

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ МНОГОМЕРНОЙ ТРИ-ТКАНИ

А. М. Шелехов

1. Теория тканей еще сравнительно молодой раздел математики, поэтому одной из основных проблем в этой области является проблема классификации. В большинстве работ, посвященных геометрическим и алгебраическим аспектам теории тканей (см. библиографию в обзорах [1, 7]), рассматриваются специальные классы тканей, то есть эти работы имеют, по существу, классификационный характер.

Основоположники теории тканей: Томсен (1899—1934), Бляшке (1885—1962), Рейдемейстер (1893—1971), ученик и соавтор Бляшке Г. Боль (1906), Чжэнь (1911) использовали топологическую классификацию, связанную с замыканием фигур определенного типа, образованных слоями ткани. Так возникли три-ткани T (Томсена), R (Рейдемейстера), B_l , B_r , B_m (левые, правые и средние ткани Боля), три-ткани H (шестиугольные). На них замыкаются фигуры с соответствующими названиями, изображенные на рис. 1—6:

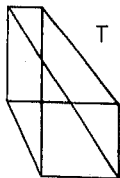


Рис. 1

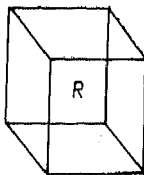


Рис. 2

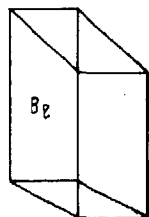


Рис. 3

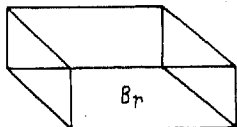


Рис. 4

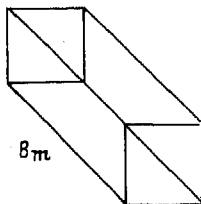


Рис. 5

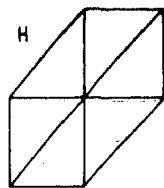


Рис. 6

Изучение альтернативных тел, начавшееся с работы [1, библиография 101]* Муфанг (1905), дало повод к рассмотрению тканей, названных впоследствии тканями M , на которых выполняются все условия замыкания типа B , то есть B_i, B_r и B_m .

Классификация по условиям замыкания имеет и алгебраическое обоснование. Три-ткань W , как известно [6], можно рассматривать как класс изотопных между собой луп, называемых координатными лупами этой ткани**. Это дает возможность описывать свойства три-тканей в терминах теории квазигрупп и луп, и наоборот, известные свойства последних переносить на ткань. В частности, каждому условию замыкания на ткани W отвечает выполнение определенного тождества в ее координатных лупах. Например, координатные лупы три-ткани R являются группами***, ткани T — абелевыми группами; в координатных лупах ткани Боля выполняется какое-либо из тождеств Боля [6], а в координатных лупах ткани H выполняется тождество моноассоциативности: $x^2 \cdot x = x \cdot x^2$.

2. Многомерные три-ткани на гладких многообразиях целесообразно классифицировать в терминах определяемых ими g -структур. Как видно из [1], такая классификация является весьма емкой. В рамках этой классификации каждый из перечисленных выше классов тканей характеризуется прежде всего особым типом присоединенной аффинной связности Γ . Впервые связность Γ появилась в работе Чжэня [1, библиография 95]. В ней, в частности, были даны тензорные характеристики тканей T, R, H , чем было положено начало главному направлению исследований в современной дифференциально-геометрической теории тканей, а именно изучению тканей со специальным строением основных тензоров.

Однако система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая произвольную многомерную три-ткань, была записана в [1, библиография 95] не в инвариантной форме, и ее сложность, по-видимому, ограничила область ее применения результатами, полученными в [1, библиография 95]. Структурные уравнения три-ткани в современном инвариантном виде были найдены в 1969 г. М. А. Акивисом [1, библиография 2]. Разработанный им на основе новых геометрических методов способ исследований**** позволил, в частности, охарактеризовать перечисленные выше классы тканей строением их тензоров кривизны и кручения, b_{jhi}^i и a_{jh}^i (см. таблицу):

* Ссылка на работу [101] из списка литературы к обзору [1].

** В дальнейшем термин «ткань» будет обозначать «три-ткань».

*** Вследствие этого ткани R называют еще групповыми тканями.

**** Обзор современных дифференциально-геометрических методов см.

T	R	M	B_l	B_r	B_m	H
$a_{jk}^i=0$ $b_{jkl}^i=0$	$b_{jkl}^i=0$	$b_{jkl}^i=$ $=b_{[jkl]}^i$	$b_{(jk)l}^i=0$	$b_{(j k l)}^i=0$	$b_{j(jkl)}^i=0$	$b_{(jkl)}^i=0$

Заметим, что необходимость приведенных соотношений на тензор b_{jkl}^i для тканей Боля была доказана в 1971 г. [1, библиограф. 16], а достаточность — только в 1978 г. [1, библиограф. 81].

В 1985 г. Киквава [52] приходит к тем же структурным уравнениями связности Γ (по-видимому, не зная о работе [1, библиограф. 2]) и предлагает называть ее связностью Чжэня. Более подробно свойства этой связности обсуждаются в [1, библиограф. 19], см. также [53].

Кроме описанной классификации, возможны и другие, связанные не со строением основных тензоров, а со способом задания ткани. Так, в один класс можно объединить три-ткани, определяемые естественным способом на гладкой поверхности проективного пространства некоторой кубической кривой l . Эта тематика инспирирована, по существу, задачей, предложенной еще Бляшке: описать все шестиугольные ткани, образованные тремя пучками окружностей (задача полностью не решена до сих пор, см. [19, 27]): случай, когда кривая l распадается на три прямые, лежащие в одной плоскости, рассматривался в [1, библиограф. 35—38], на три прямые общего положения — в [19, 27]; когда l — плоская кубика или произвольная норм-кривая — в [13—15] и [33—35], соответственно. Классификации такого рода мы оставляем в стороне.

3. За последнее десятилетие получены два существенных результата, касающиеся g -структуры, присоединенной к три-ткани. Во-вторых, поставлены и решены две важные проблемы классификации — проблемы грассманизуемости и алгебраизуемости многомерных d -тканей при $d \geq 3$ (подробности см. в [1]*). Их решение привело к рассмотрению естественно возникающей на d -ткани почти грассмановой структуры $AG(n, n+r)$, которая задается полем алгебраических конусов (конусов Сегре), несущих две серии плоских образующих.

Во-вторых, что для нас более актуально, в 1976 году в [1, библиограф. 7] было замечено, что g -структуры, определяемые три-тканями T, R, B, M , являются замкнутыми, то есть ткани этих типов определяются конечным числом постоянных. Отсюда вытекала необходимость изучения класса тканей, обладающих замкнутой g -структурой, причем в первую очередь нужно было выяснить, будет ли замкнутой g -структура, опре-

* В обзоре [1] имеется большая часть излагаемых нами сведений о три-тканях, здесь же мы их дополняем и рассматриваем с другой точки зрения.

деляемая шестиугольными тканями. Для четырехмерных шестиугольных тканей положительный ответ на этот вопрос следует из работы [9], однако примененная там методика исследований существенно использует четырехмерность и поэтому не может быть обобщена на произвольную размерность. Только в 1986 году нам удалось доказать в [41], что шестиугольная ткань любой размерности определяет замкнутую g -структуру. Это доказательство приведено в § 3.

Замкнутые g -структуры, определяемые три-тканями (в [41] мы назвали их g_w -структурами), также классифицируются с помощью основных тензоров. Согласно определениям из [1, библи. 7], ткани T определяют замкнутую g_w -структуру класса 0; ткани R и M — g_w -структуру класса 1, ткани Боля — класса 2. Мы предлагаем (как результат обсуждения этого вопроса с автором статьи [1, библи. 7]) несколько изменить классификацию, положив в основу порядок фундаментального дифференциально-геометрического объекта рассматриваемой ткани. В соответствии с этим ткани T будут определять замкнутую g_w -структуру класса 1, так как их основные тензоры a^i_{jk} и b^i_{jkl} , определяемые в дифференциальной окрестности второго и третьего порядка, равны нулю. Ткани R и M будут определять замкнутую g_w -структуру класса 2, так как их тензор кривизны полностью выражается через тензор кручения, определяемый через производные не выше второго порядка от функций ткани. Ткани Боля определяют замкнутую g_w -структуру класса 3, так как производные их тензора кривизны выражаются через сам этот тензор и тензор кручения. Шестиугольные ткани, как доказано в [41], определяют замкнутую g_w -структуру класса 4 (в [41] мы писали «класса 3», придерживаясь терминологии статьи [1, библи. 7]).

Таким образом, все известные типы тканей, определяемые условиями замыкания — T , R , M , B , H , обладают замкнутой g_w -структурой. В связи с этим возникают по крайней мере две проблемы, которые мы и обсуждаем в настоящей работе: 1) указать наиболее общие аналитические условия, приводящие к замкнутости g_w -структуры; 2) выяснить, существуют ли ткани с замкнутой g_w -структурой, в координатных лупах которых выполняются тождества более слабые, чем тождество моноассоциативности (характеризующее шестиугольные ткани), и описать такие тождества.

Первая из этих задач рассматривалась в нашей работе [41]. Из нее видно, что решение поставленных проблем связано с рассмотрением дифференциальных окрестностей высших порядков. Поэтому нашей первоочередной задачей в настоящей статье будет описание свойств дифференциально-геометрических объектов высших порядков произвольной многомерной три-ткани. Этот фундаментальный вопрос общей теории тканей рассматривается в §§ 1—2.

Решение первой задачи основано на следующем наблюдении: можно сказать, что ткани, перечисленные в таблице 1, характеризуются различной степенью кососимметричности их тензора кривизны. В [42] мы рассмотрели еще один класс тканей, определяющих замкнутую g_W -структуру, но уже класса 6: оказалось, что и этот класс характеризуется определенной степенью кососимметричности некоторых тензоров четвертой дифференциальной окрестности. Обобщение этого факта и составляет один из основных результатов настоящей работы: в § 5 доказано, что замкнутость симметрированных основных тензоров типа (\hat{p}) , принадлежащих дифференциально-геометрическому объекту порядка p ткани W , влечет замкнутость определяемой ею g_W -структуры.

4. Рассматриваемая нами теория многомерных три-тканей имеет локальный характер, поэтому координатные лупы многомерной три-ткани (см. п. 1) являются локальными лупами. Связь между три-тканями, заданными на гладком многообразии, и гладкими локальными лупами была впервые проанализирована в [1, библиограф. 4]. В [1, библиограф. 16] тензоры кривизны и кручения ткани были выражены через коэффициенты разложения в ряд уравнений ее локальной координатной лупы. Это позволило, в частности, получить необходимые условия замыкания, приведенные в таблице 1. Выражения для ковариантных производных тензора кривизны через коэффициенты указанного разложения найдены в [42]. Обобщая эти результаты, в § 7 настоящей работы мы доказываем, что через коэффициенты разложения можно выразить компоненты дифференциально-геометрического объекта произвольного порядка многомерной три-ткани, то есть ковариантные производные любого порядка ее тензора кривизны. Более того, в § 7, в предположении аналитичности три-ткани W , доказывается, что если координатную лупу отнести к каноническим координатам, то можно получить и обратное, то есть выразить коэффициенты канонического разложения через компоненты дифференциально-геометрического объекта соответствующего порядка ткани. Используя этот факт, мы получаем в § 7 характеристическое свойство локальных координатных луп ткани с замкнутой g_W -структурой: оказывается, что каноническое разложение таких луп определяется конечным числом первых членов разложения. Таким образом дано обобщение известного свойства групп Ли, аналитических альтернативных луп, луп Муфанг и Боля (см. [1, библиограф. 61, 60, 67] и [29, 30]), на возможность которого указывалось еще в [1].

Полученные в работе результаты носят локальный характер. В списке литературы приведены в основном работы по три-тканям, вышедшие после 1983 года, и поэтому не вошедшие в обзор [1].

§ 1. СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ ТРИ-ТКАНИ

1. Рассмотрим три-ткань W , образованную тремя слоениями λ_α , $\alpha=1, 2, 3$, коразмерности r общего положения на гладком многообразии M размерности $2r$. Слоения λ_α зададим системами Пфаффа

$$\omega^1_1 = 0, \quad \omega^1_2 = 0, \quad \omega^1_1 + \omega^1_2 = 0,$$

где ω^i_1 и ω^i_2 — базисные формы на M . Условия интегрируемости этих систем, следуя [1, библиограф. 2], запишем в виде

$$d\omega^i_1 = \omega^j_1 \wedge \omega^i_j + a^i_{jk} \omega^j_1 \wedge \omega^k_1, \quad d\omega^i_2 = \omega^j_2 \wedge \omega^i_j - a^i_{jk} \omega^j_2 \wedge \omega^k_2, \quad (1.1)$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + b^i_{jkl} \omega^k_j \wedge \omega^l_1. \quad (1.2)$$

Связность Γ (Чжэня) определяется на M формами

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega^j_1 & 0 \\ 0 & \omega^i_j \end{pmatrix},$$

и уравнения (1.1) и (1.2) суть ее структурные уравнения. Упомянутая во введении g_W -структура порождается группой Ли матриц вида Ω .

Тензоры a^i_{jk} и b^i_{jkl} называются, соответственно, тензором кручения и кривизны ткани W . Они связаны конечными и дифференциальными соотношениями, получающимися при дифференцировании уравнений (1.1):

$$b^i_{[jkl]} = 2a^m_{[jk} a^i_{m|l]}, \quad (1.3)$$

$$\nabla a^i_{jk} = b^i_{[j|l|k]} \omega^l_1 + b^i_{[jkl]} \omega^l_2. \quad (1.4)$$

Здесь ∇ — оператор ковариантного дифференцирования в связности Чжэня, так что, например, $\nabla a^i_{jk} = da^i_{jk} + a^m_{jk} \omega^i_m - a^i_{mk} \omega^m_j - a^i_{jm} \omega^m_k$.

Положим

$$\nabla b^i_{jkl} = c^i_{jklj_1} \omega^{j_1}_1 + c^i_{jklr+j_1} \omega^{j_1}_2. \quad (1.5)$$

Внешнее дифференцирование уравнений (1.2) и (1.4) дает следующие соотношения, также приведенные в [1, библиограф. 2]:

$$c^i_{j[kl|j_1]} = b^i_{jml} a^m_{rj_1}, \quad c^i_{jkl[r+j_1]} = -b^i_{jkm} a^m_{lj_1}, \quad (1.6)$$

$$c^i_{[jkl]j_1 l} - c^i_{[j|l|k]r+j_1} = B^i_{jklj_1}, \quad (1.7)$$

где

$$B^i_{jklj_1} = a^p_{jk} b^i_{plj_1} - a^i_{jp} b^p_{klj_1} - a^i_{pk} b^p_{jlj_1}. \quad (1.8)$$

Покажем, что других конечных соотношений, кроме (1.3), связывающих тензоры a_{jk}^i и b_{jkl}^i , не будет. В самом деле, новые соотношения могли бы появиться в результате дифференцирования равенств (1.3) или исключения из равенств (1.6) и (1.7) тензоров типа $\binom{1}{4}$. Однако нетрудно проверить, что дифференцирование уравнений (1.3) приводит в силу соотношений (1.6) и (1.7) к тождествам. Далее, чтобы исключить из (1.6) и (1.7) тензоры $c_{jklj_1}^i$ и $c_{jklr+j_1}^i$, нужно проальтернировать эти соотношения по индексам j, k, l, j_1 . В результате получим:

$$c_{[jklj_1]}^i = b_{[j|p|l}^i a_{k]j_1}^p, \quad c_{[jklr+j_1]}^i = -b_{[jkl|p]}^i a_{r]j_1}^p, \\ c_{[jklj_1]}^i - c_{[jklr+j_1]}^i = B_{[jklj_1]}^i.$$

Отсюда следуют равенства

$$b_{[j|p|l}^i a_{k]j_1}^p + b_{[jkl|p]}^i a_{r]j_1}^p = B_{[jklj_1]}^i,$$

которые, как легко проверить, обращаются в тождества в силу обозначений (1.8). Итак, дифференциально-геометрический объект третьего порядка три-ткани W определяется тензорами a_{jk}^i и b_{jkl}^i , компоненты которых связаны конечными соотношениями (1.3).

2. Дифференцируя уравнения (1.5), получим:

$$\nabla c_{jklj_1}^i \wedge \omega_1^{j_1} + \nabla c_{jklr+j_1}^i \wedge \omega_2^{j_1} = \\ = B_{jklj_1j_2}^i \omega_1^{j_1} \wedge \omega_2^{j_2} - c_{jklm}^i a_{j_1j_2}^m \omega_1^{j_1} \wedge \omega_1^{j_2} + c_{jklr+m}^i a_{j_1j_2}^m \omega_2^{j_1} \wedge \omega_2^{j_2}, \quad (1.9)$$

где обозначено

$$B_{jklj_1j_2}^i = b_{jkl}^m b_{m j_1 j_2}^i - b_{mkl}^i b_{j_1 j_2}^m - b_{j_1 m l}^i b_{k j_2}^m - b_{j_1 k m}^i b_{l j_2}^m. \quad (1.10)$$

Положим

$$\nabla c_{jklj_1}^i = c_{jklj_1j_2}^i \omega_1^{j_2} + c_{jklj_1r+j_2}^i \omega_2^{j_2}, \quad (1.11)$$

$$\nabla c_{jklr+j_1}^i = c_{jklr+j_1j_2}^i \omega_1^{j_2} + c_{jklr+j_1r+j_2}^i \omega_2^{j_2}.$$

Тогда из (1.9) следуют соотношения

$$(1) \quad c_{jkl[j_1j_2]}^i = c_{jklm}^i a_{j_1j_2}^m, \quad (2) \quad c_{jkl[r+j_1r+j_2]}^i = -c_{jklr+m}^i a_{j_1j_2}^m, \quad (1.12)$$

$$-c_{jklj_1r+j_2}^i + c_{jklr+j_2j_1}^i = B_{jklj_1j_2}^i. \quad (1.13)$$

Из уравнений (1.13) вытекает, что из четырех имеющихся тензоров типа $\binom{1}{5}$ только 3 независимых. В качестве таковых возьмем тензоры $c_{jklj_1j_2}^i$, $c_{jklj_1r+j_2}^i$, $c_{jklr+j_1r+j_2}^i$, которые назовем основными тензорами пятой дифференциальной окрестности

ткани W . Основные тензоры удовлетворяют соотношениям (1.12), а также соотношениям, получающимся при ковариантном дифференцировании равенств (1.6) и (1.7). Из (1.6) имеем:

$$\begin{aligned} (1) \quad c^i_{j[k|l|j_1]j_2} &= c^i_{jmlj_2} a^m_{kj_1} + b^i_{jml} b^m_{[k|j_2|j_1]}, \\ (2) \quad c^i_{j[k|l|j_1]r+j_2} &= c^i_{jmlr+j_2} a^m_{kj_1} + b^i_{jml} b^m_{[k|j_1]j_2}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$(3) \quad c^i_{j[k|l+r+j_1]r+j_2} = -c^i_{jkmr+j_2} a^m_{lj_1} - b^i_{jkm} b^m_{[l|j_1]j_2},$$

$$(4) \quad c^i_{j[k|l|j_1]r+j_2} = -c^i_{jkmj_1} a^m_{lj_2} - b^i_{jkm} b^m_{[l|j_1|j_2]} - B^i_{j[k|l|j_1]j_2},$$

причем последняя серия соотношений получается с учетом (1.13). Дифференцируя (1.7) и пользуясь (1.13), придем к равенствам:

$$(1) \quad c^i_{[j|k|l|j_1]j_2} - c^i_{[j|l|k]j_2r+j_1} = B^i_{jklj_1j_2} + B^i_{[j|l|k]j_2j_1}, \quad (1.15)$$

$$(2) \quad c^i_{[j|k|l|j_1]lr+j_2} - c^i_{[j|l|k]r+j_1r+j_2} = B^i_{jklj_1r+j_2},$$

где

$$B^i_{jklj_1j_2} = \nabla_{j_2} B^i_{jklj_1}, \quad B^i_{jklj_1r+j_2} = \nabla_{r+j_2} B^i_{jklj_1}.$$

Итак, основные тензоры дифференциальной окрестности пятого порядка три-ткани удовлетворяют соотношениям (1.12), (1.14), (1.15).

Эти соотношения не являются независимыми. Например, из (1.12(1)) следует, что

$$c^i_{j[k|l|j_1]j_2} = c^i_{j[k|l|m]j_1j_2} a^m_{j_2j_1}. \quad (1.16)$$

С другой стороны, альтернируя соотношения (1.14(1)) по индексам k, j_1, j_2 , получим другое выражение для того же самого тензора:

$$c^i_{j[k|l|j_1]j_2} = c^i_{jmlj_2} a^m_{kj_1} + b^i_{jml} b^m_{[k|j_2]j_1}. \quad (1.17)$$

Сравнивая с (1.16), приходим к соотношениям

$$c^i_{j[k|l|m]j_1j_2} a^m_{j_2j_1} = c^i_{jmlj_2} a^m_{kj_1} + b^i_{jml} b^m_{[k|j_2]j_1},$$

которые можно переписать в виде

$$c^i_{j[k|l|m]j_1j_2} a^m_{j_2j_1} + c^i_{j[j_1|l|m]j_2k} a^m_{j_2k} + c^i_{j[j_2|l|m]j_1k} a^m_{kj_1} = \frac{3}{2} b^i_{jml} b^m_{[k|j_2]j_1}.$$

Пользуясь далее соотношениями (1.16) и (1.13), убеждаемся, что последние равенства удовлетворяются тождественно. Таким образом, два приведенных выше выражения (1.16) и (1.17) для тензора $c^i_{j[k|l|j_1]j_2}$ эквивалентны, так что системы (1.12(1)) и (1.14(1)), из которых они получаются, не являются независимыми. Компоненты тензоров типа $\binom{1}{5}$ можно исключить и из других уравнений системы (1.12), (1.14), (1.15). При этом всегда будут получаться тождества, то есть никаких новых соотношений на тензоры c^i_{jklm} и c^i_{jklr+m} не последует. Таким образом, соотношения (1.6)

$$+ C_{jkr+j_1j_2\dots j_{s-1}r+m}^i a_{j_s j_{s+1}}^m \omega_2^j \wedge \omega_2^{j_{s+1}},$$

(2.3)

$$\begin{aligned} & \nabla C_{jkr+j_1r+j_2\dots r+j_{s-1}j_s}^i \omega_1^j + \nabla C_{jkr+j_1r+j_2\dots r+j_s}^i \omega_2^j = \\ & = B_{jkr+j_1\dots r+j_{s-1}j_s j_{s+1}}^i \omega_1^j \wedge \omega_2^{j_{s+1}} - C_{jkr+j_1\dots r+j_{s-1}m}^i a_{j_s j_{s+1}}^m \omega_1^j \wedge \omega_1^{j_{s+1}} + \\ & + C_{jkr+j_1\dots r+j_{s-1}r+m}^i a_{j_s j_{s+1}}^m \omega_2^j \wedge \omega_2^{j_{s+1}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_{jkr+j_1\dots r+j_u j_{u+1}\dots j_s j_{s+1}}^i &= C_{jkr+j_1\dots r+j_u j_{u+1}\dots j_{s-1}}^m b_{m j_s r+j_{s+1}}^i - \\ & - C_{mkr+j_1\dots r+j_u j_{u+1}\dots j_{s-1}}^i b_{k j_s r+j_{s+1}}^m - \dots \\ & \dots - C_{jkr+j_1\dots r+j_u j_{u+1}\dots j_{s-2}m}^i b_{j_{s-1} j_s r+j_{s+1}}^m. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Полагая в уравнениях (2.3)

$$\begin{aligned} \nabla C_{jkr+j_1j_2\dots j_s}^i &= C_{jkr+j_1j_2\dots j_s j_{s+1}}^i \omega_1^{j_{s+1}} + C_{jkr+j_1j_2\dots j_s r+j_{s+1}}^i \omega_2^{j_{s+1}}, \\ \nabla C_{jkr+j_1j_2\dots j_{s-1}r+j_s}^i &= C_{jkr+j_1j_2\dots j_{s-1}r+j_s j_{s+1}}^i \omega_1^{j_{s+1}} + \\ & + C_{jkr+j_1j_2\dots j_{s-1}r+j_s r+j_{s+1}}^i \omega_2^{j_{s+1}}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\nabla C_{jkr+j_1r+j_2\dots r+j_s}^i = C_{jkr+j_1\dots r+j_s r+j_{s+1}}^i \omega_1^{j_{s+1}} + C_{jkr+j_1\dots r+j_{s+1}}^i \omega_2^{j_{s+1}},$$

получим соотношения двух типов:

$$\begin{aligned} (1) \quad C_{jkr+j_1j_2\dots j_{s-1}[j_s j_{s+1}]}^i &= C_{jkr+j_1j_2\dots j_{s-1}m}^i a_{j_s j_{s+1}}^m, \\ (2) \quad C_{jkr+j_1j_2\dots j_{s-1}[r+j_s r+j_{s+1}]}^i &= -C_{jkr+j_1j_2\dots r+j_{s-1}r+m}^i a_{j_s j_{s+1}}^m, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} C_{jkr+j_1j_2\dots j_u r+j_{u+1}\dots [r+j_s r+j_{s+1}]}^i &= -C_{jkr+j_1j_2\dots j_u r+j_{u+1}\dots r+j_{s-1}m}^i a_{j_s j_{s+1}}^m \\ & \dots \\ C_{jkr+j_1\dots r+j_{s-1}[r+j_s r+j_{s+1}]}^i &= -C_{jkr+j_1\dots r+j_{s-1}m}^i a_{j_s j_{s+1}}^m, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} -C_{jkr+j_1j_2\dots j_s r+j_{s+1}}^i + C_{jkr+j_1j_2\dots j_{s-1}r+j_{s+1}j_s}^i &= B_{jkr+j_1j_2\dots j_s j_{s+1}}^i, \\ -C_{jkr+j_1r+j_2\dots j_s r+j_{s+1}}^i + C_{jkr+j_1r+j_2\dots r+j_{s+1}j_s}^i &= B_{jkr+j_1r+j_2j_2\dots j_s j_{s+1}}^i, \end{aligned}$$

$$-c_{jkr+j_1r+j_2\dots r+j_uj_{u+1}\dots j_s r+j_{s+1}}^i + c_{jkr+j_1r+j_2\dots r+j_uj_{u+1}\dots r+j_{s+1}j_s}^i = B_{jkr+j_1r+j_2\dots r+j_uj_{u+1}\dots j_{s+1}}^i \quad (2.7)$$

.....

$$-c_{jkr+j_1\dots r+j_{s-1}j_s r+j_{s+1}}^i + c_{jkr+j_1\dots r+j_{s-1}r+j_{s+1}j_s}^i = B_{jkr+j_1\dots r+j_{s-1}j_s j_{s+1}}^i$$

Доказательство проведем индукцией по s . Утверждения, сформулированные в п. 2 § 1, составляют базу индукции. Предположим теперь, что тензоры (2.1) являются основными, и докажем, что в следующей дифференциальной окрестности основными будут тензоры

$$c_{jkr+j_1j_2\dots j_s j_{s+1}}^i, c_{jkr+j_1j_2\dots j_s r+j_{s+1}}^i, \dots, c_{jkr+j_1\dots r+j_{s+1}}^i \quad (2.8)$$

Сначала заметим, что каждый тензор типа $\binom{1}{s+3}$ является ковариантной производной некоторого тензора типа $\binom{1}{s+2}$, причем тензор T типа $\binom{1}{s+2}$ порождает два тензора: $T_j = \nabla_j T$ и $T_{r+j} = \nabla_{r+j} T$. По предположению индукции тензор T выражается через основные тензоры, а так как производные по $\frac{1}{2}$ от основных тензоров также будут основными тензорами, то отсюда вытекает, что через основные тензоры выражается и тензор T_{r+j} .

Рассмотрим теперь тензоры вида T_j . Среди них только один, а именно тензор $c_{jkr+j_1j_2\dots j_{s+1}}^i$ является основным; остальные содержат хотя бы один индекс $r+j_u$, стоящий не на последнем месте, и, следовательно, основными не являются. Но так как тензор T выражается через основные тензоры, то тензор T выражается через их производные вида $c_{jkr+j_1j_2\dots j_u r+j_{u+1}\dots r+j_s j_{s+1}}^i$

Эти тензоры, в свою очередь, с помощью соотношений (2.7) выражаются через тензоры типа T_{r+j} , а поскольку последние, как уже было показано, выражаются через основные тензоры, то через них выражаются и тензоры T_j . Теорема доказана.

Итак, дифференциально-геометрический объект порядка $s+3$ три-ткани W содержит s основных тензоров типа $\binom{1}{s+3}$, которые удовлетворяют соотношениям (2.6) и соотношениям, получающимся при ковариантном дифференцировании равенств (1.14), (1.15) и им подобным. Другие (не основные) тензоры, входящие в дифференциально-геометрический объект порядка $s+3$, выражаются через основные с помощью соотношений (2.7) и им аналогичным, которые получаются при дифференцировании соотношений вида (1.13).

2. Как видно из соотношений (1.3), (1.6), (1.7) и т. д., (2.6), некоторые альтернации тензоров ткани выражаются через тен-

зоры меньшей валентности. Этот факт приводит нас к следующему определению: будем говорить, что тензор T , принадлежащий дифференциально-геометрическому объекту порядка s три-ткани W , является замкнутым, если он выражается через компоненты объектов порядка меньше s .

Лемма 2.1 Пусть

$$T_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} (c^i_{j_1 r+k_1 j_2 \dots j_\alpha r+k_2 \dots r+k_\beta})$$

— основной тензор типа $\left(1 + \alpha + \beta\right)$. Тогда его альтернация по любой паре индексов из набора $j_1, j_2, \dots, j_\alpha$, или по любой паре индексов из набора k_1, k_2, \dots, k_β является замкнутой.

Доказательство. 1) Для $\beta=1$ и любого α из соотношений (1.6(1)), (1.12(1)) и т. д., (2.6) следует, что альтернации тензоров типа $\left(\frac{1}{1+\alpha+1}\right)$ по каждой паре соседних индексов из набора $j_1, j_2, \dots, j_\alpha$ являются замкнутыми. Отсюда вытекает замкнутость альтернаций тех же тензоров и по любой паре указанных индексов.

2) При $\beta=2$ и $\alpha=1$ справедливость леммы вытекает из (1.6(2)). Предположим, что лемма справедлива при $\beta=2$ и $\alpha=s$, и докажем, что она имеет место при $\beta=2$ и $\alpha=s+1$. Из формулы (2.7) имеем:

$$c^i_{j_1[r+k_1]j_2 \dots j_{s+1}[r+k_2]} = c^i_{j_1[r+k_1]j_2 \dots j_s[r+k_2]j_{s+1}} - B^i_{j_1[k_1]j_2 \dots j_{s+1}[k_2]}. \quad (2.9)$$

По предположению индукции тензор $c^i_{j_1[r+k_1]j_2 \dots j_s[r+k_2]}$ является замкнутым. Так как

$$c^i_{j_1[r+k_1]j_2 \dots j_s[r+k_2]j_{s+1}} = c^i_{j_1[r+k_1]j_2 \dots j_s[r+k_2], j_{s+1}},$$

то замкнутым будет и тензор $c^i_{j_1[r+k_1]j_2 \dots j_s[r+k_2]j_{s+1}}$. Кроме того, из (2.4) видно, что тензор $B^i_{j_1[k_1]j_2 \dots j_{s+1}[k_2]}$ также является замкнутым. Следовательно, вся правая часть в (2.9) выражается через тензоры меньшей валентности, что и требовалось доказать.

3) Рассмотрим теперь тензор $T_{\alpha\beta}$ типа $\left(1 + \alpha + \beta\right)$, где $\beta > 2$. Так как

$$c^i_{j_1 r+k_1 j_2 \dots j_\alpha r+k_2 \dots r+k_\beta} = c^i_{j_1 r+k_1 j_2 \dots j_\alpha, r+k_2 \dots r+k_\beta},$$

то в силу п. 1) альтернации тензора $T_{\alpha\beta}$ по любой паре индексов $j_1, j_2, \dots, j_\alpha$ замкнуты. Далее, так как

$$c^i_{j_1 r+k_1 j_2 \dots j_\alpha r+k_2 \dots r+k_\beta} = c^i_{j_1 r+k_1 j_2 \dots j_\alpha r+k_2, r+k_3 \dots r+k_\beta},$$

то в силу п. 2) альтернация тензора T по индексам k_1, k_2 является также замкнутой. Поскольку

$$c^i_{j_1 r + k_1 j_2 \dots j_\alpha r + k_2 \dots r + k_\beta} = c^i_{j_1 r + k_1 j_2 \dots j_\alpha r + k_2 r + k_3, r + k_4 \dots r + k_\beta},$$

то в силу (2.6(2)) альтернация тензора T по индексам k_2, k_3 будет замкнутой. Точно так же с помощью (2.6(1)) доказывается, что замкнуты альтернации тензора T по любой паре соседних индексов из набора k_2, k_3, \dots, k_β , а отсюда вытекает, что замкнуты его альтернации и по любой паре индексов из этого набора. Лемма доказана.

Аналогично доказывается

Л е м м а 2.2. Тензоры вида

$$-c^i_{jkr + t_1 \dots t_u p r + q t_{u+1} \dots t_s} + c^i_{jkr + t_1 \dots t_u r + q p t_{u+1} \dots t_s},$$

где индексы t_1, t_2, \dots, t_s могут принимать значения $j_1, \dots, j_\alpha, r + k_1, \dots, r + k_\beta$, являются замкнутыми.

Альтернированные части основных тензоров связаны еще соотношениями, которые получаются при дифференцировании соотношений (1.7). Дифференцируя, например, по первой серии переменных, получим:

$$c^i_{[jkl]j_1 j_2 \dots j_s} - c^i_{[j|l|k]r + j_1 j_2 \dots j_s} = B^i_{jkl j_1 j_2 \dots j_s} \quad (2.10)$$

В силу леммы 2.2 индекс $r + j_1$ в тензоре $c^i_{[j|l|k]r + j_1 j_2 \dots j_s}$ можно последовательно менять с соседними j_2, j_3, \dots, j_s , добавляя при каждой транспозиции соответствующие слагаемые в правую часть равенства (2.10). В результате оно примет вид:

$$c^i_{[jkl]j_1 j_2 \dots j_s} - c^i_{[j|l|k]j_2 \dots j_s r + j_1} = \bar{B}^i_{jkl j_1 j_2 \dots j_s} \quad (2.11)$$

При этом добавляем слагаемые как и тензор $B^i_{jkl j_1 j_2 \dots j_s}$, являются замкнутыми, так, что замкнутым будет и тензор $\bar{B}^i_{jkl j_1 j_2 \dots j_s}$. Аналогичными рассуждениями из (1.7) получим равенства

$$\begin{aligned} c^i_{[jkl]j_1 j_2 \dots j_u r + j_{u+1} \dots r + j_s} - c^i_{[j|l|k]j_2 \dots j_u r + j_1 r + j_{u+1} \dots r + j_s} \\ = \bar{\bar{B}}^i_{jkl j_1 \dots r + j_s}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где правые части являются замкнутыми тензорами. Можно доказать, что последние соотношения вместе с теми, которые приведены в лемме 2.1, суть единственные соотношения, связывающие основные тензоры три-ткани.

3. Итак, как только что показано, некоторые из альтернаций основных тензоров три-ткани являются замкнутыми, то есть их можно выразить через тензоры, принадлежащие дифференциальной окрестности меньшего порядка. Оказывается, что фор-

мулы, реализующие такое разложение, имеют определенный геометрический смысл. Продемонстрируем это на примере одной из альтернатив.

Лемма 2.3 ([41]). Имеет место формула

$$C_{j_1 j_2 | r+l | j_2 \dots j_{s-1} | r+j_s}^l = -C_{j_1 j_2 r+m j_2 \dots j_{s-1}}^l a_{e j_s}^m - \sum_{\Lambda(u, v, s-1)} C_{u+1}^k C_{\lambda_{u+2} | r+l | \lambda_{u+2} \dots j_{\lambda_v} | r+j_s | j_2 \dots j_{u^k} j_{\lambda_{v+1}} \dots j_{\lambda_{s-1}}}^l. \quad (2.13)$$

(Мы используем способ записи суммы, предложенный в [16, библиограф. 68]. Здесь

$$0 \leq u+1 < v < s-1, \lambda_{u+2} < \dots < \lambda_v, \lambda_{v+1} < \dots < \lambda_{s-1} \quad (2.14)$$

и $\Lambda(u, v, s-1)$ — множество перестановок, удовлетворяющих неравенствам (2.14), которые можно составить из чисел $u+2, \dots, s-1$). Выделенные индексы $r+l$ и $r+j_s$ стоят на третьем месте независимо от u и по ним проведена альтернатива. Доказательство проводится по числу нижних индексов. Оно довольно громоздко и поэтому здесь не дано.

Геометрический смысл формулы (2.13) проясняется в следующей теореме, доказательство которой основано именно на этой формуле.

Теорема 2.2 ([41]). Пусть ${}^* \bar{H}^p(\lambda_1)$ — главное расслоенное пространство неголономных p -кореперов [16] над базой λ_1 первого слоя три-ткани W . Тогда формы

$$\omega_{1}^i = \omega_{1}^i, \quad \omega_{1}^i, \dots, \omega_{1}^i j_2 \dots j_s,$$

где обозначено

$$\omega_{1}^i j_2 \dots j_s = C_{j_1 j_2 r+m j_2 \dots j_s}^i \omega_{2}^m, \quad s=2, 3, \dots, p, \quad (2.15)$$

задают в ${}^* \bar{H}^p(\lambda_1)$ некоторое подрасслоение.

Доказательство. Запишем уравнения структуры (1.1) и (1.2) три-ткани W в виде

$$d\omega_{1}^i = \omega_{1}^j \wedge \theta_j^i, \quad d\omega_{1}^i = \omega_{1}^k \wedge \omega_{1}^i + \omega_{1}^j \wedge \omega_{1}^i j_2, \quad (2.16)$$

где $\theta_j^i = \omega_j^i + \tilde{a}_{jk}^i \omega_k^j$ и

$$\omega_{1}^i j_2 = C_{j_1 j_2 r+m}^i \omega_{2}^m. \quad (2.17)$$

Мы хотим найти уравнения, которым удовлетворяют формы $\omega_{1}^i j_2, \omega_{1}^i j_2 j_3$, и т. д., определенные равенствами (2.15). Про дифференцируем эти равенства и воспользуемся уравнениями (2.5)

и определением оператора ∇ (§ 1, п.1). В результате получим:

$$\begin{aligned} d\omega_{1j_1j_2\dots j_{s-1}}^i &= (C_{j_1j_2r+mj_3\dots j_s}^i \omega_1^{js} + C_{j_1j_2r+mj_3\dots j_{s-1}r+j_s}^i \omega_2^{js} - \\ &- C_{j_1j_2r+mj_3\dots j_{s-1}}^k \omega_k^i + C_{kj_2r+mj_3\dots j_{s-1}}^k \omega_{j_1}^k + C_{j_1kr+mj_3\dots j_{s-1}}^k \omega_{j_2}^k + \\ &+ \underline{C_{j_1j_2r+kj_3\dots j_{s-1}}^k \omega_m^k} + \dots + C_{j_1j_2r+mj_3\dots j_{s-2}k}^k \omega_{j_{s-1}}^k) \wedge \omega_2^m + \\ &+ C_{j_1j_2r+mj_3\dots j_{s-1}}^i (\omega_2^k \wedge \omega_k^m - a_{j_s}^m \omega_2^{js} \wedge \omega_2^i). \end{aligned}$$

Подчеркнутые слагаемые уничтожаются. Раскрывая скобки и используя обозначения (2.15), имеем:

$$\begin{aligned} d\omega_{1j_1j_2\dots j_{s-1}}^i &= -\omega_1^{js} \wedge \omega_{1j_1j_2\dots j_s}^i - \omega_k^i \wedge \omega_{j_1j_2\dots j_{s-1}}^k + \\ &+ \omega_{j_1}^k \wedge \omega_{kj_2\dots j_{s-1}}^i + \dots + \omega_{j_{s-1}}^k \wedge \omega_{1j_1j_2\dots j_{s-2}k}^i + \\ &+ (-C_{j_1j_2|r+l|j_3\dots j_{s-1}|r+j_s}^i - C_{j_1j_2r+mj_3\dots j_{s-1}}^i a_{j_s}^m) \omega_2^l \wedge \omega_2^{js}. \quad (2.18) \end{aligned}$$

В силу формулы (2.13) последняя сумма преобразуется так:

$$\begin{aligned} &(-C_{j_1j_2|r+l|j_3\dots j_{s-1}|r+j_s}^i - C_{j_1j_2r+mj_3\dots j_{s-1}}^i a_{j_s}^m) \omega_2^l \wedge \omega_2^{js} = \\ &= \sum_{\Lambda(u, v, s-1)} C_{j_{u+1}j_{\lambda_{u+2}}|r+l|j_{\lambda_{u+3}}\dots j_{\lambda_v} C_{j_1j_2|r+j_s|j_3\dots j_u k j_{\lambda_{v+1}}\dots j_{\lambda_{s-1}2}}^i}^k \omega_2^l \wedge \omega_2^{js} = \\ &= \sum_{\Lambda(u, v, s-1)} \omega_{j_{u+1}j_{\lambda_{u+2}}j_{\lambda_{u+3}}\dots j_{\lambda_v}}^k \wedge \omega_{1j_1j_2\dots j_u k j_{\lambda_{v+1}}\dots j_{\lambda_{s-1}}}^i. \end{aligned}$$

Напомним, что в этой сумме $u+1 < v < s-1$. Слагаемые такого же типа, но при $v=u+1$, имеют вид:

$$\begin{aligned} &\sum_u \omega_{j_{u+1}}^k \wedge \omega_{1j_1j_2\dots j_u k j_{\lambda_{u+2}}\dots j_{\lambda_{s-1}}}^i = \\ &= \omega_{j_1}^k \wedge \omega_{kj_2\dots j_{s-1}}^i + \omega_{j_2}^k \wedge \omega_{1j_1k\dots j_{s-1}}^i + \dots + \omega_{j_{s-1}}^k \wedge \omega_{1j_1\dots j_{s-2}k}^i. \end{aligned}$$

При $v=s-1$ аналогичные слагаемые выглядят так:

$$\omega_{j_1j_2\dots j_{s-1}}^k \wedge \omega_k^i = -\omega_k^i \wedge \omega_{1j_1j_2\dots j_{s-1}}^k.$$

Поэтому формулу (2.18) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} d\omega_{1j_1j_2\dots j_{s-1}}^i &= \sum_{\Lambda(u, v, s-1)} \omega_1^{js} \wedge \omega_{1j_1j_2\dots j_s}^i + \\ &+ \sum_{\Lambda(u, v, s-1)} \omega_{j_{u+1}j_{\lambda_{u+2}}\dots j_{\lambda_v}}^k \wedge \omega_{1j_1j_2\dots j_u k j_{\lambda_{v+1}}\dots j_{\lambda_{s-1}}}^i, \quad (2.19) \end{aligned}$$

где u, v и s удовлетворяют уже соотношениям $0 \leq u < v \leq s-1$. Уравнения (2.19) в точности совпадают с уравнениями главного

расслоенного пространства $*\bar{H}(\lambda_1)$ неголономных кореперов над многообразием λ_1 [16], [16, библи. 71], базисными формами которого будут формы ω^i .

Аналогичным образом доказывается, что формы

$$\omega_{j_1 \dots j_s}^i = c_{j_1 m r + j_2 r + j_3 \dots r + j_s}^i \omega^m$$

определяют подрасслоение главного расслоения $*\bar{H}^p(\lambda_2)$ неголономных p -кореперов над многообразием λ_2 — базой второго слоя три-ткани W .

4. В заключении параграфа выясним геометрический смысл обращения в нуль тензоров $B_{jklj_1}^i, B_{jklj_1j_2}^i, \dots$, общий вид которых определяется формулой (2.4). Эти тензоры удобно рассматривать как препятствия, а именно, имеет место следующее утверждение: тензорное поле $T = (c_{jklr+j_1 \dots r+j_u'j_{u+1} \dots j_{s-1}}^i)$ является параллельным в связности Чжэня только тогда, когда

$$B_{jklr+j_1 \dots r+j_u'j_{u+1} \dots j_s j_{s+1}}^i = 0. \quad (2.20)$$

Действительно, если указанное поле параллельно, то вполне интегрируемо уравнение $\nabla \Gamma = 0$. Дифференцируя его внешним образом, приходим к условиям (2.20).

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМКНУТОСТИ g_W -СТРУКТУРЫ ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ТРИ-ТКАНИ

Шестиугольные три-ткани образуют наиболее широкий класс тканей, характеризующихся известными условиями замыкания, и включают в себя все остальные типы тканей, перечисленные в таблице 1. Именно поэтому изучение тканей H , в частности, обобщение для них известных свойств тканей R , M или B , представляет особенный интерес.

Аналитические шестиугольные три-ткани характеризуются условием

$$b_{(jkl)}^i = 0, \quad (3.1)$$

а их геометрическая характеристика состоит в том, что они несут максимальное количество двумерных трансверсально-геодезических поверхностей, на которых слои ткани высекают параллелизуемые подткани [1, библи. 2]. По другому можно сказать, что каждая координатная лупа ткани H обладает максимальным количеством одномерных подгрупп [1, библи. 1]. Тем не менее координатные лупы ткани H группами Ли не являются, и более того, для них не имеет места, вообще говоря, формула Кэмпбелла—Хаусдорфа, которая выполняется в альтернативных лупах [1, библи. 61].

С шестиугольными тканями связана одна проблема алгебраического характера. Дело в том, что тождество моноассоциативности $x^2 \cdot x = x \cdot x^2$, характеризующее ткани H , не будет (в отличие от тождеств Муфанг и Боля) универсальным [6]. Это означает, что лупа, изотопная моноассоциативной лупе, таковой, вообще говоря, не является. Но так как все координатные лупы ткани между собой главноизотопны, то в классе координатных луп ткани H тождество моноассоциативности имеет универсальный характер. Согласно [7, библиография 11, 10], в координатных лупах ткани H будет выполняться универсальное тождество

$$R_y^{-1} (R_y^{-1} x \cdot L_z^{-1} x) \cdot L_z^{-1} x = R_y^{-1} x \cdot L_z^{-1} (R_y^{-1} x \cdot L_z^{-1} x),$$

называемое производным от тождества $x^2 \cdot x = x \cdot x^2$, и содержащее, как видно, три переменные. Проблема формулируется так: существует ли универсальное тождество (и если «да», то какое), характеризующее класс моноассоциативных луп, но содержащее только две переменные и не содержащее неудобных операторов R_y^{-1} и L_z^{-1} ? Такая постановка вопроса оправдана тем, что аналогичная задача для право- или левоальтернативных луп имеет положительное решение. Например, тождество правой альтернативности $(xy)y = x \cdot y^2$ имеет универсальный характер в классе правых луп Боля, то есть луп с универсальным тождеством от трех переменных: $z(xy \cdot x) = (zx \cdot y)x$. В то же время производное тождество от тождества правой альтернативности содержит 4 переменные и имеет значительно более сложный вид. Заметим, что рассмотренный в [45] геометрический способ получения универсальных тождеств, давший возможность единообразно описать многие известные из них, в рассматриваемом случае оказывается неэффективным.

Главной же проблемой дифференциально-геометрического характера, связанной с шестиугольными три-тканями, является проблема замкнутости определяемой этими тканями g_w -структуры. Плоские шестиугольные ткани, как доказано еще в [1, библиография 92], являются параллелизуемыми и, следовательно, их g_w -структура будет замкнутой g -структурой класса 1. Четырехмерные шестиугольные ткани исследовались в [1, библиография 33], [9], где доказано, что эти ткани алгебраизуемы, то есть определяются некоторой кубикой проективного пространства P^3 . Отсюда вытекает, во-первых, что соответствующая g_w -структура является замкнутой, причем, как следует из [9], ее класс равен четырем. Во-вторых, ясно, что проблема классификации четырехмерных шестиугольных три-тканей оказывается решенной в том смысле, что сводится к классификации кубических поверхностей в P^3 .

Вопрос о замкнутости g_w -структуры шестиугольной три-ткани произвольной размерности оказывается значительно более сложным, и опирается на ряд утверждений алгебраического ха-

рактера. Итогом наших рассуждений в этом параграфе будет Теорема 3.1 ([41]). g_w -структура шестиугольной три-ткани любой размерности является замкнутой g -структурой класса 4.

Для доказательства понадобятся формулы из § 1. Чтобы запись была более обозримой и компактной, заменим в этих формулах индексы j_1 и j_2 на m и n и обозначим

$$c_{jklm}^i = c_{jklm}^i, \quad c_{jklr+m}^i = c_{2jklm}^i,$$

$$c_{jklmn}^i = X_{jklmn}^i, \quad c_{jklmr+n}^i = Y_{jklmn}^i, \quad c_{jklr+mr+n}^i = Z_{jklmn}^i. \quad (3.3)$$

Тогда дважды дифференцируя соотношения (3.1) с помощью оператора ∇ (см. § 1), получим:

$$X_{(jkl)mn}^i = 0, \quad Y_{(jkl)mn}^i = 0, \quad Z_{(jkl)mn}^i = 0. \quad (3.4)$$

Согласно определению замкнутой g -структуры [1, библи. 7], нужно показать, что тензоры c_{jklmn}^i , $c_{jklmr+n}^i$, $c_{jklr+mn}^i$, $c_{jklr+mr+n}^i$ являются замкнутыми, то есть выражаются через тензоры a_{jk}^i , b_{jkl}^i , c_{jklm}^i , c_{jklr+m}^i . Но по (1.13) $c_{jklr+mn}^i$ выражается через c_{jklr+m}^i , поэтому, в силу обозначений (3.3), достаточно доказать замкнутость тензоров X_{jklmn}^i , Y_{jklmn}^i , Z_{jklmn}^i .

Лемма 3.1. Для произвольной три-ткани имеют место соотношения

$$X_{[jkl]mn}^i c_{\rho m [j|n] a_{kl}^{\rho}} - a_{[jk}^{\rho} c_{l]m\rho n}^i + 2a_{\rho [j}^i c_{k|m]l\rho n}^{\rho} + b_{\rho m [j}^i b_{k|n]l}^{\rho} + b_{\rho n [j}^i b_{k|m]l}^{\rho} - b_{\rho [j|n]k}^i b_{l]m\rho}^i - b_{\rho [j|m]k}^i b_{l]n\rho}^i, \quad (3.5)$$

$$Z_{[jkl]mn}^i = a_{[jk}^{\rho} c_{2\rho]l]mn}^i - a_{[jk}^{\rho} c_{2l]m\rho n}^i + 2a_{\rho [j}^i c_{2k|m]n}^{\rho} + b_{\rho [l|m]k}^i b_{j]n\rho}^i - b_{\rho [l|n]k}^i b_{j]m\rho}^i - b_{\rho [j|k]n}^i b_{l]m\rho}^i - b_{\rho [j|m]k}^i b_{l]n\rho}^i, \quad (3.6)$$

$$Y_{[jkl]mn}^i = c_{2\rho m [l|n] a_{jk}^{\rho}} - a_{[jk}^{\rho} c_{2l]m\rho n}^i + 2a_{\rho [l}^i c_{2j|m]k}^{\rho} + b_{\rho m [l}^i b_{j]k]n}^{\rho} + b_{\rho [l|n]k}^i b_{j]m\rho}^i - b_{\rho [j|k]n}^i b_{l]m\rho}^i - b_{\rho [j|m]k}^i b_{l]n\rho}^i. \quad (3.7)$$

Для доказательства нужно продифференцировать с помощью оператора ∇ уравнения (1.3), воспользоваться уравнениями (1.4) и (1.5) и учесть обозначения (3.3).

Лемма 3.2. Имеют место тождества:

$$T_{jkl}^i = T_{(jkl)}^i + \frac{1}{3} T_{[j|k]l}^i + \frac{1}{3} T_{[j|l]k}^i + T_{[lk]j}^i + \frac{4}{3} T_{[j|k|l]}^i + \frac{2}{3} T_{[k|l]j}^i, \quad (3.8)$$

$$T_{jkl}^i = T_{(jkl)}^i + \frac{5}{3} T_{[j|k]l}^i + \frac{1}{3} T_{[l]j]k}^i + T_{[kl]j}^i + \frac{4}{3} T_{k[j|l]}^i + \frac{2}{3} T_{l[k]j}^i. \quad (3.9)$$

Оба проверяются непосредственно. Первое из этих представлений для тензора T_{jkl}^i было впервые получено в [1, библи. 5].

Обозначим

$$X_{(j|l|k)mn}^i = S_{jklmn}^i = S_{kjlmn}^i, \quad (3.10)$$

$$P_{jklmn}^i = P_{kjlmn}^i = \frac{5}{3} S_{jk[lm]n}^i + \frac{1}{3} S_{jk[nl]m}^i + S_{jk[mn]l}^i + \\ + \frac{4}{3} S_{jkm[l]n}^i + \frac{2}{3} S_{jkn[m]l}^i, \quad (3.11)$$

$$T_{jklmn}^i = -(P_{jklmn}^i + P_{ljkmn}^i + P_{kljmn}^i). \quad (3.12)$$

Лемма 3.3. Пусть три-кань W является шестиугольной. Тогда справедлива формула

$$S_{jk(lmn)}^i = \frac{1}{3} (T_{mnl(kj)}^i - T_{mn(k|l|j)}^i + T_{jklmn}^i + T_{jn[k|m|l]}^i + \\ + T_{kn[j|m|l]}^i + T_{mj[k|n|l]}^i + T_{mk[l|j|n|l]}^i). \quad (3.13)$$

Доказательство. Пользуясь обозначениями (3.10), запишем соотношения (3.4,1) в виде:

$$S_{jklmn}^i + S_{ljkmn}^i + S_{kljmn}^i = 0, \quad (3.14)$$

Далее применим формулу (3.9) для тензора S_{jklmn}^i . С учетом обозначений (3.11) имеем:

$$S_{jklmn}^i = P_{jklmn}^i + S_{jk(lmn)}^i. \quad (3.15)$$

Переставляя индексы, отсюда получаем еще два равенства:

$$S_{ljkmn}^i = P_{ljkmn}^i + S_{lj(kmn)}^i,$$

$$S_{kljmn}^i = P_{kljmn}^i + S_{kl(jmn)}^i.$$

Сложим их с (3.15) и воспользуемся соотношениями (3.14) и обозначениями (3.12). В результате получим:

$$S_{jk(lmn)}^i + S_{lj(kmn)}^i + S_{kl(jmn)}^i = T_{jklmn}^i. \quad (3.16)$$

Переставляя в (3.16) индексы, найдем еще три серии равенств:

$$S_{jk(mln)}^i + S_{mj(kln)}^i + S_{km(jln)}^i = T_{jkmln}^i,$$

$$S_{jm(lkn)}^i + S_{lj(mkn)}^i + S_{ml(jkn)}^i = T_{jmlkn}^i,$$

$$S_{mk(ljn)}^i + S_{lm(kjn)}^i + S_{kl(mjn)}^i = T_{mkljn}^i.$$

Сложим эти равенства и вычтем из суммы (3.16). В силу симметрии величин S_{jklmn}^i по индексам j и k получим соотношение:

$$2(S_{jm(kln)}^i + S_{km(jln)}^i + S_{lm(jkn)}^i) = T_{jkmln}^i + T_{jmlkn}^i + T_{mkljn}^i - T_{jklmn}^i.$$

Его альтернация по l и n приводит к

$$S_{lm(jkn)}^i - S_{nm(jkl)}^i = T_{ljk[m|n]}^i + T_{jm[l|k|n]}^i + T_{mk[l|j|n]}^i - T_{jk[l|m|n]}^i.$$

Делая замену индексов $\binom{lmjkn}{jkmnl}$, отсюда получаем соотношения

$$S_{jk(mnl)}^i - S_{lk(mnj)}^i = T_{mnk[jl]}^i + T_{mk[j|n|l]}^i + T_{kn[j|m|l]}^i - T_{mn[j|k|l]}^i,$$

а замена $\binom{lmjkn}{kjmnl}$ в тех же равенствах дает

$$S_{kj(mnl)}^i - S_{lj(mnk)}^i = T_{mnj[kl]}^i + T_{mj[k|n|l]}^i + T_{jn[k|m|l]}^i - T_{mn[k|j|l]}^i.$$

Прибавляя последние две серии соотношений к (3.16), получим (3.13).

Лемма 3.4. Пусть ткань W является шестиугольной. Тогда имеет место формула:

$$\begin{aligned} S_{jklmn}^i &= \frac{4}{3} S_{jkm[l|n]}^i - \frac{4}{3} S_{jk[m|l]n}^i + \\ &+ \frac{2}{3} (S_{jk[mn]l}^i + S_{jl[mk]n}^i + S_{jm[nk]l}^i + S_{jn[mk]l}^i + S_{kl[mj]n}^i + \\ &+ S_{km[nj]l}^i + S_{kn[mj]l}^i) + \frac{1}{3} (S_{jl[nm]k}^i + S_{jm[ln]k}^i + S_{jn[lm]k}^i + \\ &+ S_{lm[jn]k}^i + S_{mn[jl]k}^i + S_{n[ljm]k}^i + S_{kl[nm]j}^i + \\ &+ S_{km[ln]j}^i + S_{kn[lm]j}^i + S_{lm[kn]j}^i + S_{mn[kl]j}^i + S_{n[lkm]j}^i) + \\ &+ \frac{2}{3} (S_{jlm[nk]}^i + S_{jmn[lk]}^i + S_{jnm[lk]}^i + S_{klm[nj]}^i + \\ &+ S_{kmn[lj]}^i + S_{knm[lj]}^i). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Доказательство. Подставим в (3.15) вместо тензора $S_{jk[lmn]}^i$ его выражение (3.13) и, используя обозначение (3.12), после надлежащей группировки слагаемых получим:

$$\begin{aligned} S_{jklmn}^i &= \frac{2}{3} P_{jklmn}^i - \frac{2}{3} (P_{jk(mn)l}^i + P_{(j|l|k)mn}^i + P_{(j|n|k)ml}^i + \\ &+ P_{(j|m|k)nl}^i) + \frac{1}{3} (P_{jn(lm)k}^i + P_{jl(mn)k}^i + P_{jm(ln)k}^i) + \\ &+ \frac{1}{3} (P_{kn(lm)j}^i + P_{kl(mn)j}^i + P_{km(ln)j}^i) + \frac{1}{3} (P_{ln(j|m)k}^i + \\ &+ P_{lm(j|n)k}^i + P_{mn(j|l)k}^i) - \frac{1}{3} (P_{mnl(jk)}^i + P_{nlm(jk)}^i + P_{lmn(jk)}^i). \end{aligned}$$

Подставляя сюда вместо P_{jklmn}^i его выражение (3.11), в результате несложных преобразований придет к формуле (3.17). Из неё следует, что тензор S_{jklmn} в силу обозначений (3.3), (3.10) и соотношений (1.12) и (1.14) является замкнутым:

Обозначим

$$Z_{(jk)lmn}^i = V_{jklmn}^i = V_{kjlmn}^i. \quad (3.18)$$

Лемма 3.5. Пусть ткань W будет шестиугольной. Тогда для тензора V_{jklmn}^i имеет место формула (3.17) и он также является замкнутым.

Доказательство полностью повторяет леммы 3.3 и 3.4.

Лемма 3.6. Имеют место тождества:

$$\begin{aligned} X_{[jk]mln}^i - X_{[jk]nlm}^i &= X_{(j|k|m)ln}^i - X_{(j|k|n)lm}^i + \\ &+ \frac{3}{2} (X_{(jnk)lm}^i - X_{(jmk)ln}^i) + \frac{3}{2} (X_{[jkn]lm}^i - X_{[jkm]ln}^i) + \\ &+ X_{jmk[ln]}^i + X_{j[m|k|n]l}^i + X_{jnk[ml]}^i; \\ Z_{[j|m|k]ln}^i - Z_{[j|n|k]lm}^i &= Z_{(jm)kln}^i - Z_{(jn)klm}^i + \\ &+ \frac{3}{2} (Z_{(jkn)lm}^i - Z_{(jkm)ln}^i) + \frac{3}{2} (Z_{[jkn]lm}^i - Z_{[jkm]ln}^i) + \\ &+ Z_{jkm[ln]}^i + Z_{jk[mn]l}^i + Z_{jkn[ml]}^i. \end{aligned}$$

Для доказательства расписываем правые части, пользуясь определением симметрирования и альтернирования.

Лемма 3.7. Пусть ткань W является шестиугольной. Тогда имеют место формулы:

$$\begin{aligned} Y_{[j|l|k][nm]}^i &= -B_{jkl[m, n]}^i - B_{[j|l|k][nm]}^i + S_{j[m|kl]n}^i + \\ &+ \frac{3}{4} X_{[jnk]lm}^i - \frac{3}{4} X_{[jmk]ln}^i + \frac{1}{2} (X_{jmk[ln]}^i + X_{j|m|k|n}^i + \\ &+ X_{jnk[ml]}^i), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} Y_{[jk|l|mn]}^i &= B_{jk[m|l, n]}^i + V_{j[m|kl]n}^i + \frac{3}{4} (Z_{[jkn]lm}^i - Z_{[jkm]ln}^i) + \\ &+ \frac{1}{2} (Z_{jkm[ln]}^i + Z_{jk[mn]l}^i + Z_{jkn[ml]}^i). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Эти равенства получаются из (1.15) с учетом обозначений (3.3), альтернатив по индексам $j_2 \equiv m$ и $j_1 \equiv n$ и дальнейшим применением тождеств (3.19) и обозначений (3.10) и (3.18). Из (3.20) и (3.21) вытекает, что тензоры $Y_{[j|l|k][nm]}^i$ и $Y_{[jk|l|mn]}^i$ будут замкнутыми.

Лемма 3.8. Имеют место тождества:

$$\begin{aligned} Y_{jklmn}^i &= Y_{(jkl)mn}^i + Y_{(jkm)nl}^i + Y_{(jlm)kn}^i - 2Y_{(klm)(jn)}^i + 2Y_{[jkm]ln}^i + \\ &+ 4Y_{[jml]kn}^i - 3Y_{[kml]jn}^i + Y_{j[l|m|k]n}^i + \frac{5}{3} (Y_{j[k|l|m]n}^i + Y_{l[k|m|j]n}^i) + \\ &+ \frac{1}{3} (Y_{j[m|k|l]n}^i + Y_{k[j|m|l]n}^i + Y_{k[m|l|j]n}^i + Y_{l[m|k|j]n}^i + Y_{l[m|j|k]n}^i + \\ &+ Y_{k[m|j|l]n}^i) + Y_{ml[k|n]j}^i + Y_{mj[l|n|k]}^i + Y_{km[l|n]j}^i + \frac{4}{3} Y_{[ml][k|n]j}^i + \\ &+ \frac{2}{3} Y_{[km][l|n]j}^i + 2Y_{[km]l[j]n}^i + 2Y_{[ml][k|j]n}^i + 2Y_{[mk][l]jln}^i + \\ &+ \frac{10}{3} Y_{[lm]j[kn]}^i + \frac{2}{3} Y_{[jm]k[ln]}^i + 2Y_{[mj]l[kn]}^i + 2Y_{[j|m]l[kn]}^i + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{3} (Y^i_{[m[k|l][j]n]} + Y^i_{[m|l][k][j]n]} + Y^i_{[j|k[m][l]n]} + Y^i_{[k|j][m][l]n]}); \quad (3.22)$$

$$X^i_{jklmn} = 3 (X^i_{(jkl)mn} + X^i_{[jkl]mn}) + 2X^i_{[j|l]kmn} - 2X^i_{(k|l|j)mn}; \quad (3.23)$$

$$Z^i_{jklmn} = 3 (Z^i_{(jkl)mn} + Z^i_{[jkl]mn}) + 2Z^i_{[j|l][k]mn} - 2Z^i_{(j|l)kmn}. \quad (3.24)$$

Доказательство состоит в том, что расписываем правые части, пользуясь определением симметрирования и альтернирования.

Переходим к доказательству теоремы 3.1. Пусть ткань W будет шестиугольной. Тогда в правой части тождества (3.22) пропадают в силу (3.4) симметричные компоненты, а кососимметричные вычисляются по формулам (3.20), (3.21), (3.17), (1.14(2)), (1.14(4)), (3.7). В результате тензор Y^i_{jklmn} выразится только через комитанты тензоров a^i_{jk} , b^i_{jkl} , $c^i_{1,2jklm}$. Теперь обратимся к правой части тождества (3.23). Первое слагаемое в силу (3.4) равно нулю; второе дается формулой (3.5); третье находим из (1.15(1)), так как $c^i_{jklmr+n} \equiv Y^i_{jklmn}$ только что вычислено; последнее слагаемое есть S^i_{jklmn} , его заменим по формуле (3.17). В результате правая часть тождества (3.23) окажется состоящей из комитантов тех же тензоров a^i_{jk} , b^i_{jkl} , $c^i_{1,2jklm}$. Пользуясь далее тождеством (3.24), аналогичные рассуждения проводим и для тензора Z^i_{jklmn} . Теорема доказана.

Проведенное доказательство носит конструктивный характер. Если проделать предложенные в нем вычисления, то получатся формулы, выражающие тензоры c^i_{jklmn} , $c^i_{jklmr+n}$ и $c^i_{jklr+mr+n}$ через тензоры a^i_{jk} , b^i_{jkl} , $c^i_{1,2jklm}$. Однако мы эти формулы не приводим, так как они необычайно громоздки.

Из теоремы 3.1 вытекает важное следствие: алгебраические ткани, составляющие важнейший подкласс шестиугольных тканей (и определяемые кубической гиперповерхностью проективного пространства P^{r+1} , см. [1, библи. 3]), также обладают замкнутой g_w -структурой класса по крайней мере 4. При этом, как следует из [9], для четырехмерных алгебраизуемых тканей класс замкнутости в точности равен четырем. Возникает вопрос: будет ли число 4 минимальным для алгебраизуемых тканей любой размерности? Во всяком случае интересно выяснить, для каких классов алгебраизуемых тканей он понижается до трех.

§ 4. ЛЕММЫ О ЗАМКНУТЫХ ТЕНЗОРАХ

Стремление обобщить теорему 3.1 естественно приводит к гипотезе о том, что обращение в нуль некоторых симметричных компонент дифференциально-геометрического объекта по-

рядка p ткани W влечет замкнутость определяемой этой тканью g_w -структуры. Как будет показано в § 5, эта гипотеза имеет положительное решение, однако, чтобы его получить, необходимо доказать несколько вспомогательных утверждений.

Начнем с замечания, которое неоднократно будет использоваться в дальнейшем. Обозначим через $T_{(ij)}^{\alpha\beta}$ и $T_{[ij]}^{\alpha\beta}$ тензоры, полученные из тензора $T^{\alpha\beta}$ симметрированием или альтернированием по i -тому и j -тому индексам (напоминаем, что обозначение $T^{\alpha\beta}$ введено в § 2, лемма 2.1). Предположим, что $\alpha > 1$ и $\beta > 1$. Тогда из (2.12) вытекает, что если один из тензоров $T_{[12]}^{\alpha\beta}$ или $T_{[13]}^{\alpha-1, \beta+1}$ замкнут, то замкнут и другой. В частности, из замкнутости тензора $T^{\alpha\beta}$ вытекает замкнутость тензора $T_{[13]}^{\alpha\beta}$, а из замкнутости тензора $T^{\alpha-1, \beta+1}$ — замкнутость тензора $T_{[12]}^{\alpha\beta}$.

Наряду с тензорами $T^{\alpha\beta}$, будем рассматривать и определяемые ими формы $X^{\alpha\beta}$:

$$X_{\alpha\beta}^{a_1 a_2 \dots a_{\alpha+\beta+1}} \equiv c_{j_1 j_2 \dots j_{\alpha-2} j_{\alpha-1} j_{\alpha} j_{\alpha+1} \dots j_{\alpha+\beta}}^i y_i x_{a_1}^{j_1} x_{a_2}^{j_2} \dots x_{a_{\alpha+\beta+1}}^{j_{\alpha+\beta}}, \quad (4.1)$$

где индексы $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{\alpha+\beta+1}$ могут принимать значения от 1 до $\alpha + \beta + 1$. В силу леммы 2.1 альтернации величин $X^{\alpha\beta}$ по любой паре индексов из набора $a_2, a_3, \dots, a_{\alpha+2}$ и любой паре индексов из набора $a_3, a_{\alpha+3}, \dots, a_{\alpha+\beta+1}$ являются замкнутыми, то есть выражаются через формы, которые определяются тензорами, принадлежащими дифференциально-геометрическим объектам меньших порядков.

Лемма 4.1 ([41]). Если тензор

$$c_{(j_1 j_2 \dots j_{\alpha-2} j_{\alpha-1} j_{\alpha} j_{\alpha+1} \dots j_{\alpha+\beta})}^i \quad (4.2)$$

замкнут, то замкнут и тензор $T_{(13)}^{\alpha\beta}$.

Доказательство. Из замкнутости тензора (4.2) вытекает замкнутость величин $X_{\alpha\beta}^{(a_1 a_2 \dots a_{\alpha}) a_{\alpha+1} \dots a_{\alpha+\beta+1}}$, то есть имеют место уравнения вида

$$X_{\alpha\beta}^{(a_1 a_2 \dots a_{\alpha}) a_{\alpha+1} \dots a_{\alpha+\beta+1}} = \dots, \quad (4.3)$$

где правые части представляют собой комитанты от форм меньшей степени (с меньшим числом индексов). Мы хотим доказать, что замкнуты величины $T_{(13)}^{\alpha\beta}$, то есть выполняются соотношения

$$X_{\alpha\beta}^{(a_1 | a_2 | a_3) \dots a_{\alpha+\beta+1}} = \dots, \quad (4.4)$$

где правые части также являются комитантами от форм меньшей степени.

Сейчас мы сделаем важное замечание, позволяющее существенно упростить доказательство как этой леммы, так и последующих. Поскольку нас не интересует, что именно входит в правые части равенств (4.3) и (4.4), то для доказательства достаточно рассмотреть однородную систему

$$X_{\alpha\beta}(a_1 a_2 \dots a_\alpha) a_{\alpha+1} \dots a_{\alpha+\beta+1} = 0, \quad (4.5)$$

присоединенную к системе (4.3), и доказать, что из нее вытекают равенства

$$X_{\alpha\beta}(a_1 | a_2 | a_3) \dots a_{\alpha+\beta+1} = 0. \quad (4.6)$$

При этом величины $X_{\alpha\beta} a_1 a_2 \dots a_{\alpha+\beta+1}$, входящие в систему (4.5), в силу леммы 2.1 следует считать симметричными по индексам $a_2, a_3, \dots, a_{\alpha+2}$ и по индексам $a_3, a_{\alpha+3}, \dots, a_{\alpha+\beta+1}$.

Указанная симметрия дает возможность, в частности, обозначить

$$X_{\alpha\beta} a_1 a_2 \dots a_{\alpha+\beta+1} \equiv Y_{\alpha\beta} a_1 a_2 a_{\alpha+3} \dots a_{\alpha+\beta+1}. \quad (4.7)$$

Тогда соотношения (4.5) запишутся в виде:

$$\sum_{(i,j) \in \Lambda_{\alpha+1}} Y_{\alpha\beta}(a_i a_j) a_{\alpha+3} \dots a_{\alpha+\beta+1} = 0, \quad (4.8)$$

где $\Lambda_{\alpha+1} = \{1, 2, \dots, \alpha, \alpha+1\}$ и знак Λ означает, что индекс $\alpha+1$ пропускается. Для разных наборов индексов получим $\alpha+1$ соотношений (переставляя знак Λ влево):

$$\sum_{(i,j) \in \Lambda_\alpha} Y_{\alpha\beta}(a_i a_j) a_{\alpha+3} \dots a_{\alpha+\beta+1} = 0, \quad (4.9)$$

где $\Lambda_\alpha = \{1, 2, \dots, \hat{\alpha}, \dots, \alpha+1\}$. Сложив все эти равенства, получим:

$$(\alpha-1) \sum_{(i,j) \in \Lambda} Y_{\alpha\beta}(a_i a_j) a_{\alpha+3} \dots a_{\alpha+\beta+1} = 0,$$

где $\Lambda = \{1, 2, \dots, \alpha+1\}$. Деля на $\alpha-1$ и вычитая (4.8), находим:

$$\sum_{i \in \Lambda_{\alpha+1}} Y_{\alpha\beta}(a_i a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3} \dots a_{\alpha+\beta+1} = 0. \quad (4.10)$$

Заменим в этих равенствах индекс α на $\alpha+2$. Получим:

$$\sum_{i \in \Lambda_{\alpha+1}} Y_{\alpha\beta}(a_i a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3} \dots a_{\alpha+\beta+1} = 0,$$

где $\Lambda_{\alpha+1} = \{1, 2, \dots, \alpha-1, \alpha+2, \alpha+1\}$. Сравнивая с (4.10), находим:

$$Y_{\alpha\beta}^{(a_{\alpha} a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3} \dots a_{\alpha+\beta+1}} = Y_{\alpha\beta}^{(a_{\alpha+2} a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3} \dots a_{\alpha+\beta+1}}.$$

Полученные соотношения означают, что величины $Y_{(a_1 a_3) a_{\alpha+3} \dots a_{\alpha+\beta+1}}$, определенные равенством (4.7), равны, если и отличаются только первым индексом. Следовательно,

$$\begin{aligned} Y_{\alpha\beta}^{(a_1 a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3} \dots a_{\alpha+\beta+1}} &= Y_{\alpha\beta}^{(a_2 a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3} \dots a_{\alpha+\beta+1}} = \dots \\ &\dots = Y_{\alpha\beta}^{(a_{\alpha} a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3} \dots a_{\alpha+\beta+1}}, \end{aligned}$$

то есть слагаемые в сумме (4.10) равны. Поэтому они все равны нулю:

$$Y_{\alpha\beta}^{(a_1 a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3} \dots a_{\alpha+\beta+1}} = 0.$$

Отсюда в силу обозначений (4.7) $X_{\alpha\beta}^{(a_1 | a_2 | a_3) \dots a_{\alpha+\beta+1}} = 0$, то есть тензор $T_{\alpha\beta}^{(13)}$ будет замкнутым. Лемма доказана.

Следствие. Если вместе с тензором (4.2) замкнут и тензор $T_{\alpha\beta}^{(13)}$, то будет замкнутым и тензор $T_{\alpha\beta}$.

Аналогично доказывается

Лемма 4.2 ([41]). Если замкнут тензор

$$c_{(j_1 r + k_1 | j_2 \dots j_{\alpha} | r + k_2 \dots r + k_{\beta-2}) r + k_{\beta-1} r + k_{\beta}}, \quad (4.11)$$

то будет замкнут и тензор $T_{\alpha\beta}^{(12)}$.

Следствие. Если вместе с тензором (4.11) замкнут и тензор $T_{\alpha\beta}^{(12)}$, то будет замкнут и тензор $T_{\alpha\beta}$.

Лемма 4.3 ([41]). Если замкнуты тензоры

$$c_{(j_1 r + k_1 | j_2 \dots j_{\alpha-2} | j_{\alpha-1} | j_{\alpha})} \quad c_{(j_1 r + k_1 | j_2 \dots j_{\alpha-2} | j_{\alpha-1} r + k_2)}, \quad (4.12)$$

то замкнуты и тензоры $T_{\alpha 1}$ и $T_{\alpha-1, 2}^{(13)}$.

Доказательство. Обозначим, как и раньше (см. (4.1)), формы, соответствующие тензорам $T_{\alpha 1}$ и $T_{\alpha-1, 2}^{(13)}$, через $X_{\alpha 1}$ и $X_{\alpha-1, 2}^{(13)}$. Тогда присоединенные однородные уравнения в силу (4.12) имеют вид:

$$X_{\alpha 1}^{(a_1 \dots a_{\alpha}) a_{\alpha+1} a_{\alpha+2}} = 0, \quad X_{\alpha-1, 2}^{(a_1 \dots a_{\alpha}) a_{\alpha+1} a_{\alpha+2}} = 0. \quad (4.13)$$

Кроме того, из соотношений (2.12) получим еще серию равенств на величины X_{α_1} и $X_{\alpha-1,2}$:

$$\begin{aligned} X_{\alpha_1} a_1 a_2 \dots a_{\alpha+2} - X_{\alpha-1,2} a_2 a_1 a_3 \dots a_{\alpha+2} &= X_{\alpha-1,2} a_1 a_2 a_3 \dots a_{\alpha+2} a_3 - \\ &- X_{\alpha-1,2} a_2 a_1 a_3 \dots a_{\alpha+2} a_3, \end{aligned} \quad (4.14)$$

а ковариантное дифференцирование равенств (1.3) приведет к соотношениям

$$X_{\alpha_1} [a_1 a_2 a_3] a_1 \dots a_{\alpha+2} = 0. \quad (4.15)$$

По лемме 4.1 из замкнутости первого из тензоров (4.12) вытекает замкнутость тензора $T_{(13)}$, так что величины X_{α_1} , входящие в присоединенную однородную систему, кососимметричны по первому и третьему индексам. Поэтому равенство (4.15) примет вид:

$$X_{\alpha_1} a_1 a_2 a_3 \dots a_{\alpha+2} + X_{\alpha_1} a_2 a_3 a_1 a_4 \dots a_{\alpha+2} + X_{\alpha_1} a_3 a_1 a_2 a_4 \dots a_{\alpha+2} = 0.$$

Используя последние соотношения, преобразуем левую часть равенства (4.14)

$$\begin{aligned} X_{\alpha_1} a_1 a_2 \dots a_{\alpha+2} - X_{\alpha_1} a_2 a_1 a_3 \dots a_{\alpha+2} &= X_{\alpha_1} a_1 a_2 \dots a_{\alpha+2} + \\ + X_{\alpha_1} a_1 a_3 a_2 a_4 \dots a_{\alpha+2} + X_{\alpha_1} a_3 a_2 a_1 a_4 \dots a_{\alpha+2} &= X_{\alpha_1} a_1 a_3 a_2 a_4 \dots a_{\alpha+2}. \end{aligned}$$

В результате соотношения (4.14) примут вид:

$$X_{\alpha_1} a_1 a_3 a_2 a_4 \dots a_{\alpha+2} = X_{\alpha-1,2} a_1 a_4 a_3 a_5 \dots a_{\alpha+2} a_3 - X_{\alpha-1,2} a_2 a_4 a_1 a_5 \dots a_{\alpha+2} a_3. \quad (4.16)$$

Рассмотрим теперь величины $X_{\alpha-1,2} a_1 \dots a_{\alpha+2}$. По лемме 2.1 они симметричны по индексам $a_2, a_4, \dots, a_{\alpha+1}$ и по индексам a_1 и $a_{\alpha+2}$. Поэтому обозначим

$$X_{\alpha-1,2} a_1 a_2 \dots a_{\alpha+2} = Y_{\alpha-1,2} a_1 a_3 a_4 \dots a_{\alpha+2} = Y_{\alpha-1,2} a_1 a_{\alpha+2} a_3. \quad (4.17)$$

Тогда соотношения (4.13, 2) дадут

$$\sum_{(i,j) \in \Lambda_{\alpha+1}} Y_{\alpha-1,2} (a_i a_j) a_{\alpha+2} = 0, \quad (4.18)$$

где $\Lambda_{\alpha+1} = \{1, 2, \dots, \alpha, \alpha+1\}$. Рассуждая далее таким же образом как и при доказательстве леммы 4.1, придем к равенствам

$$\sum_{i \in \Lambda_{\alpha+1}} Y_{\alpha-1,2} (a_i a_{\alpha+1}) a_{\alpha+2} = 0. \quad (4.19)$$

Переставив в (4.19) индексы $a_{\alpha+1}$ и $a_{\alpha+2}$, получим

$$\sum_{i \in \Lambda_{\alpha+1}} Y_{\alpha-1,2}^{(a_i a_{\alpha+2}) a_{\alpha+1}} = 0.$$

Вычитая это равенство из предыдущего и пользуясь симметрией величин $Y_{\alpha-1,2}$, находим, что

$$\sum_{i \in \Lambda_{\alpha+1}} Y_{\alpha-1,2}^{[a_{\alpha+1} a_{\alpha+2}] a_i} = 0. \quad (4.20)$$

С другой стороны, альтернируя соотношения (4.14) по индексам a_3 и $a_{\alpha+2}$ и учитывая симметрию величин $X_{a_1 a_2 \dots a_{\alpha+2}}$ по этим же индексам, имеем:

$$\begin{aligned} X_{\alpha-1,2}^{a_1 a_2 a_3 \dots a_{\alpha+2} a_3} - X_{\alpha-1,2}^{a_2 a_1 a_3 \dots a_{\alpha+2} a_3} = \\ = X_{\alpha-1,2}^{a_1 a_2 a_3 \dots a_3 a_{\alpha+2}} - X_{\alpha-1,2}^{a_2 a_1 a_3 \dots a_3 a_{\alpha+2}}. \end{aligned}$$

В силу обозначений (4.17) эти равенства примут вид:

$$Y_{\alpha-1,2}^{[a_1 a_2] a_3} = Y_{\alpha-1,2}^{[a_1 a_2] a_{\alpha+2}}.$$

Полученные соотношения означают, что величины $Y_{\alpha-1,2}^{[a_i a_j] a_k}$, отличающиеся только последним индексом, равны. Поэтому из (4.20) вытекает, что $Y_{\alpha-1,2}^{[a_i a_j] a_k} = 0$, то есть величины $Y_{\alpha-1,2}$ симметричны по первым двум индексам. Тогда (см. обозначения (4.17)) величины $X_{\alpha-1,2}$ симметричны по первому и третьему индексам, то есть тензор $T_{\alpha-1,2}^{[13]}$ замкнут. Но тогда из (4.16) вытекает, что $X = 0$, то есть замкнут и тензор T . Лемма доказана.

α_1 Следствие 1. Если замкнут тензор $T_{\alpha_1,1}^s = (c_{(j_1 r + k_1 j_2 \dots j_{\alpha_1})}^i)$, то при $\alpha > \alpha_1 + 1$ замкнуты и тензоры $T_{\alpha,1}$ и $T_{\alpha-1,2}^{[13]}$. В самом деле, из замкнутости тензора $T_{\alpha,1}^s$ вытекает замкнутость его ковариантных производных $c_{(j_1 r + k_1 j_2 \dots j_{\alpha_1}) j_{\alpha_1+1} \dots j_{\alpha}}^i$, $c_{(j_1 r + k_1 j_2 \dots j_{\alpha_1}) j_{\alpha_1+1} \dots j_{\alpha-1 r + k_2}}^i$. Так как $\alpha > \alpha_1 + 1$, то через эти производные выражаются тензоры (4.12), то есть выполнено условие леммы 4.3.

Следствие 2. Если $\alpha = 3$, то из (4.12) вытекает замкнутость тензоров $T_{3,1}$ и $T_{2,2}$.

В самом деле, при доказательстве леммы 4.3 мы получили, что величины $Y_{a_1 a_j a_k}$ симметричны по всем индексам, поэтому соотношения (4.18) и (4.19) примут вид:

$$(1) \sum_{(i,j) \in \Lambda_{\alpha+1}} Y_{\alpha-1,2}^{a_i a_j a_{\alpha+2}} = 0, \quad (2) \sum_{(i,j) \in \Lambda_{\alpha+1}} Y_{\alpha-1,2}^{a_i a_{\alpha+1} a_{\alpha+2}} = 0. \quad (4.21)$$

Покажем, что первые соотношения следуют из последних. Для этого запишем соотношения (4.21,2) для различных наборов индексов:

$$\sum_{(i,j) \in \Lambda_p} Y_{\alpha-1,2}^{a_i a_j a_{\alpha+2}} = 0, \quad \Lambda_p = \{1, \dots, \hat{p}, \dots, \alpha+1\}.$$

Сложив эти равенства, получим:

$$\sum_{(i,j) \in \Lambda} Y_{\alpha-1,2}^{a_i a_j a_{\alpha+2}} = 0,$$

где $\Lambda = \{1, \dots, \alpha+1\}$. Вычитая из полученной суммы равенства (4.21 (2)) придем к (4.21 (1)), что и требовалось.

Равенств (4.21 (2)) всего $C_{\alpha+1}^2$, а величин $Y_{\alpha-1,2}^{a_i a_j a_k} - C_{\alpha+2}^3$. Поэтому, если $\alpha > 3$, то система (4.21 (2)) имеет ненулевые решения. Покажем, что при $\alpha = 3$ система допускает только тривиальное решение. Для этого вспомним, что

$$Y_{2,2}^{a_1 a_3 a_5} = X_{2,2}^{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}.$$

Так как величины $Y_{2,2}^{a_1 a_3 a_5}$, а следовательно, и величины $X_{2,2}^{a_1 \dots a_5}$ симметричны по индексам a_1, a_3, a_5 , то можно обозначить

$$X_{2,2}^{a_1 \dots a_5} = X_{2,2}^{a_2 a_4}, \quad (4.22)$$

причем в силу леммы 2.1 $X_{2,2}^{a_3 a_4} = X_{2,2}^{a_4 a_3}$. В результате соотношения (4.12(2)) переписываются в виде

$$X_{2,2}^{a_1 a_4} + X_{2,2}^{a_2 a_4} + X_{2,2}^{a_3 a_4} = 0. \quad (4.23)$$

Соотношения (4.21(2)) при $\alpha = 3$ примут вид:

$$Y_{2,2}^{a_1 a_4 a_5} + Y_{2,2}^{a_2 a_4 a_5} + Y_{2,2}^{a_3 a_4 a_5} = 0.$$

Отсюда в силу обозначений (4.22) имеем

$$X_{2,2}^{a_2 a_3} + X_{2,2}^{a_1 a_3} + X_{2,2}^{a_1 a_2} = 0.$$

Запишем эти равенства для другого набора индексов:

$$X_{2,2}^{a_1 a_4} + X_{2,2}^{a_2 a_4} + X_{2,2}^{a_1 a_2} = 0.$$

Сравнивая с (4.23), находим, что $X_{2,2}^{a_3 a_4} = X_{2,2}^{a_1 a_2}$. Таким же образом получаем $X_{2,2}^{a_3 a_4} = X_{2,2}^{a_1 a_5}$, откуда $X_{2,2}^{a_1 a_5} = X_{2,2}^{a_1 a_2}$, то есть все величины $X_{2,2}^{a_1 a_2}$, отличающиеся только одним индексом, равны. Поэтому из (4.23) следует, что $X_{2,2}^{a_1 a_2} = 0$, и следствие 2 доказано.

Подобно лемме 4.3 доказывается и

пользуясь тем же следствием из леммы 4.1, выводим, что замкнут и тензор T . Рассуждая далее аналогично, докажем замкнутость тензоров T , T , ..., T и $T_{[13]}$.

Рассмотрим теперь тензоры (5.1($2\alpha-1$)) и (5.1($2\alpha-2$)). Пользуясь сначала леммой (4.3), а затем следствием к лемме 4.2, находим, что тензоры T и T замкнуты. Тогда, вследствие того же замечания из § 4, получаем, что замкнут и тензор $T_{[12]}$. Это условие вместе с замкнутостью (5.1($2\alpha-3$)) приводит в силу следствия из леммы 4.2 к замкнутости тензора T и т. д. Таким образом, мы получаем, что замкнуты тензоры T , T , ..., T и $T_{[12]}$.

Рассмотрим, наконец, тензор T и докажем, что он тоже является замкнутым. Действительно, соответствующие ему величины $X_{a_1 \dots a_{2\alpha+1}}$, входящие в однородную присоединенную систему, будут, вследствие замкнутости тензоров $T_{[12]}$ и $T_{[13]}$, симметричными по индексам a_1, a_2 , и a_1, a_3 . Но так как эти величины уже симметричны по индексам $a_2, a_4, a_5, \dots, a_{\alpha+2}$ и $a_3, a_{\alpha+3}, \dots, a_{2\alpha+1}$ (см. лемму 4.1), то получаем, что они симметричны по всем индексам. Но с другой стороны, из замкнутости тензора (5.1(α)) вытекает, что выполняются соотношения

$$\dots \dots X_{a_1 a_2 \dots a_{2\alpha+1}} = 0, \dots \dots$$

которые вследствие указанной симметрии дают $X_{a_1 \dots a_{2\alpha+1}} = 0$.

Итак, тензор T также оказывается замкнутым и теорема доказана.

Теорема 5.2 ([41]). Если симметричные части основных тензоров T и T типа $\binom{1}{\alpha+1}$ три-кани W являются замкнутыми, то g_W -структура будет замкнутой класса не выше 2α .

Доказательство. Пусть тензоры

$$T_{\alpha-1,1}^i = (c^i(j_1 r + k_1 j_2 \dots j_{\alpha-1})), \quad T_{1,\alpha-1}^i = (c^i(j_1 r + k_1 \dots r + k_{\alpha-1})) \quad (5.2)$$

замкнуты. Тогда замкнуты и их ковариантные производные

$$\begin{aligned} & c^i(j_1 r + k_1 j_2 \dots j_{\alpha-1}) j_{\alpha} \dots j_{2\alpha-1}, \\ & c^i(j_1 r + k_1 j_2 \dots j_{\alpha-1}) j_{\alpha} \dots j_{2\alpha-2r+k_2}, \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & c^i(j_1 r + k_1 j_2 \dots j_{\alpha-1}) j_{\alpha} r + k_2 \dots r + k_{\alpha} \end{aligned} \quad (5.3)$$

и

$$\begin{aligned}
 & c^{i(jj_1r+k_1\dots r+k_{\alpha-1})j_2\dots j_{\alpha-1}r+k_{\alpha}r+k_{\alpha+1}}, \\
 & c^{i(jj_1r+k_1\dots r+k_{\alpha-1})j_2\dots j_{\alpha-2}r+k_{\alpha-1}r+k_{\alpha}r+k_{\alpha+1}}, \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & c^{i(jj_1r+k_1\dots r+k_{\alpha-1})r+k_{\alpha}\dots r+k_{2\alpha-1}}.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Тензоры (5.1(1) — (5.1(α))) выражаются через соответствующие тензоры (5.3), поэтому из замкнутости вторых вытекает замкнутость первых. Точно так же, пользуясь леммой 2.2, находим, что из замкнутости тензоров (5.4) следует замкнутость тензоров (5.1(α+1)) — (5.1(2α—1)). Таким образом выполнены условия теоремы 5.1 и g_W -структура рассматриваемой ткани является замкнутой структурой класса не выше 2α .

Следствие 1. Пусть $\alpha=2$, тогда оба тензора (5.2) совпадают с симметризованным тензором кривизны $b_{(jkl)}^i$. Отсюда, в частности, вытекает результат третьего параграфа: g_W -структура, определяемая шестиугольной три-тканью, является замкнутой структурой класса 4.

Следствие 2. Если $\alpha=3$, то тензоры (5.2) представляют собой симметричные части ковариантных производных тензора кривизны b_{jkl}^i , которыми исчерпываются все основные тензоры, принадлежащие дифференциально-геометрическому объекту четвертого порядка этой ткани.

Теорема 5.2 при этом звучит так: если замкнуты симметризованные ковариантные производные $c^{i(jk_1m)}$ и $c^{i(jklr+m)}$ тензора кривизны три-ткани W , то g_W — структура будет замкнутой структурой класса 6.

Возникает естественный вопрос: является ли число 2α , указывающее порядок замкнутой g_W -структуры в формулировке теоремы 5.2, точным? В [41] доказывается, что при $\alpha=3$ ответ на этот вопрос будет положительным. Соответствующее доказательство можно распространить и на любое α .

Заметим также, что результат, сформулированный в следствии 2 из теоремы 5.1 можно усилить, а именно имеет место Теорема 5.3 ([41]). Если на три-ткани W замкнуты тензоры

$$c^{i(jj_1r+k_1)j_2j_3}, c^{i(jj_1r+k_1)j_2r+k_2}, c^{i(jj_1r+k_1r+k_2)r+k_3},$$

то замкнуты и тензоры T, T, T , то есть g_W -структура является замкнутой структурой класса 4.

Подобно теореме 5.1 доказываются и две следующие.

§ 6. О СУЩЕСТВОВАНИИ КАНОНИЧЕСКИХ КООРДИНАТ В ЛОКАЛЬНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ЛУПЕ

Перейдем к описанию свойств локальных координатных луп три-тканей с замкнутой g_w -структурой. Эти лупы, как мы сейчас покажем, представляют собой естественное и далеко идущее обобщение групп Ли.

Известно, что группы обобщаются в двух направлениях. Одно из них приводит к полугруппам, другое — к квазигруппам, то есть группоидам, в которых уравнение $z = x \cdot y$ однозначно разрешимо относительно x и y . Гладкие квазигруппы являются удобным объектом для дифференциально-геометрических исследований по той простой причине, что необходимое (а в локальном случае — и достаточное) условие однозначной разрешимости уравнения $z = x \cdot y$, где (\cdot) — функция по крайней мере класса C_1 , формулируется весьма просто.

Основные результаты по алгебраической теории квазигрупп и луп (то есть квазигрупп с единицей) изложены в [6] и [47]; см. также обзор [7]. В [6], в частности, рассмотрены квазигруппы и лупы с тождествами, обобщающими ассоциативность: альтернативные лупы, лупы Муфанг и Боля.

Аналитические лупы, близкие по свойствам к группам Ли, впервые начал изучать А. И. Мальцев. В [1, библиограф. 61] он рассмотрел альтернативные лупы, то есть лупы, в которых произведения вида $x^{p_1} y^{q_1} x^{p_2} y^{q_2} \dots x^{p_n} y^{q_n}$ не зависят от расстановки скобок. Эти лупы восстанавливаются по их касательной алгебре так же, как и группы Ли по их алгебре Ли, и для них сохраняет свой вид формула Кэмпбелла—Хаусдорфа.

Глубокое исследование специального класса альтернативных луп — локальных аналитических луп Муфанг, определяемых тождеством $(uv)(wu) = u((vw)u)$, провел Е. Н. Кузьмин [1, библиограф. 60]. Локальные свойства луп Муфанг полностью определяются их касательными алгебрами, которые называются алгебрами Мальцева и обладают замечательными свойствами (о них см. в обзоре [5]).

Более широкий класс луп, включающий в себя лупы Муфанг, образуют левые и правые лупы Боля, в которых выполняется тождество $(u(vu))w = u(v(uw))$ или $w((uv)u) = (wu)v$ соответственно. Касательная алгебра лупы Боля будет уже «двухэтажной», так как содержит две операции: бинарную и тернарную. Алгебры такого типа возникли в теории тканей и названы в [1, библиограф. 8] W -алгебрами, (см. также [3]). Их можно считать обобщением локальных тройных систем Ли, рассматриваемых в теории римановых пространств [1, библиограф. 107]. (Авторы обзора [49] называют W -алгебры «алгебрами Аквивиса»). Как показано в [1, библиограф. 67] и [29], по алгебре Боля можно восстановить локальную лупу Боля с точностью до изоморфизма.

Возникает естественный вопрос: существуют ли луны, кроме перечисленных выше, близкие по своим свойствам к группам Ли? Возможность для дальнейшего обобщения появляется, если обратиться к координатным лунам три-тканей с замкнутой g_w -структурой. Известно, что три-ткань можно рассматривать как геометрическую интерпретацию квазигруппы. Каждой квазигруппе $q: Q \times Q \rightarrow Q$, заданной уравнением $z = x \cdot y$, соответствует на множестве $Q \times Q$ три-ткань, образованная подмножествами вида $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$. При этом отношение эквивалентности на множестве квазигрупп, называемое изотопией [6], индуцирует естественное отношение эквивалентности для три-тканей, так что всякую три-ткань можно рассматривать как класс главноизотопных между собой (и изотопных квазигруппе Q) лун, называемых координатными лунами этой ткани [1, библи. 4]. Умножение (\circ) в координатной луне $l(a, b)$, $(a, b) \in Q \times Q$, определяется по схеме, изображенной на рис. 7. Как уже было отмечено во введении, группам Ли соответствуют ткани R , лунам Муфанг — ткани M ,

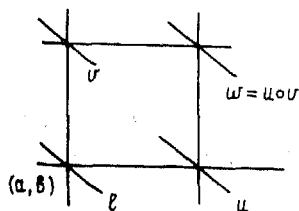


Рис. 7

лунам Боля — ткани Боля. В случае, когда $l(a, b)$ — локальная гладкая луна, умножение (\circ) определяется в некоторой окрестности точки (a, b) .

Свойство координатных лун три-тканей с замкнутой g_w -структурой класса p , обобщающее соответствующее свойство групп Ли, состоит в том, что в подходящих — канонических — координатах разложение в ряд функций $w = u \circ v$ полностью определяется струей порядка p этого разложения (то есть членами до порядка включительно). Этот результат выглядит понятным, если вспомнить, что, согласно определению, класс замкнутости g_w -структуры — число p — показывает порядок основного дифференциального объекта ткани W , через который выражаются объекты всех последующих порядков. Идея доказательства, как мы увидим в § 7, проста — необходимо показать, что канонические координаты координатной луны три-тканей W могут быть выражены через компоненты дифференциально-геометрического объекта соответствующего порядка этой ткани.

Обсудим теперь понятие канонических координат, которые будут играть в дальнейших рассуждениях существенную роль.

Канонические координаты в локальной альтернативной лупе определяются тем же способом, как и в группе Ли [1, библиография. 61]. В более общем случае, для моноассоциативных луп, они были определены в 1971 году [1, библиография. 60], затем этот вопрос развивался в [50], [51].

Канонические координаты в произвольной локальной аналитической лупе были определены еще в 1969 году в [1, библиография. 1], однако их существование доказано только в 1986 [4]. Ниже мы воспроизводим это доказательство.

Пусть Q — локальная аналитическая лупа размерности r с операцией $w = uv$, $u, v, w \in Q$ и единицей e . Выберем локальные координаты в некоторой окрестности единицы так, чтобы ее координаты были равны нулю. Пусть умножение (\circ) в выбранных координатах записывается в виде $z^i = f^i(x^j, y^k)$, где $i, j, k = \overline{1, r}$, или кратко, в векторной форме, $z = f(x, y)$, где $x = (x^i)$, $y = (y^i)$, $z = (z^i)$. Разложение функции f в ряд в точке e запишем в виде

$$z = \sum_{s=1}^{\infty} \Lambda_s(x, y), \quad (6.1)$$

где $\Lambda_s(x, y)$ — однородный многочлен степени s от векторных переменных x и y . В силу равенств $w e = e \circ u = u$ или $f(x, 0) = f(0, x) = x$ многочлены $\Lambda_s(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$\Lambda_1(x, y) = x + y, \quad \Lambda_s(0, y) = \Lambda_s(x, 0) = 0 \text{ при } s \geq 2. \quad (6.2)$$

Рассмотрим еще одну систему аналитических координат в Q , в которой умножение (\circ) имеет вид $\tilde{z} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y})$, и пусть существует локальный изоморфизм Φ , $\Phi \in C_{\omega}$, вида

$$x = \Phi(\tilde{x}), \quad y = \Phi(\tilde{y}), \quad z = \Phi(\tilde{z}), \quad (6.3)$$

причем $\Phi(0) = 0$. Такие изоморфизмы будем называть допустимыми преобразованиями локальных координат в Q . Условие $\Phi(0) = 0$ означает, что единица сохраняет нулевые координаты, в результате чего разложение в ряд функции \tilde{f} также обладает свойствами (6.2), а разложение для Φ с точностью до линейного преобразования имеет вид:

$$\Phi(\tilde{x}) = \tilde{x} + \sum_{s=1}^{\infty} P_s(\tilde{x}) \quad (6.4)$$

(здесь $P(\tilde{x})$ — однородные полиномы, как обычно).

Определение. Локальные координаты \tilde{x} в лупе Q , определенные в некоторой окрестности U единицы e , назовем каноническими.

ническими, если для всякого (\tilde{x}) из U такого, что $(2\tilde{x}) \in U$, выполняется равенство:

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{x}) = 2\tilde{x}. \quad (6.5)$$

Теорема 6.1 ([4]). В окрестности единицы всякой локальной аналитической лупы можно ввести канонические координаты, причем, с точностью до линейного преобразования, единственным образом.

Доказательство. В силу изоморфизма функции f и \tilde{f} связаны соотношением

$$\Phi(\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y})) = f(\Phi(\tilde{x}), \Phi(\tilde{y})).$$

Отсюда, с учетом (6.5), получаем:

$$\Phi(2\tilde{x}) = f(\Phi(\tilde{x}), \Phi(\tilde{x})) = f|_D(\Phi(\tilde{x})), \quad (6.6)$$

где $f|_D$ — ограничение f на диагональ, $f|_D(x) = f(x, x)$. Из (6.1) имеем:

$$f|_D(x) = 2x + \sum_{s=2}^{\infty} \Lambda_s(x), \quad (6.7)$$

где через $\Lambda_s(x) \equiv \Lambda_s(x, \dots, x)$ обозначено ограничение на диагональ функций $\Lambda_s(x, y)$ из разложения (6.1). Подставляя (6.4) и (6.7) в равенства (6.6) и опуская знак \sim над x , получим:

$$2x + P_2(2x) + P_3(2x) + \dots = 2[x + P_2(x) + P_3(x) + \dots] + \Lambda_2[x + P_2(x) + P_3(x) + \dots] + \Lambda_3(x + P_2(x) + P_3(x) + \dots) + \dots$$

Приравнявая многочлены одинаковой степени и пользуясь их однородностью, находим:

$$4P_2(x) = 2P_2(x) + \Lambda_2(x),$$

$$8P_3(x) = 2P_3(x) + 2\Lambda_2(x, P_2(x)) + \Lambda_3(x),$$

...

$$2^k P_k(x) = 2P_k(x) + \sum_{i_1+i_2=k-2} \Lambda(P_{i_1}(x), P_{i_2}(x)) +$$

$$+ \sum_{i_1+i_2+i_3=k-3} \Lambda(P_{i_1}(x), P_{i_2}(x), P_{i_3}(x)) + \dots + \Lambda(P_1(x), \dots, P_1(x)).$$

Таким образом для многочленов $P_k(x)$ при $k \geq 2$ получается рекуррентное соотношение

$$P_k(x) = A_k \left[\sum_{s=2}^k \sum_{i_1+\dots+i_s=k-s} \Lambda(P_{i_1}(x), P_{i_2}(x), \dots, P_{i_s}(x)) \right], \quad (6.8)$$

где $A_k = (2^k - 2)^{-1}$ и i_1, i_2, \dots, i_k — натуральные числа. Пользуясь соотношениями (6.8), получаем, например:

$$P_2(x) = \frac{1}{2} \Lambda_2(x), \quad P_3(x) = \frac{1}{6} \left[\Lambda_2(x, \Lambda_2(x)) + \Lambda_3(x) \right],$$

$$P_4(x) = \frac{1}{14} \left[\frac{1}{3} \Lambda_2(x, \Lambda_2(x, \Lambda_2(x))) + \frac{1}{3} \Lambda_2(x, \Lambda_3(x)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \Lambda_2(\Lambda_2(x), \Lambda_2(x)) + \frac{3}{2} \Lambda_3(x, x, \Lambda_2(x)) + \Lambda_4(x) \right],$$

и т. д. Единственность функции $\Phi(x)$, определяемой рядом (6.4), очевидна; остается доказать сходимость этого ряда.

Так как ряд (6.7) сходится к функции $f|_D$, то по теореме Коши для многочленов $\Lambda(x)$, $k \in \mathbb{N}$, существуют такие постоянные M и R , что при любом k выполняются неравенства:

$$\|\Lambda_k\| < MR^{-k}. \quad (6.9)$$

Нам нужно доказать существование постоянных N и ρ таких, что

$$\|P_k\| < N\rho^{-k}. \quad (6.10)$$

Покажем, что условие (6.10) будет выполнено, если положить

$$\rho < N < 2R^2M^{-1}. \quad (6.11)$$

Доказательство проведем индукцией по k . При $k=1$ имеем $P_1(x) = x$, поэтому $\|P_1\| = 1$ и $\|P_1\| < N\rho^{-1}$ в силу (6.11). Предположим теперь, что неравенства (6.10) выполняются для всех натуральных чисел, меньших k , и докажем его для k . Из (6.8) имеем:

$$\|P_k\| \leq A_k \left(\sum_{i_1+i_2=k} \|\Lambda_2\| \cdot \|P_{i_1}\| \cdot \|P_{i_2}\| + \right. \\ \left. + \sum_{i_1+i_2+i_3=k} \|\Lambda_3\| \cdot \|P_{i_1}\| \cdot \|P_{i_2}\| \cdot \|P_{i_3}\| + \dots + \|\Lambda_k\| \|P_1\|^k \right). \quad (6.12)$$

Количество слагаемых в первой сумме справа равно числу способов записи числа k в виде суммы двух натуральных слагаемых (с учетом порядка), то есть $k-1$. Количество слагаемых во второй сумме равно числу разбиений для числа k на 3 слагаемых. Оно равно C_{k-1}^2 и т. д. Кроме того, так как каждый из индексов i_1, i_2, \dots , меньше k , то, по предположению индукции, $\|P_{i_s}\| < N\rho^{-i_s}$. В результате неравенство (6.12) примет вид:

$$\|P_k\| < A_k \left(C_{k-1}^1 \frac{M}{R^2} \cdot \frac{N^2}{\rho^{i_1+i_2}} + C_{k-1}^2 \frac{M}{R^3} \frac{N^3}{\rho^{i_1+i_2+i_3}} + \dots \right. \\ \left. \dots + C_{k-1}^{k-1} \frac{M}{R^k} \frac{N^k}{\rho^k} \right) =$$

$$= \frac{A_k}{\rho^k} M \frac{N}{R} \left[\left(1 + \frac{N}{R}\right)^{k-1} - 1 \right] = \frac{1}{\rho^k} \frac{MN}{2R} \frac{\left(1 + \frac{N}{R}\right)^{k-1} - 1}{2^{k-1} - 1}.$$

Из (6.11) следует $MN < 2R^2$, поэтому

$$\|P_k\| < \frac{R}{\rho^k} \frac{(1 + NR^{-1})^{k-1} - 1}{2^{k-1} - 1}.$$

Далее, из (6.7) видно, что $\|\Lambda\| = 2$, так что неравенство (6.9) при $k=1$ дает $2 < MR^{-1}$. Используя (6.11), получаем:

$$\frac{N}{R} < \frac{2R}{M} < 1,$$

в силу чего

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + NR^{-1})^{k-1} - 1}{2^{k-1} - 1} = \\ & = \frac{N}{R} \cdot \frac{1 + (1 + NR^{-1}) + (1 + NR^{-1})^2 + \dots + (1 + NR^{-1})^{k-2}}{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-2}} < \frac{N}{R} \end{aligned}$$

и

$$\|P_k\| < \frac{R}{\rho^k} \cdot \frac{N}{R} = \frac{N}{\rho^k},$$

что и требуется доказать.

В случае, когда лупа Q моноассоциативна (в частности, группа Ли), всякое направление, касательное к Q в точке e , определяет однопараметрическую подгруппу, уравнение которой во введенных канонических координатах имеет вид $x^i = c^i t$ [1, библи. 1].

В дальнейшем нам понадобятся соотношения, которым удовлетворяют коэффициенты ряда (6.1) в случае канонических координат. В силу того, что для последних выполняется условие (6.5) многочлены $\Lambda(x, y)$ входящие в разложение (6.1), удовлетворяют при $s > 1$ условию

$$\Lambda(x, x) = 0. \quad (6.13)$$

Разложение (6.1) в этом случае называется каноническим.

Если, следуя [1, библи. 1], записать ряд (6.1) в координатной форме:

$$\begin{aligned} z^i &= x^i + y^i + \sum_{s=2}^{\infty} \Lambda^i(x^j, y^k), \\ \Lambda^i(x, y) &= \frac{1}{s!} \sum_{\rho=1}^{s-1} C_s^\rho a_{j_1 j_2 \dots j_\rho r + j_{\rho+1} \dots r + j_s} x^{j_1} \dots \\ & \dots x^{j_\rho} \cdot y^{j_{\rho+1}} \dots y^{j_s}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

то условия (6.13) примет вид [1, библи. 1]:

$$\sum_{p=1}^{s-1} C_s^p a_{(j_1 \dots j_p r + j_{p+1} \dots r + j_s)}^i = 0. \quad (6.15)$$

§ 7. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О КООРДИНАТНЫХ ЛУПАХ ТРИ-ТКАНЕЙ С ЗАМКНУТОЙ g_w -СТРУКТУРОЙ

Как мы уже отмечали в начале § 6, три-ткань W можно задать уравнениями $z=f(x, y)$ ее координатной квазигруппы q . При этом квазигруппа q определена с точностью до преобразования изотопии, то есть вместо нее можно взять любой ее изотоп, например, произвольную координатную лупу $l(a, b)$. Итак, будем полагать, что уравнение $z=f(x, y)$ задает лупу $l(a, b)$, причем, не теряя общности, можно считать, что оно записано в канонических координатах и $(a, b) = (0, 0)$.

С другой стороны, координаты x и y являются локальными координатами в некоторой области многообразия M , на котором определена три-ткань W . Поэтому значения тензоров $a_{jk}^i, b_{jkl}^i, c_{jklm}^i, c_{jklr+m}^i$ и т. д. ткани W выражаются через частные производные от функций f^i , а значения этих тензоров в точке $(0, 0)$ — через коэффициенты разложения (6.14), представляющих собой значения частных производных от функций f^i в точке $(0, 0)$. Для тензоров a_{jk}^i и b_{jkl}^i такие выражения найдены в [1, библи. 16]:

$$a_{jk}^i = -a_{jr+k}^i,$$

$$b_{jkl}^i = -a_{jkr+l}^i + a_{kr+jr+l}^i + a_{jr+l}^m a_{kr+m}^i - a_{kr+j}^m a_{mr+l}^i, \quad (7.1)$$

а для тензоров c_{jklm}^i и c_{jklr+m}^i — в [42]:

$$c_{jklm}^i = a_{kmr+jr+l}^i - a_{kmjr+l}^i + b_{jkl}^p a_{mp}^i + b_{jml}^p a_{kp}^i - a_{mk}^p b_{jpl}^i + a_{kmr+j}^p a_{pl}^i - a_{jk}^p a_{pmr+l}^i - a_{jm}^p a_{kpr+l}^i - a_{jl}^p a_{kmr+p}^i; \quad (7.2)$$

$$c_{jklr+m}^i = a_{kr+jr+lr+m}^i - a_{kjr+lr+m}^i + b_{jkl}^p a_{pm}^i + b_{jkm}^p a_{pl}^i - a_{lm}^p b_{jkp}^i - a_{jr+lr+m}^p a_{kp}^i + a_{kj}^p a_{pk+lr+m}^i + a_{pj}^p a_{kr+pr+m}^i + a_{mj}^p a_{kr+lr+p}^i.$$

Используя методику, примененную в [1, библи. 16] и [42], можно найти аналогичные выражения и для тензоров следующих порядков. Однако мы это делать не будем, только заметим, что, как и в формулах (7.2), все последующие выражения такого рода для тензоров типа $\left(\frac{1}{s}\right)$ будут содержать разности коэффициентов порядка s разложения (6.14). Например, для основных тензоров (см. § 2) получаем (в точке $(0, 0)$!):

$$c_{jkr+l|j_1 \dots j_p r + j_{p+1} \dots r + j_s}^i = -a_{jk|j_1 \dots j_p r + lr + j_{p+1} \dots r + j_s}^i + a_{kj_1 \dots j_p r + jr + lr + j_{p+1} \dots r + j_s}^i + R_{jk|j_1 \dots k + j_s}^i, \quad (7.3)$$

причем в $R_{jklj_1 \dots r+j_s}^i$ входят только такие коэффициенты разложения (6.14), порядок которых меньше $s+3$. Соотношения (7.3) получаются следующим образом: последовательно дифференцируем формулы (14) из [1, библ. 16] и записываем их в виде (2.5); затем подставляем туда значения производных от функций f^i в точке $(0, 0)$, найденные с помощью разложения (6.14).

Докажем теперь обратное, а именно, что коэффициенты разложения (6.14) выражаются через основные тензоры ткани W .

А) Чтобы выразить симметричные части указанных коэффициентов, просимметрируем соотношения (7.3) по всем нижним индексам. В результате получим:

$$a_{(jklj_1 \dots j_u r+l r+j_{u+1} \dots r+j_s)}^i - a^{i(kj_1 \dots j_u r+j_r+l r+j_{u+1} \dots r+j_s)} = \\ = -c_{(jkr+l j_1 \dots j_u r+j_{u+1} \dots r+j_s)}^i + R_{(jklj_1 \dots r+j_s)}^i \quad (7.4)$$

Кроме того, соотношения (6.15), записанные для членов порядка $s+3$, дают

$$C_{s+1}^1 a_{(j_r+k r+l r+j_1 \dots r+j_s)}^i + C_{s+3}^2 a_{(jkr+l \dots r+j_s)}^i + \dots \\ \dots + C_{s+3}^{s+2} a_{(jkl \dots j_{s-1} r+j_s)}^i = 0. \quad (7.5)$$

Полагая в (7.4) $u=0, 1, \dots, s$, мы получим, с учетом (7.5), $s+2$ уравнений на симметрированные коэффициенты многочлена Λ^i из разложения (6.14). Очевидно, что они независимы, и поэтому из них можно выразить величины $a_{(j \dots j_u r+j_{u+1} \dots r+j_s)}^i$ через основные тензоры типа $\binom{1}{s+3}$ ткани W и величины вида $R_{(jklj_1 \dots r+j_s)}^i$ содержащие, как уже было отмечено, коэффициенты многочленов Λ^i , где $u < s+3$.

Б) Рассмотрим коэффициент $a_{jklj_1 \dots j_s r+l}^i$. Так как он симметричен по индексам j, k, j_1, \dots, j_s , то справедливо тождество

$$a_{jklj_1 \dots j_s r+l}^i = a_{(jklj_1 \dots j_s r+l)}^i + \frac{2}{s+3} (a_{[j|klj_1 \dots j_s|r+l]}^i + \\ + a_{[k|lj_1 \dots j_s|r+l]}^i + \dots + a_{[j_s|jklj_1 \dots j_{s-1}|r+l]}^i), \quad (7.6)$$

которое легко проверяется непосредственно. Согласно А, величины $a_{(jklj_1 \dots j_s r+l)}^i$ выражаются через тензоры типа $\binom{1}{s+3}$ и коэффициенты меньшего порядка из разложения (6.14). Покажем, что тем же свойством обладают и остальные слагаемые в правой

части равенств (7.6). Действительно, запишем соотношения (7.3) для $u=s$:

$$c_{jkr+l j_1 \dots j_s}^i = -a_{jkr+l j_1 \dots j_s r+l}^i + a_{jkr+l j_1 \dots j_s r+l}^i + R_{jkr+l j_1 \dots j_s}^i. \quad (7.7)$$

Так как $a_{jkr+l j_1 \dots j_s [r+jr+l]}^i = 0$, то, альтернируя (7.7) по индексам j и l , получаем:

$$a_{[j|kr+l|j_1 \dots j_s|r+l]}^i = -c_{[j|kr+l|j_1 \dots j_s]}^i + R_{[j|kr+l|j_1 \dots j_s]}^i.$$

Подставляя в (7.6), приходим к выводу, что коэффициенты $a_{jkr+l j_1 \dots j_s}^i$ выражаются через тензоры ткани W и коэффициенты более низкого порядка.

В) Как следует из (7.7), то же самое утверждение будет справедливо и для коэффициентов $a_{jkr+l j_1 \dots j_s}^i$, содержащих уже два индекса второй серии (то есть $r+j$ и $r+l$). Рассматривая далее последовательно соотношения (7.3) при $u=s-1, s-2, \dots, 1$, придем к заключению, что сформулированное в конце Б утверждение справедливо для всех коэффициентов многочлена Λ^{i}_{s+3} из разложения (6.14). Отсюда в свою очередь

вытекает

Теорема 7.1. Пусть $l(a, b)$ — координатная лупа три-ткани W , заданной на аналитическом многообразии M . Тогда значения основных тензоров типа $\binom{1}{s}$ этой ткани в точке (a, b) выражаются через коэффициенты порядка не выше s канонического разложения уравнений лупы $l(a, b)$, и обратно: коэффициенты порядка s канонического разложения лупы $l(a, b)$ являются комитантами основных тензоров типа $\binom{1}{q}$ ткани W , вычисленных в точке (a, b) , причем $q \leq s$.

Например, для коэффициентов многочлена Λ^i_3 , проделав несложные вычисления, получим:

$$a_{jkr+l}^i = -\frac{1}{2} b_{(jkl)}^i + \frac{4}{3} (b_{[l|k|j]}^i + b_{[l|j|k]}^i) + \frac{2}{3} (a_{kl}^m a_{jm}^i + a_{jl}^m a_{km}^i),$$

$$a_{jr+kr+l}^i = \frac{1}{2} b_{(jkl)}^i + \frac{4}{3} (b_{[k|j|l]}^i + b_{[l|j|k]}^i) + \frac{2}{3} (a_{ij}^m a_{km}^i + a_{kj}^m a_{lm}^i). \quad (7.8)$$

Пусть теперь g_W -структура ткани W является замкнутой g -структурой класса p . Тогда, согласно определению, компоненты дифференциально-геометрического объекта порядка $p+1$ этой ткани, в частности, ее основные тензоры типа $\binom{1}{p+1}$, являются комитантами основных тензоров типа $\binom{1}{q}$ где $q \leq p$. Поэтому из теоремы 7.1 вытекает основная

Теорема 7.2. Пусть g_W -структура три-ткани W , заданной на аналитическом многообразии, является замкнутой g -структурой класса p . Тогда каноническое разложение любой

ее координатной лупы полностью определяется струей порядка p , то есть коэффициенты порядка выше p этого разложения являются комитантами от коэффициентов до порядка p включительно. В частности, для групп Ли, луп Муфанг, Боля и координатных луп шестиугольных тканей число p равно 2, 2, 3 и 4 соответственно.

В заключении параграфа укажем на одно применение формул (7.8). В [51] рассматривалась, в частности, следующая задача: найти локальные аналитические лупы, для которых разложение в ряд в некоторых канонических координатах функции $z=x \cdot y$ до членов третьего порядка включительно совпадает по форме с рядом Кэмпбелла—Хаусдорфа. В результате авторы приходят к лупам, касательные алгебры которых являются обобщением альтернативной алгебры (по их терминологии квазиэквивалентны ей). В случае, если каноническое разложение лупы целиком совпадает по форме с рядом Кэмпбелла—Хаусдорфа, то (при некоторых допущениях) авторы приходят к лупам Муфанг.

Сформулируем теперь аналогичную задачу для тканей. Пусть R —произвольная групповая три-ткань. Так как она характеризуется условием $b_{jkl}^i=0$, то для нее из формулы (7.8) получаем:

$$a_{jkr+l}^i = \frac{2}{3} (a_{kl}^m a_{jm}^i + a_{jl}^m a_{km}^i), \quad a_{jrl+kr+l}^i = \frac{2}{3} (a_{lj}^m a_{km}^i + a_{kj}^m a_{lm}^i). \quad (7.9)$$

Рассмотрим теперь три-ткань W , координатных луп которой разложение имеет такой же вид, как и для координатных луп ткани R , по крайней мере до членов третьего порядка включительно. Будем говорить в этом случае, что ткань W имеет с групповой тканью R формальное касание третьего порядка. Сравнивая выражения (7.8) и (7.9), мы видим, что тензор кривизны b_{jkl}^i рассматриваемой ткани W удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} b_{(jkl)}^i + \frac{4}{3} (b_{[l|k|j]}^i + b_{[l|j|k]}^i) &= 0, \\ -\frac{1}{2} b_{(jkl)}^i + \frac{4}{3} (b_{[kj]l}^i + b_{[lj]k}^i) &= 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Симметрируя, например, первые равенства по индексам $j, k; l$, получим $b_{(jkl)}^i=0$, так что соотношения (7.10) превратятся в следующие:

$$b_{[l|k|j]}^i + b_{[l|j|k]}^i = 0, \quad b_{[kj]l}^i + b_{[lj]k}^i = 0.$$

Вычитая теперь первые из вторых, получаем $2b_{kjl}^i = b_{jlk}^i + b_{lkj}^i$, или

$$b_{kjl}^i = \frac{1}{3} (b_{jlk}^i + b_{lkj}^i + b_{kjl}^i).$$

Отсюда и из соотношений $b_{(jkl)}^i=0$ вытекает, что тензор b_{jkl}^i

вполне кососимметричен, то есть $b^i_{jkl} = b^i_{[jkl]}$. Эти условия характеризуют ткани Муфанг (см. таблицу 1). Таким образом доказана

Теорема 7.3. Если три-ткань W , заданная на аналитическом многообразии, имеет формальное касание третьего порядка с групповой тканью, то она является тканью Муфанг.

Но координатные лупы ткани Муфанг являются лупами Муфанг и для них, согласно [1, библиограф. 61], имеет место формула Кэмпбелла—Хаусдорфа. Поэтому из теоремы 7.3 вытекает, что, кроме групповых тканей только ткани Муфанг обладают тем свойством, что канонические разложения их координатных луп совпадают по форме с рядом Кэмпбелла—Хаусдорфа.

Замечание. Формула Кэмпбелла—Хаусдорфа имеет место и в более общем случае, для аналитических альтернативных луп, частным случаем которых являются лупы Муфанг [1, библиограф. 61]. Однако этот факт ничего не добавляет к сформулированному выше результату, так как если все координатные лупы ткани будут альтернативными, то они будут и муфанговыми [6].

§ 8. ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ТРИ-ТКАНИ С ЗАМКНУТОЙ g_W -СТРУКТУРОЙ

Каждый из классов тканей — T , R , B , M , H , g_W -структура которых замкнута, может быть охарактеризован алгебраически, с помощью тождеств, выполняемых во всех координатных лупах ткани. При этом ткани H характеризуются наиболее слабым тождеством — $x^2 \cdot x = x \cdot x^2$, содержащим только одну переменную. В настоящем параграфе этот факт обобщается, а именно, доказывается, что к замкнутым g_W -структурам произвольного класса, аналитическая характеристика которых получена в § 5, можно прийти также и алгебраическим путем, требуя выполнения в координатных лупах ткани некоторого числа тождеств от одной переменной.

Обозначим, как и раньше, через $Q(\cdot)$ локальную аналитическую лупу размерности r с единицей $e(0, 0, \dots, 0)$, и пусть ее каноническое разложение имеет вид (6.14). Запишем это разложение подробно и в векторной форме:

$$\begin{aligned}
 z = x + y + \frac{1}{2} \Lambda_{2,1} (x, y) + \frac{1}{2} \frac{1}{3,1} \Lambda (x, y) + \frac{1}{2} \frac{1}{3,2} \Lambda (x, y) + \frac{1}{6} \frac{1}{4,1} \Lambda (x, y) + \\
 + \frac{1}{4} \frac{1}{4,2} \Lambda (x, y) + \frac{1}{6} \frac{1}{4,3} \Lambda (x, y) + \dots + \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{k,1} \Lambda (x, y) + \\
 + \frac{1}{(k-2)!} \frac{1}{2!} \frac{1}{k,2} \Lambda (x, y) + \dots + \frac{1}{\Pi(k-1)!} \frac{1}{k, k-1} \Lambda (x, y) + \dots \quad (8.1)
 \end{aligned}$$

Здесь, согласно (6.14), $\Lambda(x, y)$ — билинейная кососимметричная форма, $\Lambda(x, y) = \Lambda(\overbrace{x, \dots, x}^{k-l}, \overbrace{y, \dots, y}^l)$ — многочлен степени $k-l$ относительно x и степени l относительно y , однородный как по x , так и по y . Его можно рассматривать как ограничение некоторой полилинейной формы степени k .

Мы будем рассматривать в лупе Q слова от одной переменной x . Следуя [40], скобочную структуру произвольного слова $S(x)$ длины n зададим деревом $D(S)$ (см. рис. 8):

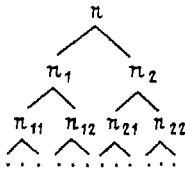


Рис. 8.

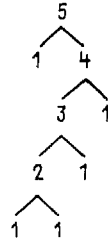


Рис. 9

Например, слову $x((x^2 \cdot x) \cdot x)$ соответствует дерево, изображенное на рис. 9.

Теорема 8.1. Пусть $S(x)$ — слово длины n в локальной аналитической лупе Q , каноническое разложение которой имеет вид (8.1). Тогда для $S(x)$ имеет место разложение:

$$S(x) = nx + \frac{1}{2} (A_{3,1} \Lambda(x) + A_{3,2} \Lambda(x)) + \frac{1}{6} A_{4,1} \Lambda(x) + \frac{1}{4} A_{4,2} \Lambda(x) + \frac{1}{6} A_{4,3} \Lambda(x) + R(x) + \dots \quad (8.2)$$

$$\frac{A_{k,1}}{(k-1)!} \Lambda(x) + \frac{A_{k,2}}{(k-2)!} \Lambda(x) + \dots + \frac{A_{k,k-1}}{(k-1)!} \Lambda(x) + R(x) + \dots$$

Здесь через $\Lambda(x)$ обозначено $\Lambda(x, x)$ и величины A_{kl} вычисляются по формуле:

$$A_{kl} = n_1^{k-l} n_2^l + n_{11}^{k-l} n_{12}^l + n_{21}^{k-l} n_{22}^l + \dots + 1^{k-l} \cdot 1^l, \quad (8.3)$$

где суммирование идет по всевозможным парам (a, b) дерева $D(S)$; через $R(x)$ обозначены некоторые комитанты от тех коэффициентов разложения (8.1), порядок которых меньше k .

Доказательство проведем индукцией по n . Представим слово $S(x)$ в виде произведения $S(x) = S_1(x) \cdot S_2(x)$, и пусть в соответствии с рис. 8 $|S_1(x)| = n_1$, $|S_2(x)| = n_2$, так что $n_1 + n_2 = n$.

$$\dots + \frac{1}{(k-l)! l!} \Lambda(L(S_1), \dots, L(S_1), \underbrace{L(S_2), \dots, L(S_2)}_l) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(k-1)!} \Lambda(L(S_1), L(S_2), \dots, L(S_2)).$$

Согласно предположению индукции, члены порядка k для слов S_1 и S_2 могут быть записаны в виде (8.2):

$$L_k(S_1) = \frac{1}{(k-1)!} A_{k1} \Lambda_{k,1}(x) + \dots + \frac{1}{(k-1)!} A_{kk-1} \Lambda_{k,k-1}(x) + R_k(x), \quad (8.6)$$

$$L_k(S_2) = \frac{1}{(k-1)!} A_{k2} \Lambda_{k,2}(x) + \dots + \frac{1}{(k-1)!} A_{kk-1} \Lambda_{k,k-1}(x) + R_k(x),$$

а так как $\Lambda_1(S_1) = n_1 x$, $\Lambda_1(S_2) = n_2 x$, то

$$\sum_k = \frac{1}{(k-1)!} (A_{k1} + A_{k2} + n_1^{k-1} n_2) \Lambda_{k,1}(x) +$$

$$+ \frac{1}{(k-2)! 2!} (A_{k2} + A_{k2} + n_1^{k-2} n_2^2) \Lambda_{k,2}(x) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(k-1)!} (A_{kk-1} + A_{kk-1} + n_1 n_2^{k-1}) \Lambda_{k,k-1}(x) + R_k(x) + R_k(x).$$

Сравнивая с разложением (8.2), имеем:

$$A_{k1} = A_{k1} + A_{k2} + n_1^{k-1} n_2, \dots, A_{kk-1} = A_{kk-1} + A_{kk-1} + n_1 n_2^{k-1}. \quad (8.7)$$

По предположению индукции числа A_{hl} и A_{kl} вычисляются по формуле (8.3) для поддеревьев D_1 и D_2 дерева D с вершинами n_1 и n_2 соответственно. Поэтому из (8.7) вытекает, что по той же формуле (8.3), но уже для дерева D , вычисляются и величины A_{kl} , что и требовалось доказать.

Назовем числа A_{kl} характеристиками порядка k слова $S(x)$. Характеристики порядка 3 были введены нами в работе [40], где доказано, в частности, что их сумма постоянна. Это свойство обобщается для характеристик любого порядка.

Лемма 8.1. Характеристики порядка k слова $S(x)$ связаны соотношением

$$T_k(n) = \frac{A_{k1}}{(k-1)!} + \frac{A_{k2}}{(k-2)! 2!} + \dots + \frac{A_{kk-1}}{(k-1)!} = \frac{n^k - n}{k!} \quad (8.8)$$

Доказательство проведем индукцией по n . Представим, как и в теореме 8.1, слово $S(x)$ в виде произведения двух слов длины n_1 и n_2 . Тогда в силу соотношений (8.7)

$$T_k(n) = T_k(n_1) + T_k(n_2) + \frac{n_1^{k-1} n_2}{(k-1)!} + \frac{n_1^{k-2} n_2^2}{(k-2)! 2!} + \dots + \frac{n_1 n_2^{k-1}}{(k-1)!}.$$

По предположению индукции $k!T_k(n_1) = n_1^k - n_1$, $k!T_k(n_2) = n_2^k - n_2$. Подставляя в предыдущее равенство, предварительно умноженное на $k!$, получаем:

$$k! T_k(n) = n_1^k - n_1 + n_2^k - n_2 + \frac{k!}{(k-1)!} n_1^{k-1} n_2 + \frac{k!}{(k-2)! 2!} n_1^{k-2} n_2^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{k!}{(k-1)!} n_1 n_2^{k-1} = n_1^k + C_k^1 n_1^{k-1} n_2 + \dots$$

$$\dots + C_k^{k-1} n_1 n_2^{k-1} + n_2^k - (n_1 + n_2) = (n_1 + n_2)^k - (n_1 + n_2) = n^k - n,$$

что и требовалось доказать.

Заметим для дальнейшего, что сумма $T_k(n)$ не зависит от расстановки скобок в слове $S(x)$, а зависит только от его длины. Поэтому для слов равной длины она одинакова. Непосредственно доказывается

Лемма 8.2. Пусть $\varphi = \lambda_p a^p$ и $\psi = \mu_p a^p$ ($p = \overline{1, s}$) — две линейные формы, коэффициенты которых связаны соотношением $\Sigma \lambda_i = \Sigma \mu_i$. Тогда форма $\varphi - \psi$ может быть записана в виде:

$$\varphi - \psi = v_1 (a^1 - a^2) + (v_1 + v_2) (a^2 - a^3) + \dots +$$

$$+ (v_1 + v_2 + \dots + v_{s-1}) (a^{s-1} - a^s), \quad (8.9)$$

где обозначено $\lambda_p - \mu_p = v_p$.

Теорема 8.2. Пусть S_1 и S_2 — слова длины n в координатной лупе $l(a, b)$ три-ткани W , A_{hl} и A_{hl} — их характеристики порядка k . Тогда имеет место равенство:

$$L_k^l(S_1) - L_k^l(S_2) = -[v_{k1} c_{(j_{k-1} j_1 r + j_k j_2 \dots j_{k-2})}^l +$$

$$+ (v_{k1} + v_{k2}) c_{(j_{k-2} j_1 r + j_{k-1} j_2 \dots j_{k-3} r + j_k)}^l +$$

$$+ (v_{k1} + v_{k2} + v_{k3}) c_{(j_{k-3} j_1 r + j_{k-2} j_2 \dots j_{k-4} r + j_{k-1} r + j_k)}^l + \dots$$

$$\dots + (v_{k1} + \dots + v_{kk-2}) c_{(j_2 j_1 r + j_3 \dots r + j_k)}^l + \beta_{j_1 \dots j_k}^l] x^{j_1} \dots x^{j_k}, \quad (8.10)$$

где

$$v_{kl} = \frac{1}{(k-l)! l!} (A_{kl} - A_{kl}), \quad (8.11)$$

а в комитант $\beta_{j_1 \dots j_k}^l$ входят основные тензоры дифференциально-геометрических объектов ткани W , порядок которых ниже k , и все тензоры вычислены в точке (a, b) .

Доказательство. Выражения для $L_k^l(S_1)$ и $L_k^l(S_2)$ даются формулами (8.6). Входящие в них коэффициенты $\lambda_{kl} = \frac{1}{(k-l)! l!} A_{kl}$

и $\mu_{kl} = \frac{1}{(k-l)! l!} A_{kl}$ удовлетворяют условию леммы 8.2, так как в силу леммы 8.1

$$\sum_{l=1}^{k-1} \lambda_{kl} = \sum_{l=1}^{k-1} \mu_{kl} = \frac{n^k - n}{k!}.$$

Поэтому, применяя лемму 8.2 и обозначения (8.11), получаем:

$$\begin{aligned} L(S_1) - L(S_2) = & \nu_{k,1} (\Lambda(x) - \Lambda(x)) + (\nu_{k,1} + \nu_{k,2}) (\Lambda(x) - \Lambda(x)) + \dots \\ & \dots + (\nu_{k,1} + \dots + \nu_{k,k-2}) (\Lambda(x) - \Lambda(x)) + R_k(x) - R_k(x). \end{aligned}$$

Далее записываем многочлены $\Lambda(x)$ в координатной форме и применяем соотношения (7.4), связывающие коэффициенты канонического разложения лупы $l(a, b)$ с основными тензорами три-ткани. В результате приходим к формуле (8.10). Теорема доказана.

Определение. Будем говорить, что тождество $S_1(x) = S_2(x)$ в аналитической лупе Q имеет порядок k , если для любого i при $i \leq k$ выполняется $L(S_1) = L(S_2)$.

Из вида разложения (8.2) следует, во-первых, что слова $S_1(x)$ и $S_2(x)$, входящие в тождество, должны иметь одинаковую длину, и, во-вторых, так как члены второго порядка в разложении (8.2) отсутствуют, любое тождество вида $S_1(x) = S_2(x)$ имеет порядок по крайней мере 2.

Вопрос о существовании тождеств порядка k , где $k > 2$, мы рассмотрим в § 9, а сейчас выведем из последней теоремы следствие, касающееся замкнутых g_W -структур.

Следствие. Пусть в каждой координатной лупе аналитической три-ткани W выполняется $k-2$ тождеств порядка $k-1$: ${}^p S_1(x) = {}^p S_2(x)$, $p = \overline{1, k-2}$. Обозначим через ${}^p A_{kl}$ и ${}^p A_{kl}$ характеристики слов ${}^p S_1(x)$ и ${}^p S_2(x)$, и положим ${}^p \nu_{kl} = {}^p A_{kl} - A_{kl}$. Тогда если имеет место неравенство

$$\det({}^p \nu_{kl}) \neq 0, \quad p, l = \overline{1, k-2}, \quad (8.12)$$

то определяемая рассматриваемой тканью g_W -структура будет замкнутой g -структурой класса $2k-2$.

Доказательство. По условию теоремы $L(S_1) = L(S_2)$ при $s < k$, поэтому имеем:

$$0 \equiv {}^p S_1^i(x) - S_2^i(x) = L_k^i({}^p S_1) - L_k^i({}^p S_2) + o_k(x),$$

где через $o_k(x)$ обозначены члены порядка выше k . Так как последние соотношения должны выполняться тождественно отно-

сительно x , то, приравнявая в них нулю члены порядка k и пользуясь формулой (8.10), получаем:

$$\begin{aligned} \rho_{\nu k_1} c_{(j_{k-1} j_1 r + j_k j_2 \dots j_{k-2})}^i - \dots - (\rho_{\nu k_1} + \dots + \rho_{\nu k_{k-2}}) c_{(j_2 j_1 r + j_3 \dots r + j_k)}^i + \\ + \rho_{\beta k}^{(j_1 \dots j_k)} = 0. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Итак, получается $k-2$ уравнений на основные тензоры $c_{(j_{k-1} j_1 \dots j_{k-2})}^i, \dots, c_{(i_1 j_2 r + j_3 \dots r + j_k)}^i$. В силу условия (8.12) эти уравнения линейно независимы и из них можно выразить указанные основные тензоры через тензоры меньшей валентности, входящие в $\rho_{\beta k}^{(j_1 \dots j_k)}$. Таким образом, тензоры $c_{(j_{k-1} j_1 \dots j_{k-2})}^i, \dots, \dots, c_{(j_2 j_1 r + j_3 \dots r + j_k)}^i$ оказываются замкнутыми. Применяя теперь теорему 5.2, получаем, что g_W -структура рассматриваемой ткани W будет замкнутой g -структурой класса $2k-2$.

§ 9. О СУЩЕСТВОВАНИИ И КЛАССИФИКАЦИИ ТОЖДЕСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В ЛОКАЛЬНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ЛУПЕ

Как следует из предыдущего параграфа, задача классификации замкнутых g_W -структур тесно связана с классификацией тождеств от одной переменной в локальной аналитической лупе. Возможно, что первая классификация просто сводится ко второй, но это уже отдельная проблема. Во всяком случае уже ясно, что тождества с одной переменной поставляют значительный класс замкнутых g_W -структур.

Прежде всего решим вопрос о существовании тождеств с одной переменной порядка $k > 2$. Рассмотрим вначале случай $k=3$. Из формулы (8.2) видно, что разложение слов $S_1(x)$ и $S_2(x)$ совпадает до третьего порядка включительно тогда и только тогда, когда $A_{31} = A_{31}$, $A_{32} = A_{32}$. Прямым перебором

нетрудно проверить, что среди слов длины 4 таких пар слов нет. Среди слов длины 5 уже 4 пары таких слов, которые дают следующие тождества [40]:

$$x^2(x^2x) = x((x^2x)x), \quad x^2(xx^2) = x((xx^2)x), \quad (9.1)$$

$$(x^2x)x^2 = (x(x^2x))x, \quad (xx^2)x^2 = (x(xx^2))x. \quad (9.2)$$

Пользуясь формулой (8.3) и следствием из теоремы 8.2, получаем следующий результат.

Теорема 9.1 ([42]). Пусть в координатных лупах три-ткани W выполняется одно из тождеств (9.1) и одно из тождеств (9.2). Тогда определяемая этой тканью g_W -структура будет замкнутой g -структурой класса 6.

Перейдем к тождествам порядка 4. Оказалось [8], что минимальная длина слов, образующих тождество порядка 4,

равна десяти. Эта задача также решалась перебором всевозможных слов, но уже с использованием ЭВМ, поскольку число слов длины n равно $\frac{1}{n-1}C_{2n-2}^n$ и при $n=10$ составляет 4862. Соответствующая программа осуществила перебор всех слов и вычислила коэффициенты их разложения до четвертого порядка включительно. В результате доказано [8], что существует 6 тождеств порядка 4 длины 10 и 56 тождеств порядка 4 длины 11.

Чтобы понять, какие из этих тождеств приведут к замкнутости g_w -структуры, необходимо их классифицировать. До настоящего времени не было работ по классификации тождеств в гладких лупах (в частности, тождеств с одной переменной), хотя их алгебраическая классификация разрабатывалась [48], [11]. Принципы геометрической классификации тождеств с одной переменной изложены в [8]. В основу классификации положено сформулированное в § 8 понятие тождества порядка k . Кроме того, тождества делятся на основные и неосновные. Тождество $S_1(x) = S_2(x)$ называется тождеством основного типа, если деревья $D(S_1)$ и $D(S_2)$ (см. § 8) не совпадают на множестве неупорядоченных деревьев (дерево называется неупорядоченным, если порядком следования поддеревьев, имеющих общий корень, можно пренебречь). Тождества $S_1(x) = S_2(x)$ и $S_1'(x) = S_2'(x)$ называются эквивалентными, если с точностью до порядка $S_1(x) = S_1'(x)$ и $S_2(x) = S_2'(x)$. В классе эквивалентных тождеств одно из них называется корневым* [8].

Если оставить вне рассмотрения сократимые тождества, то есть тождества вида $S_1(x)S(x) = S_2(x)S(x)$, то основной результат, полученный в [8], с точностью до введенной эквивалентности, формулируется так: среди тождеств порядка 4 длины 10 имеется только одно корневое тождество основного типа; среди тождеств порядка 4 длины 11 таких будет 8. Эти 9 тождеств приведены в [8].

Данная классификация не совсем подходит для описания g_w -структур и вот почему. В следствии к теореме 8.2 фигурируют тождества, для которых выполняется неравенство (8.12). Это означает, в частности, что среди них не должно быть таких, у которых все числа v_{hl} равны нулю, или равны характеристике A_{h1} и A_{h2} правого и левого слов. Но характеристики слова вычисляются по формулам (8.3) и зависят от пар, входящих в соответствующее дерево. Следовательно, мы должны исключить тождества, правое и левое дерево у которых состоят из одних и тех же пар. Сюда, во-первых, относятся тож-

* Тождество, эквивалентное данному, названо в [8] производным от него. Однако авторы не приняли во внимание, что термин «производное тождество» уже занят, см. § 3.

дества неосновного типа, у которых правое и левое деревья содержат одинаковые пары на одинаковых уровнях. Во-вторых, нужно исключить, например, тождества вида $S_1(S_2S) = S_2(S_1S)$, где слова S_1 и S_2 имеют одинаковую длину. У таких тождеств, как легко увидеть, правое и левое деревья состоят также из одинаковых пар, но у них одинаковые пары находятся на разных уровнях. К тождествам последнего типа относятся, в частности, два последних из тех восьми тождеств длины 11, которые приведены в [8].

Далее, отношение эквивалентности тождеств, введенное в [8], является для нас слишком сильным: два эквивалентных тождества имеют, вообще говоря, различные числа v_{hl} . Введем более слабое отношение эквивалентности так: два тождества $S_1(x) = S_2(x)$ и $S_1'(x) = S_2'(x)$ будем считать эквивалентными, если дерево $S_1'(x)$ получается из дерева $S_1(x)$ той же самой перестановкой поддеревьев, что и дерево $S_2'(x)$ из дерева $S_2(x)$. Из формулы (8.3) видно, что тождествам, эквивалентным в этом смысле, отвечают одни и те же числа v_{hl} .

Итак, если отбросить 1) сократимые тождества, 2) тождества, для которых все v_{hl} равны нулю, и взять в каждом классе эквивалентности (в последнем смысле) по представителю, то получим следующие тождества порядка 4: одно длины 10 —

$$x(x^2(x^2(x(x(x^2)))))) = x^2(x(x(x^2(x^2x))))), \quad (9.3)$$

и семь длины 11 —

$$\begin{aligned} x(x^2(x^2(x(x(x(x^2))))))) &= x^2(x(x(x(x^2(x^2x^2))))), \\ x(x^2(x^2(x^2(x(x(x^2))))))) &= x^2(x(x(x^2(x^2(x^2x))))), \\ x(x^2(x((x(x^2)(x(x(x^2))))))) &= x^2(x(x(x^2(((x(x(x^2))x))))), \\ x(x((x^2x)((x(x(x^2))x^2))) &= x^2(x(x^2(((x(x(x^2))x)x))), \\ x(x((x^2x)((x^2x^2)x^2))) &= x^2(x(x^2(((x^2x^2)x)x))), \\ x(((x(x^2)x)((x((x^2x)x)x))) &= (x^2x)(x(((x(x^2x))x^2)x)), \\ x(x((x^2(x(x(x^2)))(x(x^2)))) &= x^2((x^2(x((x(x(x^2))x)))x). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Тождество (9.3) и первые 6 тождеств (9.4) имеются в [8]; последнее тождество (9.4) там отсутствует, так как оно появилось в результате изменения отношения эквивалентности (в смысле более сильной эквивалентности из [8] оно совпадает с тождеством (9.4, 4)).

Классификацию можно продолжить. Выпишем числа v_{51} , v_{52} , v_{53} , v_{54} с точностью до общего множителя для каждого из тождеств (9.3) и (9.4), и расположим их в виде матрицы:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 8 & 3 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -19 & -19 & -7 & -60 \\ 1 & 1 & 1 & 13 & 44 & 44 & 12 & 85 \\ -2 & -2 & -2 & -21 & -58 & -58 & -13 & -102 \end{array} \quad (9.5)$$

Различных столбцов в этой матрице, как видно всего пять, а ее ранг равен трем. Числами «3» и «5» мы заканчиваем классификацию тождеств порядка 4, длина которых не превышает одиннадцати. Применяя следствие из теоремы (8.2), получаем следующий результат.

Теорема 9.2. Пусть в каждой координатной лупе аналитической три-ткани выполняются три тождества из списка (9.3)—(9.4), которым в матрице (9.5) отвечают независимые столбцы. Тогда g_w -структура этой ткани будет замкнутой g -структурой класса 8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аквис М. А., Дифференциальная геометрия тканей. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1983, 15, 187—213 (РЖМат, 1984, 7A630)
2. —, Об условиях алгебраизуемости тройки кривых в трехмерном проективном пространстве. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1987, 129—136 (РЖМат, 1977, 7A701)
3. —, Шелехов А. М., О подтканях многомерных тканей. Редкол. ж. «Сиб. мат. ж.», Новосибирск, 1985. 20 с., библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 9 окт. 1985 г., № 7130 — В Деп.) (РЖМат, 1986, 2A770 ДЕП)
4. —, —, О канонических координатах в локальной аналитической лупе. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1986, 120—124 (РЖМат, 1986, 8A208)
5. Бахтурин Ю. А., Слинко А. М., Шестаков И. П., Неассоциативные кольца. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Алгебра, Топология, Геометрия, 1981, 18, 3—72 (РЖМат, 1981, 6A253)
6. Белоусов В. Д., Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967, 223 с. (РЖМат, 1967, 11A212К)
7. —, Рыжков В. В., Геометрия тканей. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Алгебра, Топология, Геометрия, 1972, 10, 159—188 (РЖМат, 1973, 2A602)
8. Биллиг В. А., Шелехов А. М., О классификации тождеств от одной переменной в гладкой локальной лупе. Ткани и квазигруппы, Калинин, 1987. 24—32 (РЖМат, 1987, 7A722)
9. Боцу В. П., Об изоклинности четырехмерных шестигульных три-тканей. Моск. гидрометеор. ин-т, М., 1984, 27 с., библиогр. 8 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 14 авг. 1984 г., № 5824—84 Деп) (РЖМат, 1984, 12A755 ДЕП)
10. Веселяева Т. Ю., Об одной три-ткани на проективной плоскости $R_n P_2$ над алгеброй R_n матриц. Ткани и квазигруппы, Калинин, 1986, 16—20 (РЖМат, 1986, 8A793)
11. Вецломов В. Е., О фигурах замыкания для одного класса универсальных тождеств. Мат. исследов., Кишинев, 1975, 10 вып. 2(36), 36—63 (РЖМат, 1976, 1A265)
12. Гвоздович Н. В., Некоторые вопросы общей теории инфинитезимальных автоморфизмов многомерных три-тканей. Проблемы теории тканей и квазигрупп. Калинин, 1985, 49—54 (РЖМат, 1985, 10A716)
13. Драгунов В. К., О координатной три-ткани на поверхности в пространстве кубической метрики. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1982, 86—93 (РЖМат, 1982, 12A736)
14. —, О семействе кубических сфер, соприкасающихся с поверхностью, в пространстве кубической метрики. Проблемы теории тканей и квазигрупп, Калинин, 1985, 133—139 (РЖМат, 1985, 10A670)
15. —, О существовании координатной три-ткани Дарбу на поверхности в

- пространстве K^3 . Ткани и квазигруппы. Калинин, 1986, 29—36 (РЖМат, 1986, 8A752)
16. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.*, Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Probl. геометрии, 1979, 9, 7—246 (РЖМат, 1980, 1A800K)
 17. *Клековкин Г. А.*, Четырехмерные три-ткани с ковариантно постоянным тензором кривизны. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1984, 56—63 (РЖМат, 1985, 1A841)
 18. —, *Тимошенко В. В.*, Вещественные реализации три-тканей над двумерными алгебрами. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1984, 63—69 (РЖМат, 1985, 1A842)
 19. *Лазарева В. Б.*, Три-ткани, образованные семействами окружностей на плоскости. Дифференциальная геометрия. Калинин, 1977, 49—64 (РЖМат, 1977, 12A780)
 20. —, Три-ткани на двумерной поверхности в триаксиальном пространстве. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1979, № 10, 54—59 (РЖМат, 1980, 1A820)
 21. —, О три-тканях, порожденных тремя r -плоскостями в проективном пространстве размерности $2r+1$. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1981, 56—68 (РЖМат, 1982, 1A893)
 22. —, Об одном классе многомерных параллелизуемых тканей. Материалы 5 конф. молодых ученых ун-та Дружбы Народов. Университет Дружбы Народов им. П. Лумумбы. М., 1982, 47—50, библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 15 июля, 1982 г., № 3814—82 Деп.) (РЖМат, 1982, 11A615 ДЕП)
 23. —, О три-ткани Дарбу на поверхности в триаксиальном пространстве. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1982, 45—55 (РЖМат, 1982, 12A735)
 24. —, Об одном классе поверхностей, несущих сеть кривых второго порядка. Материалы 6 конф. молодых ученых ун-та Дружбы Народов. Университет Дружбы Народов им. П. Лумумбы. М., 1983, 104—107, библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 5 марта 1984 г., № 1316—84 Деп.) (РЖМат, 1984, 7A583 ДЕП)
 25. —, О соприкасающихся гомографиях точечного соответствия трех прямых. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1984, 70—76 (РЖМат, 1985, 1A817)
 26. —, О гомографиях Годо в трехмерном проективном пространстве. Проблемы теории тканей и квазигрупп. Калинин, 1985, 84—89 (РЖМат, 1985, 10A605)
 27. —, *Орлова О. В.*, Об одном классе шестиугольных три-тканей из пучков окружностей. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1986, 115—119 (РЖМат, 1986, 8A797)
 28. *Михеев П. О.*, О G -свойстве локальных аналитических луп Бола. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1986, 54—59 (РЖМат, 1986, 8A205)
 29. *Сабинин Л. В., Михеев П. О.*, О геометрии гладких луп Бола. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1984, 144—154 (РЖМат, 1985, 1A867)
 30. —, —, О локальных аналитических лупах с тождеством правой альтернативности. Проблемы теории тканей и квазигрупп. Калинин, 1985, 72—75 (РЖМат, 1985, 10A244)
 31. *Голстихина Г. А.*, Об одном свойстве 4-ткани, имеющей групповую подткань. Проблемы теории тканей и квазигрупп. Калинин, 1985, 121—128 (РЖМат, 1985, 10A718)
 32. —, О главных направлениях на r -мерной поверхности, определяемых $2r$ -мерной три-тканью. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1987, 99—107 (РЖМат, 1987, 7A725)
 33. *Уткин А. А.*, О три-ткани, определяемой на поверхности норм-кривой. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1986, 71—77 (РЖМат, 1986, 8A795)
 34. —, О существовании координатной три-ткани Дарбу на гладкой поверхности в пространстве N^3 . Ткани и квазигруппы. Калинин, 1987, 113—119 (РЖМат, 1987, 7A703)
 35. —, *Шелехов А. М.*, К геометрии гладкой поверхности пространства N^3 . Ткани и квазигруппы. Калинин, 1987, 120—128 (РЖМат, 1987, 7A704)

36. Федорова В. И., О классификации шестимерных три-тканей Бола. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1984, 124—132 (РЖМат, 1985, 1A844)
 37. Шелехов А. М., Об одном классе три-тканей. Дифференц. геометрия. Калинин, 1977, 130—137 (РЖМат, 1977, 12A776)
 38. —, Демидова Л. А., О некоторых фигурах замыкания на три-ткани. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1981, 42—46 (РЖМат, 1982, 1A892)
 39. —, О характеристическом свойстве грасмановых три-тканей, определяемых кубическим симметроидом. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1984, 112—117 (РЖМат, 1985, 1A843)
 40. —, Тождества с одной переменной в лупах, эквивалентные моноассоциативности, Проблемы теории тканей и квазигрупп. Калинин, 1985, 89—93 (РЖМат, 1985, 10A257)
 41. —, О замкнутых g -структурах, определяемых многомерными три-тканями. Калининский госуниверситет. Калинин, 1985, 49 с., библиогр. 24 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 25 дек. 1985 г., № 8815—В) (РЖМат, 1986, 4A877 ДЕП)
 42. —, О вычислении ковариантных производных тензора кривизны многомерной три-ткани. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1986, 96—103 (РЖМат, 1986, 8A796)
 43. —, О три-тканях, определяемых детерминантной поверхностью. Изв. вузов. Мат., 1986, № 3, 84—86 (РЖМат, 1986, 8A792)
 44. —, О структурных уравнениях многомерной шестугольной три-ткани. Калининский госуниверситет. Калинин, 1986, 11 с., библиогр. 3 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 30 июля 1986 г., № 5563—В86) (РЖМат, 1987, 2A680 ДЕП)
 45. —, Шестакова М. Г., Геометрическое доказательство универсальности некоторых тождеств в лупах. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1984, 118—124 (РЖМат, 1985, 1A325)
 46. —, —, О тождествах в лупах со слабой ассоциативностью. Проблемы теории тканей и квазигрупп. Калинин, 1985, 115—121 (РЖМат, 1985, 10A258)
 47. Bruck R. H., A survey of binary systems. Berlin, Springer, 1971, 186 (РЖМат, 1971, 7A282К)
 48. Fenjves F., Extra-loops. II. On loops with identities of Bol-Moufang type. Publ. math., 1969, 16, № 1—4, 187—192 (РЖМат, 1971, 6A251)
 49. Hofman K. H., Strambach K., Topological and analytical loops. Preprint № 869, 1985, Technische Hochschule, Darmstadt
 50. Holmes J. P., Differentiable power associative groupoids. Pacif. J. Math., 1972, 41, № 2, 391—394 (РЖМат, 1973, 1B625)
 51. —, Sagle A. A., Analytic H -spaces, Campbell-Hausdorf formula, and alternative algebras. Pacif. J. Math., 1980, 91, № 1, 105—134 (РЖМат, 1981, 11A300)
 52. Kikkawa Michihiko, Canonical connections of homogeneous Iie loops and 3-webs. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ., 1985, 19, 37—55
 53. Nagy T. Péter, On the canonical connection of a 3—web. Publ. Math., 1985, 32, № 1-2, 93—99 (РЖМат, 1986, 10A755)
-