МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2022. Т. 7, вып. 4. С. 395–411.

УДК 517.95+517.984 DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17401

ПРИМЕРЫ ПРИСОЕДИНЁННЫХ РЕШЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ

М. Алмохамед[1,2,a], **И. В. Тихонов**[1,3,b]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия*
[3] *Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия*
[a] *mssrmtz@gmail.com*, [b] *ivtikh@mail.ru*

Подробно излагается один фрагмент из теории обратных задач для абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка. Рассматривается спектральная задача с параметрами, связанная с линейной обратной задачей. Показано, что нужный нам спектр выражается через нули элементарной целой функции. При определённых сочетаниях параметров нули имеют кратность два, и тогда в исходной обратной задаче возможно появление присоединённых элементарных решений. В работе даны явные формулы для таких решений. Приводятся конкретные примеры обратных задач, где общие идеи реализуются на практике.

Ключевые слова: *абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка, обратная задача, спектральная задача, кратные нули характеристической функции, присоединённые решения обратной задачи.*

Введение

В теории неклассических задач для эволюционных дифференциальных уравнений есть много результатов общего плана, выражающих единственность решения изучаемой задачи в терминах распределения нулей соответствующей характеристической целой функции (см. [1–5]). С этими нулями связаны так называемые *элементарные решения* линейной однородной задачи, дающие для неё простые примеры неединственности. Иногда нули могут оказаться кратными, и тогда в задаче помимо элементарных решений возникают дополнительные *присоединённые решения*, представляющие самостоятельный интерес на практике. Отмеченный эффект коротко обсуждался в недавней заметке [6] (см. также [7]) в случае модельной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка. Сейчас мы представим развёрнутое изложение материала, снабдив его конкретными примерами. При построении примеров используем одну идею В. А. Ильина, связанную с несамосопряжёнными дифференциальными операторами.

Смысловой акцент в статье сделан на вопросах спектральной теории. За общими сведениями по теории обратных задач мы отсылаем к монографиям [8; 9]. Настоящая работа написана в дополнение к нашему большому исследованию [10]. Основываясь на [10], напомним необходимые сведения.

Работа подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

1. Специальная спектральная задача

При изучении обратных задач для абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка (см. [1; 5; 9–11]) полезна скалярная задача

$$y''_{tt}(t,\lambda) = \lambda y(t,\lambda) + 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1}$$

$$y(0,\lambda) = 0, \qquad y'_t(0,\lambda) = 0, \tag{2}$$

$$\alpha y(1,\lambda) + \beta y'_t(1,\lambda) = 0 \tag{3}$$

с фиксированными значениями $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| > 0$. Здесь λ — спектральный параметр. Требуется найти все значения $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых задача (1)–(3) имеет хоть какое-то решение $y \in C^2[0,1]$.

Из соотношений (1), (2) видно, что такое решение (при фиксированном λ) может быть только одно, причём $y \in C^\infty[0,1]$. Точнее, решение задачи Коши (1), (2) существует, единственно и имеет вид

$$y(t,\lambda) = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}\, t) - 1}{\lambda} \qquad \left[\, y(t,0) = t^2/2 \,\right]. \tag{4}$$

При этом

$$y'_t(t,\lambda) = \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}\, t)}{\sqrt{\lambda}} \qquad [\, y'_t(t,0) = t \,]. \tag{5}$$

Указанные функции являются целыми как по переменной $t \in \mathbb{R}$, так и по параметру $\lambda \in \mathbb{C}$. Это очевидно из разложений

$$\frac{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}\, t) - 1}{\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \frac{t^{2j+2}}{(2j+2)!}, \qquad \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}\, t)}{\sqrt{\lambda}} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}.$$

Для функции (4) соотношения (1), (2) выполнены тождественно по $\lambda \in \mathbb{C}$. При подстановке выражений (4), (5) в условие (3) получим уравнение

$$\alpha \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} + \beta \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = 0 \tag{6}$$

относительно неизвестной переменной λ. Таким образом, спектральные значения задачи (1)–(3) являются корнями трансцендентного уравнения (6), или, что эквивалентно, нулями *характеристической функции*

$$L(\lambda) = L(\lambda; \alpha, \beta) \equiv \alpha \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} + \beta \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Поскольку $L(\lambda)$ есть целая функция нецелого порядка $\rho = 1/2$, то множество нулей

$$\Lambda = \Lambda(\alpha, \beta) \equiv \{\, \lambda \in \mathbb{C} \colon \ L(\lambda) = 0 \,\} \tag{8}$$

должно быть бесконечным (см. [12, с. 261] или [13, с. 38–41]).

Используя формулы $\operatorname{ch} a - 1 = 2\operatorname{sh}^2(a/2)$ и $\operatorname{sh} a = 2\operatorname{sh}(a/2)\operatorname{ch}(a/2)$, характеристическую функцию (7) можно записать в виде

$$L(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \beta \operatorname{ch}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} \right) = G_1(\lambda)\, G_2(\lambda), \tag{9}$$

что существенно облегчает изучение множества (8). Ясно, что получаемый результат будет зависеть от выбора параметров α, β. Последние влияют, впрочем, лишь на второй сомножитель $G_2(\lambda) = G_2(\lambda; \alpha, \beta)$. Укажем основные возможности.

1. При любом выборе значений $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|+|\beta| > 0$, в множество (8) попадает универсальная серия нулей

$$\lambda_k^{(1)} = -4k^2\pi^2, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

отвечающая первому сомножителю $G_1(\lambda) \equiv (2/\sqrt{\lambda}\,)\,\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}/2)$ из формулы (9).

2. Случай $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ является особым. Здесь формула (10) даёт все нули функции (7), и каждый из нулей имеет кратность два. Это основной пример с кратными нулями.

3. При $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ нули функции (7) выражаются в виде

$$\lambda_m = -m^2\pi^2, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

причём все нули являются простыми. Формула (11) при $m = 2k$ даёт универсальную серию (10), а также содержит дополнительную серию $\lambda_k^{(2)} = -(2k-1)^2\pi^2$, отвечающую $m = 2k-1$ с нумерацией $k \in \mathbb{N}$. Наличие подобной «дополнительной серии» нулей типично и для следующего случая «общего положения».

4. При всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ характеристическая функция (7) помимо универсальной серии (10) имеет вторую бесконечную серию нулей

$$\lambda_k^{(2)} = \lambda_k^{(2)}(\alpha, \beta), \qquad k \in J = J(\alpha, \beta) \subset \mathbb{Z}, \tag{12}$$

зависящую от параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Серию (12) образуют нули элементарной целой функции

$$G_2(\lambda) = G_2(\lambda; \alpha, \beta) \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \beta\,\mathrm{ch}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\,, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

отвечающей второму сомножителю в разложении (9). Выбор подходящей нумерации $k \in J = J(\alpha, \beta) \subset \mathbb{Z}$ нулей $\lambda_k^{(2)} = \lambda_k^{(2)}(\alpha, \beta)$ делается отдельно, по ситуации.

5. При всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ множества (10) и (12) не пересекаются и нули $\lambda_k^{(1)}$ из серии (10) являются простыми. Также и нули $\lambda_k^{(2)}$ из серии (12) являются простыми кроме, возможно, одного двукратного нуля, возникающего при специальном выборе параметров функции (7). Исследование показывает (см. также [10]), что если коэффициенты $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ связаны условием

$$\alpha + (\mathrm{ch}\, z_0 + 1)\,\beta = 0 \tag{13}$$

с некоторым комплексным корнем $z_0 \neq 0$ уравнения $\mathrm{sh}\, z = z$, то характеристическая функция (7), помимо бесконечного числа простых нулей, имеет ровно один нуль $\lambda = z_0^2$ кратности два. Этот нуль входит во вторую серию (12). Других возможностей для кратных нулей нет. По поводу уравнения $\mathrm{sh}\, z = z$ см. [7; 10] (см. также [14] про полностью аналогичное уравнение $\sin z = z$).

6. Отдельно обсудим вещественный случай, когда $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Здесь все нули функции (7) являются вещественными и простыми. Они состоят из двух счётных серий (10) и (12), упорядоченно уходящих по $\mathbb{R}$ к $(-\infty)$. Справедливо свойство перемежаемости: между двумя соседними нулями из серии (12) расположен ровно один нуль из серии (10). Как следствие отсюда заключаем, что при любых значениях $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ в множестве (8) может быть не больше одного неотрицательного нуля. Последний действительно существует, но только если $-1 \leqslant 2\beta/\alpha < 0$.

Перечисленные утверждения 1–6 дают базовое представление о распределении нулей характеристической функции (7), а следовательно, и о распределении спектральных значений задачи (1)–(3). Дополнительную информацию по теме см. в работе [10].

Заметим, что для кратных нулей обнаружены лишь две возможности: основная — при $\beta = 0$, указанная в пункте 2, и другая, более специальная — связанная с условием (13) из пункта 5. При этом кратные нули всегда имеют кратность два и не совпадают с точкой $\lambda = 0$ на плоскости $\mathbb{C}$.

Перейдём к рассмотрению обратных задач. Так как нас интересует единственность решения, ограничимся однородной версией изучаемой линейной задачи, взяв её в простом модельном случае — на отрезке $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

2. Обратная задача

Пусть E — комплексное банахово пространство и A — линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A) \subset E$ (не обязательно плотной в E). Поставим обратную задачу

$$u''(t) = Au(t) + g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{14}$$

$$u(0) = 0, \qquad u'(0) = 0, \tag{15}$$

$$\alpha u(1) + \beta u'(1) = 0 \tag{16}$$

с однородными условиями (15), (16). Фиксированные значения α, β — такие же, как в условии (3). Неизвестными считаются функция $u\colon [0,1] \to E$ и элемент $g \in E$. Различные варианты подобных задач рассматривались в [1; 5; 9–11]. Особо отметим здесь работу [10], содержащую все обоснования и мотивировки.

Пару $(u(t), g)$ назовём *решением* поставленной обратной задачи, если

$$u \in C^2([0,1],\, E), \qquad u(t) \in D(A) \ \text{ при } \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad g \in E,$$

и все соотношения (14)–(16) выполнены. Обсудим вопрос единственности решения.

Как обычно, *тривиальным решением* задачи (14)–(16) считаем пару

$$u(t) \equiv 0, \qquad g = 0. \tag{17}$$

Такое решение всегда существует. Другие решения, отличные от (17) (если они есть), называем тогда *нетривиальными.* Покажем, как могут возникать нетривиальные решения.

Свяжем с задачей (14)–(16) её скалярную модель — спектральную задачу (1)–(3) и характеристическую функцию (7) вместе с множеством нулей (8). Выделенный нуль из множества (8) будем обозначать через a.

Допустим, что нуль $\lambda = a \in \mathbb{C}$, принадлежащий (8), есть собственное значение оператора A, т. е. $Af = af$ с собственным вектором $f \in D(A)$, $f \neq 0$. Тогда пара

$$u(t) \;=\; y(t,a)f \;=\; \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{a}\,t) - 1}{a}\, f, \qquad g = f \tag{18}$$

служит нетривиальным решением задачи (14)–(16). Для проверки напомним, что функция $y(t,\lambda)$ вида (4) при $\lambda = a$ удовлетворяет всем соотношениям (1)–(3), так как $\lambda = a$ — один из нулей характеристической функции (7).

Нетривиальные решения вида (18) назовём *элементарными решениями* обратной задачи (14)–(16). Приведённые рассуждения дают следующий результат.

Теорема 1. *Пусть некоторый нуль $\lambda = a$ характеристической функции* (7) *есть собственное значение оператора A с собственным вектором $f \in D(A)$, $f \neq 0$. Тогда однородная обратная задача* (14)–(16) *имеет нетривиальное элементарное решение вида* (18). *Точнее, подобных решений будет бесконечно много, так как собственный вектор f можно умножать на любую ненулевую константу.*

Итак, для единственности решения в обратной задаче (14)–(16) *необходимо*, чтобы ни один нуль характеристической функции (7) не совпадал с собственным значением оператора A. Оказывается, такое условие не только *необходимо*, но и *достаточно* — оно даёт критерий единственности решения в обратной задаче. Это установлено раздельно в зависимости от выбора коэффициентов в формуле (16).

Сначала, при $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ (*финальное переопределение первого рода*) критерий был доказан в работе [1]. Затем, при $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ (*финальное переопределение второго рода*) критерий был доказан в работе [11]. И, наконец, наиболее сложному случаю $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ (*финальное переопределение третьего рода*) посвящена наша работа [10]. Собирая вместе результаты этих работ, получаем следующее итоговое утверждение, действующее при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| > 0$.

Теорема 2. *Пусть A — линейный замкнутый оператор в комплексном банаховом пространстве E. Для того чтобы обратная задача* (14)–(16) *имела только тривиальное решение* (17), *необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции* (7) *не являлся собственным значением оператора A.*

Основную теорему 2 оставим сейчас в стороне. Займёмся более простой теоремой 1. Посмотрим, какие дополнения к ней можно сделать в случае, когда характеристическая функция (7) имеет кратные нули.

3. Присоединённые решения обратной задачи

По-прежнему рассматриваем обратную задачу (14)–(16). Предположим, что некоторый нуль $\lambda = a$ характеристической функции (7) является собственным значением оператора A с собственным вектором $f \in D(A)$, $f \neq 0$. Тогда, по теореме 1, задача (14)–(16) имеет нетривиальное элементарное решение вида (18). При этом, как видели в разделе 1, нельзя исключать, что $\lambda = a$ есть кратный нуль характеристической функции (7). Покажем, что в таком случае помимо *элементарных решений* обратной задачи могут возникать дополнительные *присоединённые решения*, представляющие самостоятельный интерес.

Заметим, что функции $y(t,\lambda)$ и $L(\lambda)$ из формул (4) и (7) связаны соотношением

$$\alpha\, y(1,\lambda) + \beta\, y'_t(1,\lambda) = L(\lambda), \tag{19}$$

действующим при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Затем, исходя из формулы (4), введём функцию

$$s(t,\lambda) \equiv \frac{dy(t,\lambda)}{d\lambda} = \frac{\sqrt{\lambda}\, t\, \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}\, t) \,-\, 2\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}\, t) + 2}{2\lambda^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j\, \frac{(j+1)\, t^{2j+4}}{(2j+4)!}\,. \tag{20}$$

Дифференцируя по λ равенства (1), (2) и (19), заключаем при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, что

$$s''_{tt}(t,\lambda) = \lambda\, s(t,\lambda) + y(t,\lambda), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{21}$$

$$s(0,\lambda) = 0, \qquad s'_t(0,\lambda) = 0, \tag{22}$$

$$\alpha\, s(1,\lambda) + \beta\, s'_t(1,\lambda) = L'(\lambda). \tag{23}$$

Допустим, что параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| > 0$, выбраны так, что характеристическая функция $L(\lambda)$ имеет нуль $\lambda = a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ кратности два, т. е.

$$L(a) \,=\, L'(a) \,=\, 0. \tag{24}$$

Предположим, что тот же нуль $\lambda = a$ оказался кратным собственным значением оператора A с собственным вектором $f \in D(A)$, $f \neq 0$, и присоединённым к нему вектором $f^{+} \in D(A^2)$, $f^{+} \neq 0$.

Согласно общему определению [15, с. 117] это означает, что

$$Af = af, \qquad Af^+ = af^+ + f. \tag{25}$$

Но тогда, с учётом имеющихся соотношений (1), (2), (19) и (21)–(25), элементарно проверяется, что пара

$$u(t) = y(t,a)\,f^+ + s(t,a)\,f, \qquad g = f^+ \tag{26}$$

является решением обратной задачи (14)–(16). В силу понятной аналогии такие решения будем называть *присоединёнными решениями* обратной задачи.

Используя явные представления для функций $y(t,\lambda)$ и $s(t,\lambda)$ (см. (4) и (20)), пару (26) можно записать в виде

$$u(t) \;=\; \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{a}\,t) - 1}{a}\,f^+ \;+\; \frac{\sqrt{a}\,t\,\operatorname{sh}(\sqrt{a}\,t) \;-\; 2\operatorname{ch}(\sqrt{a}\,t) + 2}{2a^2}\,f, \qquad g = f^+. \tag{27}$$

Итак, установлен следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $\lambda = a \in \mathbb{C}$ *есть нуль кратности два для характеристической функции* (7) *и, одновременно, кратное собственное значение оператора* A *в смысле определения* (25) *с собственным вектором* $f \in D(A)$, $f \neq 0$, *и присоединённым вектором* $f^+ \in D(A^2)$, $f^+ \neq 0$. *Тогда обратная задача* (14)–(16) *помимо элементарного решения* (18) *имеет присоединённое решение* (27).

Подчеркнём, что присоединённые решения обратной задачи формально не связаны с её элементарными решениями — и те, и те независимо друг от друга удовлетворяют одним и тем же соотношениям (14)–(16). Запись (27) можно привести к следующему эквивалентному виду:

$$u(t) \;=\; \frac{1}{a^2}\,\bigl(\operatorname{ch}(\sqrt{a}\,t) - 1\bigr)\bigl(af^+ - f\bigr) \;+\; \frac{1}{2a\sqrt{a}}\,t\,\operatorname{sh}(\sqrt{a}\,t)\,f, \qquad g = f^+, \tag{28}$$

где

$$Af = af, \qquad A(af^+ - f) = a^2 f^+ \tag{29}$$

в согласии с определением (25). Дальнейшие уточнения для (28) и (29) зависят от того, с каким из двух возможных случаев связано появление кратного нуля в формуле (24). Разберём варианты в виде отдельных примеров.

Пример 1. Пусть $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, как для финального переопределения первого рода. Тогда задача (14)–(16) приводится к виду

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Здесь, согласно пункту 2 из раздела 1, все нули характеристической функции (7) выражаются формулой (10) и каждый из нулей имеет кратность два.

Зафиксируем один такой нуль $\lambda_k^{(1)} = -4k^2\pi^2$ с конкретным $k \in \mathbb{N}$, обозначив его, как принято, через a. Предположим, что $a = -4k^2\pi^2$ есть кратное собственное значение оператора A в смысле (25) с собственным вектором $f = f_k \neq 0$ и присоединённым вектором $f^+ = f_k^+ \neq 0$. Тогда, по теореме 1, обратная задача (30) имеет нетривиальное элементарное решение вида (18), а по теореме 3 — присоединённое решение вида (27) или, что эквивалентно, вида (28). Дадим явные выражения для этих решений.

Для значения $a = -4k^2\pi^2$ элементарное решение (18) принимает вид

$$u(t) = \frac{1}{4k^2\pi^2}\,(1 - \cos(2k\pi t))\, f_k\,, \qquad g = f_k\,, \tag{31}$$

а присоединённое решение (28) — соответственно вид

$$u(t) = \frac{1}{16k^4\pi^4}\,(1-\cos(2k\pi t))\,(4k^2\pi^2\, f_k^+ + f_k) - \frac{1}{16k^3\pi^3}\; t\,\sin(2k\pi t)\, f_k\,, \qquad g = f_k^+. \tag{32}$$

Для таких пар проверка соотношений из системы (30) производится прямой подстановкой. При этом используется лишь то, что $k \in \mathbb{N}$, а также то, что

$$Af_k = -4k^2\pi^2\, f_k, \qquad A(4k^2\pi^2\, f_k^+ + f_k) = -16k^4\pi^4\, f_k^+ \tag{33}$$

в согласии с формулой (29), взятой при $a = -4k^2\pi^2$.

Пример 2. Пусть значения $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ связаны условием (13) с некоторым корнем $z_0 \neq 0$ уравнения $\operatorname{sh} z = z$. Тогда задача (14)–(16) приводится к виду

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad (\operatorname{ch} z_0 + 1)u(1) - u'(1) = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Здесь, согласно пункту 5 из раздела 1, характеристическая функция (7) имеет нуль $\lambda = z_0^2$ кратности два. Сохраняя прежний стиль, обозначим $a = z_0^2$.

Рассуждаем по схеме. Допустим, что $a = z_0^2$ есть кратное собственное значение оператора A в смысле (25) с собственным вектором $f = f_0 \neq 0$ и присоединённым вектором $f^+ = f_0^+ \neq 0$. Воспользуемся теоремами 1 и 3. Для $a = z_0^2$ элементарное решение (18) принимает вид

$$u(t) = \frac{1}{z_0^2}\,\big(\operatorname{ch}(z_0 t) - 1\big) f_0\,, \qquad g = f_0, \tag{35}$$

а присоединённое решение (28) — соответственно вид

$$u(t) = \frac{1}{z_0^4}\,\big(\operatorname{ch}(z_0 t) - 1\big)\,(z_0^2\, f_0^+ - f_0) + \frac{1}{2z_0^3}\; t\,\operatorname{sh}(z_0 t)\, f_0\,, \qquad g = f_0^+. \tag{36}$$

При этом

$$Af_0 = z_0^2\, f_0, \qquad A(z_0^2 f_0^+ - f_0) = z_0^4\, f_0^+ \tag{37}$$

согласно формуле (29), взятой при $a = z_0^2$.

Подстановка в систему (34) подтверждает правильность наших ответов: при проверке дифференциального уравнения используются соотношения (37), а при проверке последнего условия $(\operatorname{ch} z_0 + 1)u(1) - u'(1) = 0$ — формула $\operatorname{ch}^2 z - 1 = \operatorname{sh}^2 z$ и связь $\operatorname{sh} z_0 / z_0 = 1$, действующая в силу выбора значения $z_0 \neq 0$. Всё прочее дают прямые вычисления.

Осталось понять, насколько эти идеи воплотимы на практике. Другими словами, требуются конкретные примеры операторов A с кратными собственными значениями в подходящих точках комплексной плоскости. При этом, поскольку для присоединённых решений обратных задач нужны присоединённые векторы оператора, сразу исключим из рассмотрения все самосопряжённые варианты для A, где присоединённые векторы, как известно, отсутствуют.

4. Несамосопряжённые задачи с кратными спектрами

Простую и естественную идею для получения нужной нам конструкции предложил по другому поводу В. А. Ильин. Как отмечено в его статьях [16; 17], следующий пример полезен для общей теории линейных несамосопряжённых операторов и связан с модельными задачами из физики плазмы. Подробный разбор деталей, связанных с обсуждаемым случаем, см. в работе [18].

Пример 3. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} f''(x) = \mu\, f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = f'(1), \end{cases} \tag{38}$$

со спектральным параметром $\mu \in \mathbb{C}$. Обратим внимание, что второе краевое условие является здесь нелокальным.

Задаче (38) соответствует оператор $A = d^2/dx^2$ в пространстве $L_2(0,1)$ на области определения $D(A) = \{\, f \in H^2(0,1)\colon\ f(0) = 0,\ \ f'(0) = f'(1)\}$. Данный оператор имеет кратные собственные значения

$$\mu_k = -4k^2\pi^2, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{39}$$

с соответствующими собственными и присоединёнными функциями

$$f_k(x) = \sin(2k\pi x), \qquad f_k^+(x) = -\frac{1}{4k\pi}\, x\cos(2k\pi x), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{40}$$

Помимо чисел (39) в спектр оператора A входит также простое собственное значение $\mu_0 = 0$ с собственной функцией $f_0(x) = x$, но оно нам не понадобится.

Все функции (40) удовлетворяют на $[0,1]$ нужным краевым условиям и соотношениям

$$A\, f_k(x) = -4k^2\pi^2\, f_k(x), \qquad A\, f_k^+(x) = -4k^2\pi^2\, f_k^+(x) + f_k(x). \tag{41}$$

Очевидная эквивалентность (41) и (33) показывает, что предложенный оператор, хорошо сочетаясь с обратной задачей (30), позволяет получить для неё конкретный пример с бесконечной серией элементарных и присоединённых решений.

Окончательные формулы приведём в заключительном разделе 5, а пока разовьём идею и построим пример более сложного оператора A, приспособленного, в том числе, для специальной обратной задачи (34).

Пример 4. Рассмотрим задачу с трёхточечным нелокальным условием

$$\begin{cases} f''(x) = \mu\, f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ f'(0) = 0, \quad b_0 f(0) + b_1 f(1) + b_2 f(2) = 0, \end{cases} \tag{42}$$

и спектральным параметром $\mu \in \mathbb{C}$. Коэффициенты $b_0,\, b_1,\, b_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ считаем заданными.

Задаче (42) соответствует оператор $A = d^2/dx^2$ в пространстве $L_2(0,2)$ на области определения $D(A) = \{\, f \in H^2(0,2)\colon f'(0) = 0,\ b_0 f(0) + b_1 f(1) + b_2 f(2) = 0\}$. Выясним, как влияет выбор коэффициентов $b_0,\, b_1,\, b_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ на спектральные свойства оператора A. Точнее, нас интересует возможность получения кратных собственных значений в тех или иных точках комплексной плоскости.

Положим

$$v(x,\mu) \equiv \operatorname{ch}(\sqrt{\mu}\, x)\,, \qquad F(\mu) \equiv b_0 + b_1 \operatorname{ch}\sqrt{\mu} + b_2 \operatorname{ch}(2\sqrt{\mu}\,)\,. \tag{43}$$

Тогда при всех $\mu \in \mathbb{C}$ имеем соотношения

$$\begin{cases} v''_{xx}(x,\mu) = \mu v(x,\mu), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ v'_x(0,\mu) = 0\,, \quad b_0 v(0,\mu) + b_1 v(1,\mu) + b_2 v(2,\mu) = F(\mu). \end{cases} \tag{44}$$

Продифференцируем (43) и (44) по переменной μ. Получим функции

$$w(x,\mu) \equiv \frac{dv(x,\mu)}{d\mu} = x\,\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\mu}\,x)}{2\sqrt{\mu}}, \qquad F'(\mu) = b_1\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\mu}} + b_2\,\frac{\operatorname{sh}(2\sqrt{\mu}\,)}{\sqrt{\mu}} \tag{45}$$

и систему

$$\begin{cases} w''_{xx}(x,\mu) = \mu w(x,\mu) + v(x,\mu), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ w'_x(0,\mu) = 0\,, \quad b_0 w(0,\mu) + b_1 w(1,\mu) + b_2 w(2,\mu) = F'(\mu), \end{cases} \tag{46}$$

также верную при всех $\mu \in \mathbb{C}$. Допустим, что $\mu = \mu_0 \in \mathbb{C}$ есть кратный нуль целой функции $F(\mu)$. Соответственно,

$$F(\mu_0) = F'(\mu_0) = 0 \tag{47}$$

(возможно, что кратность данного нуля больше, чем два, но это сейчас для нас не важно). Рассматривая системы (44), (46) вместе с условием (47), заключаем, что пара $f_0(x) \equiv v(x,\mu_0)$ и $f_0^+(x) \equiv w(x,\mu_0)$ даёт собственную и присоединённую функции оператора A с кратным собственным значением $\mu = \mu_0$. Взяв явные выражения из формул (43) и (45), запишем подробно

$$f_0(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{\mu_0}\,x)\,, \qquad f_0^+(x) = x\,\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\mu_0}\,x)}{2\sqrt{\mu_0}}. \tag{48}$$

При этом $Af_0(x) = \mu_0 f_0(x)$ и $Af_0^+(x) = \mu_0 f_0^+(x) + f_0(x)$.

Осталось проанализировать условие (47) и понять, когда оно будет выполняться. Начнём с более простого уравнения $F'(\mu_0) = 0$ для функции

$$F'(\mu) = b_1\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\mu}} + b_2\,\frac{\operatorname{sh}(2\sqrt{\mu}\,)}{\sqrt{\mu}} = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}\,\left(\frac{b_1}{2} + 2b_2 \operatorname{ch}\sqrt{\mu}\right). \tag{49}$$

Первый сомножитель $S(\mu) \equiv \operatorname{sh}\sqrt{\mu}\,/\sqrt{\mu}$ имеет нули

$$\mu = \mu(n) \equiv -n^2\pi^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{50}$$

Подставим числа (50) в функцию $F(\mu)$ из формулы (43). Выделим здесь два случая.

1. Пусть $n = 2k$ и $\mu_k \equiv \mu(2k) = -4k^2\pi^2$ при $k \in \mathbb{N}$. Условие $F(\mu_k) = 0$ эквивалентно тому, что

$$b_0 + b_1 + b_2 = 0. \tag{51}$$

При выполнении (51) все нули $\mu_k = -4k^2\pi^2$ являются кратными для $F(\mu)$ и дают кратные собственные значения оператора A с собственными и присоединёнными функциями

$$f_k(x) = \cos(2k\pi x), \qquad f_k^+(x) = \frac{1}{4k\pi}\,x\sin(2k\pi x), \tag{52}$$

полученными по принципу (48) при замене там μ_0 на $\mu_k = -4k^2\pi^2$.

2. Пусть теперь $n = 2k-1$ и $\mu_k \equiv \mu(2k-1) = -(2k-1)^2\pi^2$ при $k \in \mathbb{N}$. Тогда условие $F(\mu_k) = 0$ эквивалентно тому, что

$$b_0 - b_1 + b_2 = 0. \tag{53}$$

В случае (53) все нули $\mu_k = -(2k-1)^2\pi^2$ являются кратными для $F(\mu)$ и дают кратные собственные значения оператора A с собственными и присоединёнными функциями

$$f_k(x) = \cos((2k-1)\pi x), \quad f_k^+(x) = \frac{1}{2(2k-1)\pi}\, x \sin((2k-1)\pi x), \tag{54}$$

полученными по принципу (48) при замене там μ_0 на $\mu_k = -(2k-1)^2\pi^2$.

Условия (51) и (53) охватывают целые классы спектральных задач вида (42), у которых заведомо будут кратные собственные значения. Но числа из серии (50), вещественные и отрицательные, не подходят под цели, связанные со специальной обратной задачей (34). Действительно, для (34) нужен оператор A, имеющий кратное собственное значение $a = z_0^2$ с корнем $z_0 \neq 0$ уравнения $\operatorname{sh} z = z$. Нетрудно понять, что такие корни не попадают на оси $\Re$ и Im. Поэтому значение $a = z_0^2$ не может быть вещественным.

Итак, зафиксируем комплексный корень $z_0 \neq 0$ уравнения $\operatorname{sh} z = z$. Оценим возможность выполнения условия (47) со значением $\mu_0 = z_0^2$. Подставим это число вместо μ в выражения для $F(\mu)$ и $F'(\mu)$ из формул (43) и (49). Получим систему уравнений для коэффициентов $b_0,\, b_1,\, b_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, записанную в виде

$$b_0 + b_1 \operatorname{ch} z_0 + b_2 \operatorname{ch}(2z_0) = 0, \qquad \frac{b_1}{2} + 2b_2 \operatorname{ch} z_0 = 0. \tag{55}$$

Второе уравнение даёт $b_1 = -4b_2 \operatorname{ch} z_0$, после чего из первого имеем

$$b_0 = -b_1 \operatorname{ch} z_0 - b_2 \operatorname{ch}(2z_0) = 4b_2 \operatorname{ch}^2 z_0 - b_2(2\operatorname{ch}^2 z_0 - 1) = b_2(2\operatorname{ch}^2 z_0 + 1).$$

Здесь $\operatorname{ch}^2 z_0 = \operatorname{sh}^2 z_0 + 1 = z_0^2 + 1$. То есть система уравнений (55) с учётом специфики значения z_0 эквивалентна соотношениям $b_0 = b_2(2z_0^2 + 3)$ и $b_1 = -4b_2 \operatorname{ch} z_0$. Полагая $b_2 = 1$, находим типичную тройку

$$b_0 = 2z_0^2 + 3, \quad b_1 = -4\operatorname{ch} z_0, \quad b_2 = 1, \tag{56}$$

обращающую оба уравнения (55) в верные тождества. Выбор значений (56) обеспечивает выполнение условия (47) при $\mu_0 = z_0^2$. Тем самым спектральная задача

$$\begin{cases} f''(x) = \mu f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ f'(0) = 0, \quad (2z_0^2 + 3) f(0) - 4\operatorname{ch} z_0 \cdot f(1) + f(2) = 0, \end{cases} \tag{57}$$

порождает оператор $A = d^2/dx^2$, имеющий кратное собственное значение $\mu_0 = z_0^2$ с собственной и присоединённой функциями

$$f_0(x) = \operatorname{ch}(z_0 x), \qquad f_0^+(x) = \frac{1}{2z_0}\, x \operatorname{sh}(z_0 x) \tag{58}$$

согласно формуле (48). Проверка всех нужных соотношений для пары (58) производится в том числе непосредственно. Речь идёт о попадании этих функций в $D(A)$ вместе с условиями $Af_0(x) = z_0^2 f_0(x)$ и $Af_0^+(x) = z_0^2 f_0^+(x) + f_0(x)$. При дальнейшем использовании в обратных задачах кратному собственному значению $\mu_0 = z_0^2$ можно вернуть стандартное обозначение $a = z_0^2$.

Но прежде чем вновь обсуждать обратные задачи, зафиксируем итоговый результат относительно спектральной задачи (42).

Теорема 4. 1. *Пусть коэффициенты* b_0, b_1, $b_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *в нелокальном условии из спектральной задачи* (42) *выбраны так, что* $b_0 + b_1 + b_2 = 0$. *Тогда спектр задачи* (42) *содержит кратные собственные значения* $\mu_k = -4k^2\pi^2$ *с собственными и присоединёнными функциями вида* (52) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

2. *Пусть коэффициенты* b_0, b_1, $b_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *в нелокальном условии из спектральной задачи* (42) *выбраны так, что* $b_0 - b_1 + b_2 = 0$. *Тогда спектр задачи* (42) *содержит кратные собственные значения* $\mu_k = -(2k-1)^2\pi^2$ *с собственными и присоединёнными функциями вида* (54) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

3. *Пусть коэффициенты* b_0, b_1, $b_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *в нелокальном условии из спектральной задачи* (42) *выбраны согласно* (56) *с некоторым комплексным корнем* $z_0 \neq 0$ *уравнения* $\operatorname{sh} z = z$. *Тогда спектр задачи* (42) *или, что эквивалентно, задачи* (57) *содержит кратное собственное значение* $\mu_0 = z_0^2$ *с собственной и присоединённой функциями вида* (58).

Полное обоснование теоремы 4 дают приведённые выше рассуждения.

5. Конкретные примеры обратных задач

Вернёмся к изучаемой обратной задаче (14)–(16), точнее, к её специальным версиям (30) и (34). На основе проведённых выше рассуждений укажем серию примеров для уравнения колебаний струны с неизвестной правой частью $g(x)$ так, чтобы в соответствующих обратных задачах были элементарные и присоединённые решения. В качестве оператора A выступает вторая производная d^2/dx^2, дополненная подходящими краевыми и нелокальными условиями по переменной x. Ввиду простоты ситуации и «конечномерности» получаемых функциональных выражений выбор основного банахова пространства E представляется сейчас не принципиальным. Все наши ответы удовлетворяют поставленным задачам в классическом смысле и допускают прямую проверку подстановкой в заданные формулы.

Пример 5. Рассмотрим систему соотношений

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0 \end{cases} \tag{59}$$

с неизвестными функциями $u(x,t)$ и $g(x)$. Это аналог обратной задачи (30) с оператором $A = d^2/dx^2$, отвечающим спектральной задаче (38). Для такого случая (см. пример 1) характеристическая функция обратной задачи имеет нули вида (10), и кратности нулей равны двум. Но точно те же числа указаны в формуле (39) как кратные собственные значения оператора A (см. пример 3). Совмещая общие шаблоны (31) и (32) с конкретными выражениями (40), получаем элементарные и присоединённые решения для обратной задачи (59).

Точнее, элементарные решения имеют вид

$$u(x,t) = \frac{1}{4k^2\pi^2}\,(1 - \cos(2k\pi t))\,\sin(2k\pi x), \qquad g(x) = \sin(2k\pi x), \tag{60}$$

а присоединённые решения — соответственно вид

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \frac{1}{16k^4\pi^4}\,(1-\cos(2k\pi t))(-k\pi x\cos(2k\pi x)+\sin(2k\pi x)) -& \\
-\frac{1}{16k^3\pi^3}\,t\sin(2k\pi t)\,\sin(2k\pi x), \qquad g(x) = -\frac{1}{4k\pi}\,x\cos(2k\pi x).&
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Формулы (60), (61) применимы при всех $k \in \mathbb{N}$.

Как видим, обратная задача (59) оказывается сильно некорректной — она обладает счётным множеством нетривиальных решений вида (60) и (61). Очевидно, что конечные линейные комбинации найденных пар снова дают решения обратной задачи. Возникает естественный вопрос: хватит ли запаса подобных линейных комбинаций, чтобы аппроксимировать (в том или ином смысле) произвольную пару $(u(x,t),\, g(x))$, удовлетворяющую всем соотношениям в (59)?

Эту задачу *спектрального синтеза* проще изучать на основе абстрактной постановки (30) в банаховом пространстве E. Пример же системы (59) показывает, что в случае финального переопределения первого рода, осуществляя спектральный синтез, нельзя обойтись одними элементарными решениями и надо учитывать возможность решений присоединённых. Ограничимся пока сделанным коротким замечанием, так как намеченная тема требует отдельного исследования.

Пример 6. Рассмотрим систему соотношений

$$
\begin{cases}
u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,\\
u_x(0,t) = 0, \quad b_0\,u(0,t) + b_1\,u(1,t) + b_2\,u(2,t) = 0,\\
u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0
\end{cases}
\tag{62}
$$

с заданными значениями $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ и неизвестными, как прежде, функциями $u(x,t)$, $g(x)$. Это снова аналог обратной задачи (30), но теперь уже с оператором $A = d^2/dx^2$, отвечающим спектральной задаче (42). Предположим, что выполнено условие (51), и применим теорему 4 для случая $b_0 + b_1 + b_2 = 0$. Получим, что кратные нули вида (10) вновь окажутся кратными собственными значениями оператора A. Сочетая прежние шаблоны (31) и (32) с явными выражениями (52), устанавливаем нужные ответы для задачи (62).

Точнее, элементарные решения сейчас имеют вид

$$
u(x,t) = \frac{1}{4k^2\pi^2}\,(1-\cos(2k\pi t))\,\cos(2k\pi x), \qquad g(x) = \cos(2k\pi x),
\tag{63}
$$

а присоединённые решения — соответственно вид

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \frac{1}{16k^4\pi^4}\,(1-\cos(2k\pi t))(k\pi x\sin(2k\pi x)+\cos(2k\pi x)) -& \\
-\frac{1}{16k^3\pi^3}\,t\sin(2k\pi t)\,\cos(2k\pi x), \qquad g(x) = \frac{1}{4k\pi}\,x\sin(2k\pi x).&
\end{aligned}
\tag{64}
$$

Формулы (63), (64) применимы при всех $k \in \mathbb{N}$. Построенные решения удовлетворяют обратной задаче (62) всякий раз, когда $b_0 + b_1 + b_2 = 0$ (см. условие (51)). Фактически получаем целый класс обратных задач вида (62), имеющих не только элементарные, но и присоединённые решения. С физической точки зрения брать комплексные коэффициенты не очень естественно, поэтому можно ограничиться случаем $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Приведём теперь пример, где комплексные коэффициенты в условиях неизбежны из-за математической сути дела.

Пример 7. Зафиксируем корень $z_0 \neq 0$ уравнения $\operatorname{sh} z = z$ и рассмотрим систему

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ u_x(0,t) = 0, \quad (2z_0^2+3)\,u(0,t) - 4\operatorname{ch} z_0 \cdot u(1,t) + u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad (\operatorname{ch} z_0 + 1)u(x,1) - u_t(x,1) = 0 \end{cases} \tag{65}$$

с неизвестными функциями $u(x,t)$, $g(x)$. Это аналог обратной задачи (34) с оператором $A = d^2/dx^2$, отвечающим спектральной задаче (57). Напомним (см. пример 2), что характеристическая функция задачи (34) имеет нуль $\lambda = z_0^2$ кратности два, и это же число по теореме 4 есть кратное собственное значение для A. Тем самым, используя шаблоны (35) и (36) вместе с явными выражениями (58), получаем формулы элементарного и присоединённого решений для задачи (65).

Точнее, элементарное решение имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{z_0^2}\,(\operatorname{ch}(z_0 t) - 1)\,\operatorname{ch}(z_0 x), \qquad g(x) = \operatorname{ch}(z_0 x), \tag{66}$$

а присоединённое решение — соответственно вид

$$\begin{aligned} u(x,t) \;=\; &\frac{1}{2z_0^4}\,(\operatorname{ch}(z_0 t) - 1)\,(z_0 x\,\operatorname{sh}(z_0 x) - 2\operatorname{ch}(z_0 x)) + \\ &+\frac{1}{2z_0^3}\,t\,\operatorname{sh}(z_0 t)\operatorname{ch}(z_0 x), \qquad g(x) = \frac{1}{2z_0}\,x\operatorname{sh}(z_0 x). \end{aligned} \tag{67}$$

Для таких пар все соотношения в системе (65) будут выполнены.

Понятно, что с практической точки зрения построенный пример 7 носит искусственный характер, и выбор двух специальных условий в (65), связанных с комплексным корнем $z_0 \neq 0$ уравнения $\operatorname{sh} z = z$, трудно объяснить физическими соображениями. Но математически всё законно — построенная обратная задача (65) обладает элементарным и присоединённым решениями и соответствует общей ситуации из примера 2, показывая, что можно добиться нужного не самыми сложными средствами. Для того чтобы уйти от комплексных решений для (очевидно) вещественного уравнения колебаний струны, можно овеществить ситуацию, расписав вещественную и мнимую части в системе (65) и в получаемых решениях (66), (67). Возникнет набор выражений непрозрачной структуры, физически осмыслить который по-прежнему затруднительно. Итак, примем результат как чисто математическую конструкцию.

Отметим ещё, что пример 7 предлагает сразу счётный набор обратных задач, так как нужных корней у уравнения $\operatorname{sh} z = z$ будет бесконечно много (см. [7; 10]). Половину корней следует, конечно, отбросить. Действительно, вместе с каждым корнем $z = z_0 \neq 0$ уравнение имеет корень $z = -z_0 \neq 0$, и оба этих корня дают одну и ту же систему (65) с решениями (66), (67), не зависящими от выбора знака перед корнем. Поэтому при взятии конкретных примеров можно ограничиться лишь теми корнями уравнения $\operatorname{sh} z = z$, что попадают в полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Кроме того, вычисление значения $\operatorname{ch} z_0$, используемого в формуле (65), допускает дополнительное уточнение.

Действительно, пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — корень уравнения $\operatorname{sh} z = z$, попадающий в полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Здесь $x_0 = \operatorname{Re} z_0$, $y_0 = \operatorname{Im} z_0$, а i — мнимая единица. Используем стандартные представления

$$\operatorname{ch} z_0 = \operatorname{ch} x_0 \cos y_0 + i \operatorname{sh} x_0 \sin y_0, \qquad \operatorname{sh} z_0 = \operatorname{sh} x_0 \cos y_0 + i \operatorname{ch} x_0 \sin y_0.$$

По условию $\operatorname{sh} x_0 \cos y_0 = \operatorname{Re} \operatorname{sh} z_0 = \operatorname{Re} z_0 = x_0 > 0$. Отсюда, во-первых, следует, что $\operatorname{sh} x_0 > 0$, а затем, что $\cos y_0 > 0$. Но тогда и $\operatorname{Re} \operatorname{ch} z_0 = \operatorname{ch} x_0 \cos y_0 > 0$, т. е. значение $\zeta = \operatorname{ch} z$ на выбранном корне z_0 попадает в полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$.

Очевидно также, что $\operatorname{ch}^2 z_0 = \operatorname{sh}^2 z_0 + 1 = z_0^2 + 1$. В результате

$$\operatorname{ch} z_0 = \sqrt{z_0^2 + 1}\,, \tag{68}$$

где используется *главная ветвь корня*, переводящая плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$ в полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$. Подстановка (68) с однозначно вычисляемым значением $\operatorname{ch} z_0$ применима в предыдущих системах (34), (57) и (65), а также в исходной формуле (13), из которой следует данная часть теории.

На этом исследование присоединённых решений в обратной задаче (14)–(16) можно считать в основном завершённым.

Авторы признательны В. Б. Шерстюкову за обсуждение нашей работы.

Список литературы

1. **Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.** Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 637–644.
2. **Тихонов И. В.** Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Изв. РАН, сер. мат. 2003. Т. 67, № 2. С. 133–166.
3. **Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.** Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Мат. заметки. 2005. Т. 77, вып 2. С. 273–290.
4. **Тихонов И. В.** Обобщённая задача Уорда для абстрактных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 325–336.
5. **Тихонов И. В.** Обратные, нелокальные и краевые задачи для эволюционных уравнений : дис. ... д-ра физ.мат. наук. М., 2008.
6. **Алмохамед М., Тихонов И. В.** О некоторых спектральных исследованиях, связанных с теорией обратных задач // Соврем. проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й междунар. Саратов. зимн. шк. Саратов : Саратов. ун-т, 2022. С. 20–26.
7. **Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Алмохамед М.** О некоторых трансцендентных уравнениях, важных для математической физики // Соврем. проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й междунар. Саратов. зимн. шк. Саратов : Саратов. ун-т, 2022. С. 294–299.
8. **Денисов А. М.** Введение в теорию обратных задач. М. : Изд-во МГУ, 1994.
9. **Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.** Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New-York, Basel : Marcel Dekker, 2000.
10. **Тихонов И. В., Алмохамед М.** Обратная задача с переопределением третьего рода для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 7. С. 890–911.
11. **Алмохамед М.** Критерий единственности решения в линейной обратной задаче с финальным переопределением второго рода // Вестн. ВГУ. Сер. : Физика. Математика. 2019. № 3. С. 50–58.

12. **Титчмарш Е.** Теория функций. 2-е изд., перераб. М. : Наука, 1980.
13. **Левин Б. Я.** Распределение корней целых функций. М. : ГИТТЛ, 1956.
14. **Hardy G. H.** On the zeroes of integral function $x - \sin x = \sum_1^\infty (-)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1!}$ // The Messenger of Math. 1902. Vol. 31, no. 11. P. 161–165.
15. **Крейн С. Г. (ред.)** Функциональный анализ. 2-е изд., перераб. и доп. (серия «Справочная математическая библиотека») / Коллектив авторов, редактор С. Г. Крейн. М. : Наука, 1972.
16. **Ильин В. А.** Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединённых функций пучка М. В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 4. С. 796–799.
17. **Ильин В. А.** О существовании приведённой системы собственных и присоединённых функций у несамосопряжённого обыкновенного дифференциального оператора // Тр. МИАН СССР. 1976. Т. 142. С. 148–155.
18. **Ионкин Н. И.** Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.

Поступила в редакцию 11.08.2022.
После переработки 23.09.2022.

Сведения об авторах

Алмохамед Муатаз, стажёр кафедры математической физики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия; ассистент кафедры математического анализа, Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия; e-mail: mssrmtz@gmail.com.

Тихонов Иван Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия; профессор кафедры математического анализа, Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия; e-mail: ivtikh@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2022. Vol. 7, iss. 4. P. 395–411.

DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17401

EXAMPLES OF GENERALIZED ELEMENTARY SOLUTIONS IN LINEAR INVERSE PROBLEMS

M. Almohamed[1,2,a], **I.V. Tikhonov**[1,3,b]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[2] *Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia*
[3] *Moscow Pedagogical State University, Moscow, Russia*
[a] *mssrmtz@gmail.com,* [b] *ivtikh@mail.ru*

One fragment from the theory of inverse problems for second-order abstract differential equations is presented in detail. We consider a spectral problem which related to a linear inverse problem with parameters in the final condition. It is shown that eigenvalues of the spectral problem is expressed through zeros of an elementary entire function. For certain combinations of the parameters, some zeros can be multiples with multiplicity two. Then it is possible to appear generalized elementary solutions for the inverse problem. Explicit formulas for such solutions are given. We provide specific examples of inverse problems where general ideas are put into the practice.

Keywords: *abstract differential equation of the second order, inverse problem, spectral problem, multiple zeros of characteristic function, generalized elementary solutions of inverse problem.*

References

1. **Tikhonov I.V., Eidelman Yu.S.** An inverse problem for a differential equation in a Banach space and the distribution of zeros of an entire Mittag-Leffler function. *Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 5, pp. 669–677.
2. **Tikhonov I.V.** Uniqueness theorems for linear non-local problems for abstract differential equations. *Izvestiya Mathematics*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 333–363.
3. **Tikhonov I.V., Eidelman Yu.S.** Uniqueness criterion in an inverse problem for an abstract differential equation with nonstationary inhomogeneous term. *Mathematical Notes*, 2005, vol. 77, no. 2, pp. 246–262.
4. **Tikhonov I.V.** A generalized Ward problem for abstract differential equations. *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 3, pp. 340–351.
5. **Tikhonov I.V.** Obratnyye, nelokalnyye i krayevyye zadachi dlya evolyutsionnykh uravneniy [Inverse, nonlocal and boundary value problems for evolution equations]. Doctoral Dissertation, The Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2008. (In Russ.).
6. **Almohamed M., Tikhonov I.V.** O nekotorykh spektral'nykh issledovaniyakh, svyazannykh s teoriyey obratnykh zadach [On some spectral studies related to inverse problem theory]. *Sovremennyye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya* [Modern problems of the function theory and their applications]. Saratov, Saratov State University, 2022. Pp. 20–26. (In Russ.).
7. **Tikhonov I.V., Sherstyukov V.B., Almohamed M.** O nekotorykh transtsendentnykh uravneniyakh, vazhnykh dlya matematicheskoy fiziki [On some transcendental equations that matter for mathematical physics]. *Sovremennyye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya* [Modern problems of the function theory and their applications]. Saratov, Saratov State University, 2022. Pp. 294–299. (In Russ.).

The work was prepared with the financial support of the Ministry of Education and Science of Russia as part of the implementation of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement № 075-15-2022-284.

8. **Denisov A.M.** *Elements of the Theory of Inverse Problems.* De Gruyter, 1999.
9. **Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.** *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics.* New York, Basel, Marcel Dekker, 2000.
10. **Tikhonov I.V., Almohamed M.** Obratnaya zadacha s pereopredeleniyem tret'yego roda dlya abstraktnogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka [Inverse problem with overdetermination of the third type for a second-order abstract differential equation]. *Differentsial'nyye Uravneniya* [Differential equations], 2022, vol. 58, no. 7, pp. 890–911. (In Russ.).
11. **Almohamed M.** Kriteriy edinstvennosti resheniya v lineynoy obratnoy zadache s final'nym pereopredeleniyem vtorogo roda [Uniqueness criterion for linear inverse problem with the final over-determination of the second type]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika* [Proceeding of Voronezh State University. Ser.: Physics. Mathematics], 2019, no. 3, pp. 50–58. (In Russ.).
12. **Titchmarsh E.C.** *The Theory of Functions.* Second edition. London, Oxford University Press, 1936.
13. **Levin B.Ja.** *Distribution of Zeros of Entire Functions.* Revised edition. American Mathematical Society, 1980.
14. **Hardy G.H.** On the zeroes of integral function $x - \sin x = \sum_1^\infty (-)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1!}$. *The Messenger of Mathematics*, 1902, vol. 31, no. 11, pp. 161–165.
15. **Krein S.G. (ed.)** *Funktsionalnyy analiz. Seriya «Spravochnaya matematicheskaya biblioteka»* [Functional analysis. Series "Reference Mathematical Library"]. Second edition, revised and expanded. Moscow, Nauka Publ., 1972. (In Russ.).
16. **Il'in V.A.** Necessary and sufficient conditions for a subsystem of the eigen- and associated functions of a Keldysh bundle of ordinary differential operators to be a basis. *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 513–516.
17. **Il'in V.A.** Existence of a reduced system of eigen- and associated functions for a non-selfadjoint ordinary differential operator. *Proceedings of Steklov Institute of Mathematics*, 1979, vol. 142, pp. 157–164.
18. **Ionkin N.I.** Resheniye odnoy krayevoy zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim krayevym usloviyem [Solution of some heat conduction problem with a non-classical boundary condition]. *Differentsial'nyye Uravneniya* [Differential equation], 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304. (In Russ.).

Accepted article received 11.08.2022.
Corrections received 23.09.2022.