^T равномерно ограничены на ∂D^T, $0 < t < T$ (и даже равны 0 на $\partial G_\mu{}^T \cap \partial D^T$), на ∂D^T равномерно по ε ограничены $\partial u^\varepsilon/\partial x_1$, $\partial u^\varepsilon/\partial x_2$, $p_1{}^\varepsilon$, причем $p_1{}^\varepsilon = O(e^{-2\sigma_1/\varepsilon})$ на $\partial G_{\mu_2}{}^T \cap \partial D^T$. Равномерная ограниченность $p_1{}^\varepsilon$ в D^T следует из теоремы 1. Далее, пользуясь (7) и ограниченностью $p_1{}^\varepsilon$ в $g_{\mu_2}{}^T$, сравним $p_1{}^\varepsilon$ в $g_{\mu_2}{}^T$ с решением (8) (для $x = x_1$, $q = \min\limits_{g_{\mu_2}^T} b^1(u^\varepsilon)$, $r = -\max\limits_{D^T}(2B\sqrt{(np_1{}^\varepsilon)}))$. Так же как и выше, получим, что

$$p_1{}^\varepsilon \leqslant O(e^{-2\sigma_1/\varepsilon}+e^{-\sigma_2/\varepsilon}) \text{ в } G_{\mu_3}{}^T,\ \mu_3<\mu_2,\ \sigma_2 = q(\mu_2-\mu_3), \text{ т. е. } p_1{}^\varepsilon \leqslant O(e^{-\sigma_3/\varepsilon}) \text{ в } G_{\mu_3}{}^T.$$

Значения $u_t{}^\varepsilon$ оцениваются в $\overline{D}^I$ с помощью уравнения, которому $u_t{}^\varepsilon$ удовлетворяет (учитывается доказанная ограниченность $p_1{}^\varepsilon$); показывается, что $u_t{}^\varepsilon = O(e^{-\sigma_4/\varepsilon})$ в $G_{\mu_2}{}^T$, $\sigma_4 \leqslant \sigma_3$.

Приведем еще вывод оценки $p_2{}^\varepsilon$. Сначала оценим на ∂D^T производную $\partial^2 u^\varepsilon/\partial y_2\partial y_1$, воспользовавшись для этого уравнением, которому удовлетворяет $u_2{}^\varepsilon = u_{y_2}{}^\varepsilon$:

$$L_1{}^\varepsilon(u_2) \equiv \frac{\partial u_2{}^\varepsilon}{\partial t} - a_\varepsilon^{y_iy_j}\frac{\partial^2 u_2{}^\varepsilon}{\partial y_i\partial y_j} + b_\varepsilon^{y_i}\frac{\partial u_2{}^\varepsilon}{\partial y_i} - \frac{\partial a_\varepsilon^{y_iy_j}}{\partial y_2}\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial y_i\partial y_j} + \frac{\partial b_\varepsilon^{y_i}}{\partial u}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y_i}u_2{}^\varepsilon + \frac{\partial b_\varepsilon^{y_i}}{\partial y_2}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y_i} = 0.$$

Выразив $\partial^2 u^\varepsilon/\partial y_1{}^2$ через другие производные от u^ε, получим

$$L_1{}^\varepsilon(u_2{}^\varepsilon) \equiv \frac{\partial u_2{}^\varepsilon}{\partial t} - a_\varepsilon^{y_iy_j}\frac{\partial^2 u_2{}^\varepsilon}{\partial y_i\partial y_j} + \left(b_\varepsilon^{y_i} + \frac{a_\varepsilon^{y_2y_i}}{a_\varepsilon^{y_1y_1}}\frac{\partial a_\varepsilon^{y_1y_1}}{\partial y_2} - \frac{\partial a_\varepsilon^{y_2y_i}}{\partial y_2}\right)\frac{\partial u_2{}^\varepsilon}{\partial y_i} + \left(\frac{\partial b_\varepsilon^{y_i}}{\partial u}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y_i} - \frac{b_\varepsilon^{y_2}}{a_\varepsilon^{y_1y_1}}\frac{\partial a_\varepsilon^{y_1y_1}}{\partial y_2} + \frac{\partial b_\varepsilon^{y_2}}{\partial y_2}\right)u_2{}^\varepsilon - \left(\frac{b_\varepsilon^{y_1}}{a_\varepsilon^{y_1y_1}}\frac{\partial a_\varepsilon^{y_1y_1}}{\partial y_2} - \frac{\partial b_\varepsilon^{y_1}}{\partial y_2}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y_1} - \frac{1}{a_\varepsilon^{y_1y_1}}\frac{\partial a_\varepsilon^{y_1y_1}}{\partial y_2}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим опять (9) как линейное относительно u_2 уравнение; вне $G_{\mu_4}{}^T$, $\mu_4 < \mu_3$, все коэффициенты в (9) и свободные члены ограничены равномерно по ε и $a_\varepsilon^{y_1y_1} > \beta(\mu_4)$, поэтому для $A \in \partial D^T$, $A \notin \partial G_{\mu_4}{}^T$ равномерная по ε оценка $\partial u_2{}^\varepsilon/\partial y_1$ получается так же, как оценка для $\partial u^\varepsilon/\partial y_1$, с помощью функции w с $N = O(1)$. Для $A \in \partial D^T \cap \partial G_{\mu_4}{}^T$ выберем ψ и γ так, чтобы $d_A \subset G_{\mu_3}{}^T$, тогда в d_A все свободные члены в (9) не превосходят $O(\exp(-\sigma_4/\varepsilon))$, $|u_2| \leqslant O(\exp(-\sigma_4/\varepsilon))$. Полагая $N = N_1\exp(-\sigma_4/\varepsilon)$

и выбирая γ в виде γ_1/ε, где γ_1 достаточно велико, мы получим, что $|\partial u_2^\varepsilon/\partial y_1||_A \equiv |\partial^2 u^\varepsilon/\partial y_1\partial y_2||_A = O(\varepsilon^{-1}\exp(-\sigma_4/\varepsilon))$. Производные $u^\varepsilon_{y_2y_2}$ равномерно ограничены на ∂D^T, $0 < t < T$, и равны нулю на $\partial D^T \cap \partial G_{\mu_4}{}^T$. Из (4′) тогда следует, что значения $u^\varepsilon_{y_1y_1}$ равномерно ограничены на ∂D^T, причем $|u^\varepsilon_{y_1y_1}| \leqslant O(\varepsilon^{-2}\exp(-\sigma_4/\varepsilon)) = O(-\exp(-\sigma_5/\varepsilon))$ на $\partial D^T \cap \partial G_{\mu_4}{}^T \times$ $\times$ $(\sigma_5 < \sigma_4)$. Следовательно, p_2^ε равномерно ограничены на ∂D^T, а значит, и в $\bar{D}^T$.

Оценим теперь p_2^ε в $G_{\mu_5}{}^T$, $\mu_5 < \mu_4$. Для p_2^ε справедливо неравенство типа (7):

$$\frac{\partial p_2^\varepsilon}{\partial t} \leqslant (a^{ij} + \varepsilon\delta^{ij})\frac{\partial^2 p_2^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} - b^i \frac{\partial p_2^\varepsilon}{\partial x_i} + [8B' p_1^\varepsilon + B''(p_1^\varepsilon)^{3/2}]p_2^\varepsilon.$$

Сравнивая p_2^ε в $g_{\mu_5}{}^T$ с решением (8) при $x = x_1$,

$$q = \min_{g^T_{\mu_5}} b^1(u^\varepsilon), \quad r = -\max_{D^T} [8B' p_1^\varepsilon + B''(p_1^\varepsilon)^{3/2}],$$

получим, что $p_2^\varepsilon \leqslant O(\exp(-\sigma_6/\varepsilon) + \exp(-2\sigma_5/\varepsilon)) = O(\exp(-\sigma_7/\varepsilon))$ в $g_{\mu_6}{}^T$, $\mu_6 < \mu_5$. Производные $u^\varepsilon_{ty_1}$ и $(u^\varepsilon_{tx_1})^2 + (u^\varepsilon_{tx_2})^2$ оцениваются на ∂D^T и в $\bar{D}^T$ аналогично.

Производные более высоких порядков можно оценить далее по индукции: если p_j^ε и $\partial^j u^\varepsilon / \partial t \partial x_1^{j-1-k} \partial x_2^k$, $k \leqslant j-1$, $j \leqslant l$, оценены в $\bar{D}^T$ и они экспоненциально по $1/\varepsilon$ малы в $G_{\mu'}{}^T$, то $\partial^{l+1}u^\varepsilon / \partial y_1 \partial y_2^l$ на ∂D^T можно оценить с помощью уравнения для $\partial^l u^\varepsilon / \partial y_2^l$; $\partial^{l+1}u^\varepsilon / \partial y_1^2 \partial y_2^{l-1}$ на ∂D^T можно тогда выразить через оцененные функции, используя уравнение для $\partial^{l-1}u^\varepsilon / \partial y_2^{l-1}$, и т. д. Оценки в $\bar{D}^T$ получаются из оценок на ∂D^T ссылкой на теорему 1. Далее так же оцениваются $\partial^{j+1}u^\varepsilon / \partial t \partial x_1^{j-k} \partial x_2^k$, $k \leqslant j$.

Приведем пример задачи вида (1), (3), имеющей гладкое решение в случае, когда условие на ширину области выполнено, и покажем, что это условие существенно. Обозначим $x_1 = x$, $x_2 = y$.

Рассмотрим задачу

(10) $\qquad l^0 u \equiv u_t + u u_x - u_{yy} = 0,$

(11) $\qquad u|_{\partial D^T} = u_\partial.$

Пусть D^0 — выпуклая область, содержащая начало координат, симметричная относительно оси y; u_∂ — нечетная по x и строго убывающая по x функция, ограниченная при всех $t \geqslant 0$.

Наряду с (10), (11) рассмотрим задачу

(12) $\qquad l^\varepsilon u^\varepsilon \equiv u_t^\varepsilon + u^\varepsilon u_x^\varepsilon - u_{yy}^\varepsilon - \varepsilon\Delta u^\varepsilon = 0,$

(13) $\qquad u^\varepsilon|_{\partial D} = u_\partial^\varepsilon.$

Лемма 2. *Пусть f — строго убывающая по x функция, $f(t, 0, y) = 0$, для которой $l^\varepsilon f < 0$ при $x < 0$ и $l^\varepsilon f > 0$ при $x > 0$, $\varepsilon \geqslant 0$. Если для гладкого решения (10), (11) или (12), (13) имеем $u_\partial^\varepsilon > f$ на ∂D^T при $x < 0$, $u_\partial^\varepsilon < f$ на ∂D^T при $x > 0$, то $u^\varepsilon \geqslant f$ в D^T при $x < 0$, $u^\varepsilon \leqslant f$ в D^T при $x > 0$.*

Доказательство. Решения u^ε, $\varepsilon \geqslant 0$, являются нечетными по x функциями, $u^\varepsilon(t, 0, y) = 0$, поэтому достаточно рассмотреть подобласть $D_-^T = D^T \cap \{x < 0\}$ (с дополнительным граничным условием $u^\varepsilon = 0$ при $x = 0$).

При любом фиксированном $\varepsilon > 0$ решение u^ε в D_-^T является пределом при $\mu \to +0$ решений $u^{\varepsilon,\mu}$ уравнения (12) со следующими граничными условиями на $D_-^T : u^{\varepsilon,\mu} = u_\partial{}^\varepsilon + \mu$ при $x < 0$, $u^{\varepsilon,\mu} = \mu$ при $x = 0$. Разность $w^\mu = u^{\varepsilon,\mu} - f \geqslant \mu > 0$ на границе ∂D_-^T, а внутри D_-^T

$$w_t^\mu + u^{\varepsilon,\mu}w_x^\mu + w^\mu f_x - w_{yy}^\mu - \varepsilon\Delta w^\mu > 0.$$

Поэтому $w_t^\mu > 0$ в точках положительного минимума на сечении $t = \mathrm{const}$ и, значит, $w^\mu \geqslant 0$ в D_-^T. Отсюда следует, что $u^\varepsilon - f \geqslant 0$ в D_-^T.

При $\varepsilon = 0$ рассмотрим разность $w^0 = u^0 - f$ в подобласти $D_{-\rho}{}^T = D^T \cap \{x < -\rho\}$, $\rho > 0$. Если в $D_{-\rho}{}^T$ положительный минимум w^0 на сечении $t = \mathrm{const}$ достигается внутри $D_{-\rho}{}^T$ или при $x = \rho$, то в этих точках минимума $w_t^0 > 0$, так как в них $w_t^0 + u^0 w_x^0 + w^0 f_x - w_{yy}^0 > 0$, $u^0 w_x^0 \leqslant 0$, $w^0 f_x < 0$, $w^0_{yy} \leqslant 0$. Поскольку $w^0 > 0$ на $\partial D_{-\rho}{}^T$ при $t = 0$, то w^0 остается положительным в $\overline{D}_{-\rho}{}^T$ и, значит, $w^0 \geqslant 0$ в $\overline{D}_-^T$.

Пусть теперь при всех $t > 0$ граничные значения $u_\partial{}^\varepsilon$, $\varepsilon \geqslant 0$, в (11) и (13) — гладкие, равномерно ограниченные, нечетные по x функции, для которых $u_\partial{}^\varepsilon > -\beta x$, $\beta > 0$ при $x < 0$, $u_\partial{}^\varepsilon = \mathrm{const}$ в окрестности точек, где $\nu = (0, 1, 0)$. Поскольку $l^\varepsilon(-\beta x) = \beta^2 x < 0$ при $x < 0$, то, в силу леммы 2, $u^\varepsilon \geqslant -\beta x$ в D^T при $x < 0$. Поэтому $u^\varepsilon > \mathrm{const} > 0$ при $x < -\rho < 0$, а значит, для u^ε в окрестности ∂D^T при $0 < t < T$ выполнены условия леммы 1. Отсюда следует равномерная ограниченность производных u^ε в $\overline{D}^T$, если только D^T лежит в достаточно узкой полосе $|y| < m$. Кроме того в $\overline{D}^T$ тогда существует гладкое решение (10), (11) и всякое гладкое решение (10), (11) допускает априорную оценку своих производных.

Пример. Построим теперь в некоторой области D^T такую нечетную по x и убывающую по x функцию $f(t, x, y)$, для которой $l^0 f < 0$ при $x < 0$ и $l^0 f > 0$ при $x > 0$ в D^T, которая непрерывна в $\overline{D}^T$, $t < T$, и имеет при $t = T$ разрыв:

(14) $$f(T, -0, 0) = +1, \qquad f(T, +0, 0) = -1.$$

В силу леммы 2 гладкое решение (10), (11), для которого $u_\partial > f$ при $x < 0$ на ∂D^T и $u_\partial < f$ при $x > 0$ на ∂D^T, должно удовлетворять неравенствам $u > f$ при $x < 0$, $u < f$ при $x > 0$ в D^T. Таким образом, в силу (14), в $\overline{D}^T$ не может существовать гладкого решения задачи (10), (11), для которого $u_\partial > f$, $x < 0$ и $u_\partial < f$, $x > 0$.

Рассмотрим сначала следующее решение уравнения $v_\tau + v v_x = 0$:

$$v(\tau, x) = x(\tau - 1)^{-1} \quad \text{при } \tau - 1 \leqslant x \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant 1,$$

$$v(\tau, x) = (1 + s)(1 + s^r)^{-1} = x(\tau - 1 - s^r)^{-1} \quad \text{при } x \leqslant \tau - 1,$$

$$x(\tau - 1 - s^r)^{-1} = (1 + s)(1 + s^r)^{-1},$$
$$v(\tau, -x) = -v(\tau, x)$$

(здесь $s \geqslant 0$ — параметр). Функция $v(\tau, x)$, очевидно, непрерывна при $\tau < 1$ вместе со своими производными до $(r-1)$-го порядка и разрывна в точке $\tau = 1$, $x = 0$:

$$v(1, -0) = 1, \qquad v(1, +0) = -1;$$

кроме того $v_x < 0$, $v_t > 0$ при $0 < \tau < 1$, $x < 0$ и $x > -X$, $X = X(r) > 0$. Простые выкладки, которые мы для краткости опускаем, показывают, что в окрестности точки $\tau = 1$, $x = 0$ при $x < \tau - 1 < 0$, $s > 0$

$$(15) \qquad |v_{\tau\tau}(v_\tau)^{-1}| < N(-x + rs^{r-1})^{-1} < N(1-\tau)^{-1}, \qquad N = \text{const}.$$

При $0 \geqslant x \geqslant 1 - \tau$, очевидно, $|v_{\tau\tau}(v_\tau)^{-1}| = 2(1-\tau)^{-1}$. Поэтому для некоторой константы N неравенство (15) имеет место при всех $0 \leqslant \tau < 1$, $|x| \leqslant X$.

Пусть

$$V(t, x, y) = v(t - y^2, x).$$

Тогда при $1/2 \leqslant t \leqslant 1$, $|x| \leqslant X$, $|y| \leqslant \sqrt{1/2}$

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^{-1} \right| = |4v_{\tau\tau}(v_\tau)^{-1}y^2 - 2| <$$
$$< 4Ny^2(1 - t + y^2)^{-1} + 2 < N_1 = \text{const}.$$

Поэтому при $1/2 \leqslant t \leqslant 1$, $|x| \leqslant X$, $|y| \leqslant \sqrt{1/2}$

$$V_t + 2VV_x - V_{yy}/N_1 < 0 \quad \text{при } x < 0.$$

Положив, наконец, $f(t, x, y) = V(t - 1/2, 2x, yN_1^{-1/2})$, мы получим функцию f, которая обладает нужными свойствами при $0 \leqslant t < T = 1/2$, $|x| \leqslant X/2$, $|y| \leqslant (2N_1)^{-1/2}$.

Поступила в редакцию 11.08.1970
Переработанный вариант 26.05.1971

Цитированная литература

1. Н. Д. Введенская. О трехмерном ламинарном пограничном слое на затупленном теле. Механ. жидкости и газа, 1966, № 5, 36—40.
2. О. А. Олейник. О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Матем. сб., 1966, 69 (111), 111—140.
3. Г. М. Фатеева. Краевые задачи для квазилинейных параболических уравнений. Матем. сб., 1968, 76 (118), 537—565.
4. О. А. Олейник, С. Н. Кружков. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка. Успехи матем. наук, 1961, 16, № 5, 115—156.