ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1974 МАТЕМАТИКА № 5 (144)

УДК 517.948

В. К. Иванов

ОБ ОЦЕНКЕ УСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИРЕШЕНИЙ НА НЕКОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

К семидесятилетию
Александра Петровича Нордена

§ 1. Введение

1. Пусть U и F — гильбертовы пространства, которые, в частности, могут и совпадать, A — линейный оператор из U в F со всюду плотными областями определения $D(A)\subset U$ и значений $R(A)\subset F$. Будем предполагать, что соответствие $A:D(A)\to R(A)$ взаимно однозначно, так что существует обратный оператор $A^{-1}:R(A)\to D(A)$, причем оператор A^{-1} неограничен.

При таких предположениях решение уравнения

$$Au=f,\ u\in U,\ f\in F, \tag{1}$$

является некорректно поставленной задачей. Один из способов преодоления возникающих здесь трудностей — введение понятия квазирешения.

Определение. Квазирешением уравнения (1) на заданном множестве $M\subset U$ при правой части $\tilde f\in F$ называется элемент $\tilde u\in M$, минимизирующий функционал $\Phi(u)=\|Au-\tilde f\|^2$ [1].

Если M — компакт, а оператор A непрерывен, то квазирешение удовлетворяет всем условиям корректности по Адамару: оно существует при любой правой части $\tilde f\in F$, единственно и непрерывно зависит от $\tilde f$.

Положим $A(M)=N$, $N\subset R(A)\subset F$. За оценку устойчивости для квазирешения можно взять величину модуля непрерывности оператора A^{-1} на N:

$$\Omega(\tau,\ M)=\sup\|u_1-u_2\| \text{ при } u_1,\ u_2\in M,\ \|Au_1-Au_2\|\leqslant\tau. \tag{2}$$

Непрерывность оператора A^{-1} на N эквивалентна условию

$$\lim_{\tau\to 0}\Omega(\tau,\ M)=0. \tag{3}$$

Как известно, это имеет место, если A непрерывен, а M есть компакт [2].

2. В качестве множества M удобно брать эллипсоиды, идея их построения как образов шара при линейном отображении принадлежит М. М. Лаврентьеву [3]. Общие методы нахождения $\Omega(\tau,\ M)$ на компактных эллипсоидах были развиты в работах [4] — [6]; Л. Ф. Коркиной [7] на основе метода К. Миллера [8] получены двусторонние оценки для некоторых некомпактных эллипсоидов.

Распространение на такие множества понятия квазирешения и применение при некоторых условиях метода [5] для получения оценок, было дано В. А. Морозовым [9].

В настоящей работе усовершенствован метод работы [5], что позволило получить в явном виде неулучшаемые оценки устойчивости квазирешений на некомпактных эллипсоидах при достаточно слабых ограничениях.

§ 2. Оценка устойчивости

3. Кроме U и F, введем еще гильбертово пространство V (возможен случай $V \subset U$) и линейный оператор B из V в U со всюду плотными областями определения $D(B) \subset V$ и значений $R(B) \subset U$, причем будем считать, что $R(B) \subset D(A)$. Тогда можно рассматривать оператор $C = AB$, действующий из V в F. Сделаем следующие предположения:

1) операторы B и C замкнуты;

2) область значений $R(C)$ оператора C плотна в F;

3) действующие в пространстве V операторы $B_1 = B^*B$ и $C_1 = C^*C$ коммутируют: $B_1C_1 = C_1B_1$.

В качестве класса M возьмем образ шара $S_r = \{v \in V : \|v\| \leqslant r\}$ при отображении B:

$$M_r = \{u \in M : u = Bv,\ v \in D(B),\ \|v\| \leqslant r\}.$$

Функцию $\Omega(\tau, M)$ из (2), соответствующую множеству M_r, будем обозначать через

$$\Omega(\tau, r) = \sup \|u_1 - u_2\| \text{ при } u_i = Bv_i,\ \|v_i\| \leqslant r,\ i = 1, 2;\ \|A(u_1 - u_2)\| \leqslant \tau. \quad (4)$$

Вместо $\Omega(\tau, r)$ можно ввести функцию

$$\omega(\tau, r) = \sup \|u\| \text{ при } u = Bv,\ \|v\| \leqslant r,\ \|Au\| \leqslant \tau. \quad (5)$$

Функции $\omega(\tau, r)$ и $\Omega(\tau, r)$ связаны простой зависимостью: $\Omega(\tau, r) = \omega(\tau, 2r)$ (см. [6]). Таким образом, наша задача сводится к нахождению $\omega(\tau, r)$.

4. Положим $AB = C$. Операторы $C_1 = C^*C$ и $B_1 = B^*B$ положительные самосопряженные, действующие в гильбертовом пространстве V. Будем предполагать, что операторы C_1 и B_1 коммутируют. Тогда они являются функциями от некоторого самосопряженного оператора D. Мы будем рассматривать наиболее важный для приложений случай, когда B_1 является функцией от оператора C_1, т. е. $B_1 = g(C_1)$, где $g(\gamma)$ — вогнутая возрастающая функция, определенная на спектре оператора C_1. Продолжим ее на весь отрезок $[0, \|C_1\|]$ (при неограниченном $C_1 : \|C_1\| = +\infty$), доопределив ее на интервалах, дополнительных к спектру, как линейную функцию. Если $\|C_1\| < +\infty$, то при $\gamma > \|C_1\|$ полагаем $g(\gamma) = g(\|C_1\|)$. Продолженная таким образом $g(\gamma)$ будет вогнутой возрастающей функцией.

С помощью операторов C и B функцию $\omega(\tau, r)$ можно записать следующим образом: $\omega(\tau, r) = \sup \|Bv\|$ при $\|v\| \leqslant r$, $\|Cv\| \leqslant \tau$ или $\omega^2(\tau, r) = \sup (B_1v, v)$ при $(v, v) \leqslant r^2$, $(C_1v, v) \leqslant \tau^2$. Наконец, с помощью спектральной функции E_γ оператора C_1 это записывается так:

$$\omega^2(\tau, r) = \sup \int_0^\infty g(\gamma)\, d(E_\gamma v, v) \text{ при } \int_0^\infty d(E_\gamma v, v) \leqslant r^2,\ \int_0^\infty \gamma\, d(E_\gamma v, v) \leqslant \tau^2. \quad (6)$$

5. Теорема 1. *Функция* $\omega(\tau, r)$ *из* (6) *выражается формулой*

$$\omega(\tau, r) = r\sqrt{g\left(\frac{\tau^2}{r^2}\right)} \quad (\tau \leqslant r\sqrt{\|C_1\|}),$$

$$\omega(\tau, r) = r\sqrt{g(\|C_1\|)} \quad (\tau > r\sqrt{\|C_1\|}),$$

где $g(\gamma)$ — *функция, обладающая указанными выше свойствами.*

Доказательство. Каждому вектору $v \in D(B)$ поставим в соответствие неубывающую функцию от γ:

$$\mu(\gamma) = \mu_0 + \frac{1}{r^2}(E_\gamma v, v), \quad \mu_0 = 1 - \frac{1}{r^2}(E_\infty v, v).$$

Так как $(E_\infty v, v) = \int\limits_0^\infty d(E_\gamma v, v) \leqslant r^2$, то $\mu_0 \geqslant 0$, кроме того, $\mu(+\infty) = 1$.

Наша задача свелась к такой: найти $\omega^2(\tau, r) = r^2 \sup \int\limits_0^\infty g(\gamma)\, d\mu(\gamma)$ на множестве неубывающих неотрицательных функций $\mu(\gamma)$, определенных на $[0, +\infty)$, имеющих точки роста только на спектре оператора C_1 и удовлетворяющих условиям $\mu(+\infty) = 1$, $\int\limits_0^\infty \gamma d\mu(\gamma) \leqslant \frac{\tau^2}{r^2}$.

Рассмотрим плоскость (γ, β) и обозначим через Γ график функции $\beta = g(\gamma)$. Это вогнутая кривая, расположенная в первом квадранте. Пусть $P(\gamma, \beta)$, $P_0(0, \beta_0)$, $\beta = g(\gamma)$, — точки на кривой Γ. Будем интерпретировать значение $\mu(\gamma)$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant +\infty)$ как значение массы, распределенной на участке P_0P кривой Γ. Величина массы, распределенной на всей кривой Γ, равна единице. Тогда числа

$$\gamma_C = \int\limits_0^\infty \gamma d\mu(\gamma), \quad \beta_C = \int\limits_0^\infty g(\gamma)\, d\mu(\gamma)$$

будут координатами центра тяжести этого распределения.

Из сказанного видно, что наша экстремальная задача допускает следующую механическую интерпретацию: на кривой Γ, в точках, абсциссы которых принадлежат спектру оператора C_1, распределить единичную массу так, чтобы абсцисса центра тяжести удовлетворяла соотношению $\gamma_C \leqslant \tau^2/r^2$, а ордината β_C имела бы наибольшее значение. Геометрически ясно, что это будет иметь место, если взять $\gamma_C = \tau^2/r^2$, а $\beta_C = g(\tau^2/r^2)$. Здесь возможны 3 случая:

1) $\gamma_C = \tau^2/r^2$ — собственное значение;

2) $\gamma_C = \tau^2/r^2$ — точка непрерывного спектра;

3) $\gamma_C = \tau^2/r^2$ не принадлежит спектру.

В случае 1) мы размещаем единичную массу в точке $P(\gamma_C, \beta_C)$, в случае 2) размазываем единичную массу в окрестности этой точки. Случай 3) можно подразделить на два подслучая: 3а) $\tau^2/r^2 \leqslant \|C_1\|$; 3б) $\tau^2/r^2 > \|C_1\|$ (точка $\|C_1\|$ принадлежит спектру).

Пусть в случае 3а) γ_1 и γ_2 — ближайшие к γ_C точки спектра $(\gamma_1 < \gamma_C < \gamma_2)$. Разместим в каждой точке $(\gamma_i, g(\gamma_i))$, $i = 1, 2$, точечную массу, если γ_i — собственное значение, или размажем эту массу по окрестности точки, если γ_i — точка непрерывного спектра, так,

чтобы центр тяжести попал в точку (γ_C, β_C), где $\gamma_C = \tau^2/r^2$, а $\beta_C = g(\tau^2/r^2)$ или близко к $g(\tau^2/r^2)$ в случае точек непрерывного спектра.

В случае 3б), который может встретиться лишь при ограниченных A и B, размещаем единичную массу в точке $(\|C_1\|, g(\|C_1\|))$ или, соответственно, размазываем ее по окрестности этой точки.

Таким образом,

$$\sup \beta_C = g(\tau^2/r^2) \text{ при } \tau^2 \leqslant r^2\|C_1\|, \quad \sup \beta_C = g(\|C_1\|) \text{ при } \tau^2 \geqslant r^2\|C_1\|.$$

Следствие 1. Для того чтобы $\lim\limits_{\tau\to 0} \omega(\tau, r) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $g(0) = 0$.

Это утверждение можно сформулировать и в такой эквивалентной форме:

Следствие 2. Для того чтобы $\lim\limits_{\tau\to 0} \omega(\tau, r) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\inf\|Bv\| = 0$ при $\|v\| = 1$, $Bv \neq 0$.

6. Теорему 1 можно несколько обобщить. Предположим, что операторы B_1 и C_1 являются функциями самосопряженного оператора D: $B_1 = \beta(D)$, $C_1 = \gamma(D)$. Будем предполагать, что функции $\gamma = \gamma(\lambda)$, $\beta = \beta(\lambda)$ определены на отрезке $[\lambda_1, \lambda_2]$ (конечном или бесконечном), содержащем спектр оператора D, дважды непрерывно дифференцируемы на нем и удовлетворяют условиям

$$\gamma(\lambda) \geqslant 0, \ \beta(\lambda) \geqslant 0, \ \gamma'(\lambda) > 0, \ \beta'(\lambda) > 0, \ \gamma'(\lambda)\beta''(\lambda) - \gamma''(\lambda)\beta'(\lambda) \leqslant 0. \quad (7)$$

Геометрический смысл этих условий следующий: $\gamma = \gamma(\lambda)$ и $\beta = \beta(\lambda)$ являются параметрическими уравнениями вогнутой кривой $\overline{\Gamma}$, расположенной в первом квадранте плоскости (γ, β). Исключая λ, мы представим уравнение кривой $\overline{\Gamma}$ в виде $\beta = \overline{g}(\gamma)$. Функция $\overline{g}(\gamma)$ на спектре оператора C_1 совпадает с функцией $g(\gamma)$ теоремы 1, а на интервалах, дополнительных к спектру, вследствие линейности $g(\gamma)$ и вогнутости $\overline{g}(\gamma)$ будет $g(\gamma) \leqslant \overline{g}(\gamma)$. Мы приходим к следующему обобщению теоремы 1.

Теорема 1а. *Пусть C_1 и B_1 являются функциями $C_1 = \gamma(D)$, $B_1 = \beta(D)$ самосопряженного оператора D, удовлетворяющими условиям* (7). *Пусть λ_0 — корень уравнения $\gamma(\lambda) = \tau^2/r^2$. Тогда*

$$\omega(\tau, r) \leqslant r\sqrt{\beta(\lambda_0)} \text{ при } \tau \leqslant r\|C_1\|,$$

причем, если λ_0 принадлежит спектру оператора C_1, то имеет место равенство.

Пример. В качестве примера рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве

$$\frac{du}{dt} = Qu, \ u(0) = f, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \ u(t), f \in H,$$

где Q — положительный самосопряженный оператор с плотной областью определения.

Если решение существует, то оно имеет вид

$$u(t) = e^{Qt} f.$$

Оценим $u(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Положим $A = e^{-Qt}$, $C = e^{-QT}$, $B = e^{-Q(T-t)}$. Так как Q положителен, то все эти операторы ограниченные, самосопряженные и положительные. Обратные к ним существуют, но

не ограничены. Мы приходим к задаче

$$Au = f, \quad u = Bv, \quad u = u(t), \quad v = u(T).$$

Здесь t — фиксированное число. Связь между операторами дается формулами

$$B = C^{(1-t/T)}, \quad B_1 = C_1^{(1-t/T)}, \quad \bar{g}(\gamma) = \gamma^{(1-t/T)}.$$

Функция $\bar{g}(\gamma)$ вогнутая, возрастающая, $\bar{g}(0) = 0$. На основании теоремы 1 и сказанного по поводу теоремы 1а имеем

$$\omega(\tau, r) \leqslant r\left(\frac{\tau}{r}\right)^{1-t/T} = r^{t/T}\tau^{1-t/T}, \quad \tau \leqslant r, \tag{8}$$

причем, если τ/r принадлежит спектру оператора C_1, то имеет место равенство. Если же τ/r не принадлежит спектру оператора C_1, то для нахождения $\omega(\tau, r)$ следует воспользоваться теоремой 1, взяв вместо $\bar{g}(\gamma)$ функцию $g(\gamma)$.

Соотношение (8) было найдено С. Г. Крейном в [11].

§ 3. Обобщение метода квазирешений

7. В этом параграфе рассматривается теория квазирешений на эллипсоидах M_r, построенных в § 2. Возможность построения квазирешений на некомпактных множествах была указана В. А. Морозовым в [9], мы применяем другой подход и даем неулучшаемые оценки устойчивости в явной форме.

Если $\tilde{u}$ — квазирешение на множестве M, соответствующее правой части $\tilde{f}$ в уравнении (1), то $\|A\tilde{u} - \tilde{f}\| = \inf\limits_{u \in M} \|Au - \tilde{f}\| = \rho(\tilde{f}, N)$, где $\rho(\tilde{f}, N)$ — расстояние от $\tilde{f}$ до $N = A(M)$.

Пусть q — точка множества N, ближайшая к $\tilde{f}$ (метрическая проекция $\tilde{f}$ на N). Положим $q = P\tilde{f}$, P — оператор метрического проектирования. Тогда квазирешение можно записать в виде

$$\tilde{u} = A^{-1}P(\tilde{f}). \tag{9}$$

Из этого соотношения видно, что вопросы существования, единственности и устойчивости квазирешения связаны со свойствами операторов A и P.

В [3] был рассмотрен случай, когда A непрерывен, M есть выпуклый компакт. Тогда N есть также выпуклый компакт, A^{-1} непрерывен на N и метрическая проекция существует для всякого $f \in F$.

Если F строго выпукло, то метрическая проекция единственна. В этом случае квазирешение удовлетворяет всем условиям корректности по Адамару.

В [10] корректность квазирешения была доказана при других условиях: M — компакт, A — линейный замкнутый оператор, но к пространству F предъявлены более сильные требования: в нем не только метрическая проекция должна быть единственной, но и оператор метрического проектирования должен быть непрерывным (этим свойством обладают, напр., E-пространства).

8. Лемма. *Пусть V и U — гильбертовы пространства, B — замкнутый линейный оператор из V в U. Тогда $M_r = BS_r$ — образ шара $S_r = \{v \in V : \|v\| \leqslant r\}$ — выпуклое и замкнутое множество.*

Доказательство. Выпуклость M_r следует из выпуклости шара S_r и линейности оператора B. На основании теоремы 2 из [11] (с. 834) из замкнутости (слабой) оператора B и слабой компактности шара S_r вытекает слабая замкнутость множества M_r. Но тогда M_r, будучи выпуклым, является и сильно замкнутым. Замкнутость M_r может быть проверена и непосредственно (см. [9]).

Следствие. При принятых нами в § 2 предположениях относительно пространств V, U и F и операторов A, B и C множества $M_r \subset U$ и $N_r \subset F$ выпуклы и замкнуты.

Теорема 2. *При принятых в § 2 условиях для каждого элемента $\tilde{f} \in F$ на M_r существует единственное квазирешение $\tilde{u}$. Для квазирешений имеет место соотношение*

$$\sup \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\| = \omega(\delta, 2r) \quad \text{при } \|\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2\| \leqslant \delta. \tag{10}$$

Если $B = g(C_1)$, где $g(\gamma)$ — вогнутая неубывающая функция, удовлетворяющая условию $g(0) = 0$ (см. п. 4), то

$$\sup \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\| = 2r\sqrt{g(\delta^2/4r^2)} \quad \text{при } \|\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2\| \leqslant \delta,\ \delta \leqslant 2r\sqrt{\|C_1\|}. \tag{10a}$$

Доказательство. Так как F гильбертово, а множество N_r выпукло и замкнуто, то для всякого $\tilde{f} \in F$ существует единственная метрическая проекция q элемента $\tilde{f}$ на N_r, причем, если $\|\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2\| \leqslant \delta$, то $\|q_1 - q_2\| \leqslant \delta$ ([10], с. 838). Так как $u = A^{-1}q$ (см. (9)), то $\|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\| \leqslant \Omega(\delta, r)$. Точность этой оценки следует из того, что при $\tilde{f} \in N$ будет $q = \tilde{f}$ и $\tilde{u} = A^{-1}\tilde{f}$. Учитывая, что $\Omega(\delta, r) = \omega(\delta, 2r)$ (см. п. 3 или [6]) и, используя теорему 1, мы и приходим к (10) и (10a).

Если выполнено условие следствия из теоремы 1, то при $\delta \to 0$ будет $\|\tilde{u}_0 - \tilde{u}_2\| \to 0$, т. е. квазирешение непрерывно зависит от $\tilde{f}$.

Предположим, что при $f = f_0$ уравнение (1) имеет решение $u_0 \in M_r$, но вместо f_0 нам известно $\tilde{f}_\delta$ такое, что $\|f_0 - \tilde{f}_\delta\| \leqslant \delta$. Тогда, как известно, в качестве приближенного решения уравнения (1) можно взять его квазирешение $\tilde{u}_\delta$, соответствующее правой части $\tilde{f}_\delta$. В этом случае, учитывая (10a), для уклонения $\|u_0 - \tilde{u}_\delta\|$ будем иметь неулучшаемую оценку

$$\|u_0 - \tilde{u}_\delta\| \leqslant 2r\sqrt{g(\delta^2/4r^2)} \text{ при } \|f_0 - \tilde{f}_\delta\| \leqslant \delta,\ \delta \leqslant 2r\sqrt{\|C_1\|};$$

необходимое и достаточное условие устойчивости $g(0) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В. К. О линейных некорректных задачах. ДАН СССР, т. 145, № 2, 1962, с. 270—272.

2. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач. ДАН СССР, т. 39, № 5, 1942, с. 195—198.

3. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, Изд. СО АН СССР, 1962.

4. Денчев Р. Об устойчивости уравнений на компакте. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 7, № 6, 1967, с. 1367—1369.

5. Иванов В. К., Королюк Т. И. Об оценке погрешностей при решении линейных некорректно поставленных задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 9, № 1, 1969, с. 30—41.

6. Иванов В. К. Об оценке погрешностей при решении операторных уравнений первого рода. В сб. „Вопр. точности и эффективн. вычисл. алгоритмов. Тр. Симпозиума. Т. 2", Киев, 1969, с. 102—116.

7. Коркина Л. Ф. Оценка модуля непрерывности обратного оператора. Матем. зап. Уральск. ун-та, т. 7, № 2, 1969, с. 76—87.

8. Miller K. Three circle theorem in partional differential equations and applications to improperly posed problems. Rat. Mech. Anal., Bd. 16, 1964, S. 126—154.

9. Морозов В. А. Об оценках погрешности решения некорректно поставленных задач с линейными неограниченными операторами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 10, № 5, 1970, с. 1081—1091.

10. Иванов В. К. Об одном типе некорректных линейных уравнений в векторных топологических пространствах. Сиб. матем. журн., т. VI, № 4, 1965, с. 832—839.

11. Крейн С. Г. О классах корректности некоторых граничных задач. ДАН СССР, т. 114, № 6, 1957, с. 1162—1165.

г. Свердловск

Поступила
30 I 1974