ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1993 МАТЕМАТИКА № 5 (372)

УДК 517.929

Д.Л.АНДРИАНОВ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Построенная в настоящее время общая теория функционально-дифференциальных уравнений [1] позволила дать ясное и лаконичное описание их основных свойств. В то же время широкие и актуальные для приложений классы систем разностных уравнений с последействием формально не охватываются построенной теорией и во многом остаются вне поля зрения специалистов, использующих разностные системы с последействием для моделирования реальных процессов.

В этой работе предлагаются разностные аналоги основных утверждений теории функционально-дифференциальных уравнений о линейных и квазилинейных краевых задачах и задачах управления. Конкретные примеры таких задач, возникающих в задачах макроэкономического моделирования, приведены в [2].

§1. Краевые задачи для линейных разностных уравнений

Объектом исследования является уравнение

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{t} A(t,i)x(i)+f(t), \quad t=\overline{0,N-1}, \tag{1.1}$$

$x(t)\in R^n$, для любого $t\in\overline{0,N-1}$.

Обозначим через $x=\{x(0),...,x(N)\}$ $N\times(N+1)$-матрицу со столбцами $x(0),x(1),...,x(N)$.

Множество таких матриц обозначим символом M^n_{N+1}.

Уравнение (1.1) может быть записано в виде

$$\mathfrak{L}x = f, \tag{1.2}$$

где $x\in M^n_{N+1}$, $f\in M^n_N$, $\mathfrak{L}$ – линейный оператор из M^n_{N+1} в M^n_N, $(\mathfrak{L}x)(t)=x(t+1)-\sum\limits_{i=0}^{t} A(t,i)\cdot x(i)$.

Задача Коши

$$\mathfrak{L}x = f, \quad x(0)=\alpha \tag{1.3}$$

при любых $f\in M^n_N$ и $\alpha\in R^n$ имеет единственное решение $x\in M^n_{n+1}$, представляемое в виде

$$x(t) = X(t)\alpha+(Cf)(t), \quad t=\overline{0,N-1}. \tag{1.4}$$

Здесь $X(\cdot)$ – фундаментальная матрица однородного уравнения $\mathfrak{L}x=0$, $C:M^n_N\to M^n_{N+1}$ – оператор Коши уравнения (1.2).

Оператор Коши записывается в виде

$$(Cf)(t) = \sum_{i=0}^{t} C(t,i)f(i), \quad t=\overline{0,N-1},$$

$$(Cf)(t) = \sum_{i=0}^{t-1} C(t-1,i)f(i)$$

Матрицы $X(t)$ и $C(t,i)$ определяются рекуррентно равенствами

$$X(t+1) = \sum_{l=0}^{t} A(t,l)X(l), \quad t=0,...,N-1, \quad X(0,0) = E;$$

$$C(t,l) = \sum_{j=l}^{t-1} A(t,j+1)C(j,l), \quad 0\leq l<t\leq N-1;$$

$$C(t,t) = E, \quad t=\overline{0,N-1}.$$

Краевой задачей для разностного уравнения (1.1) будем называть задачу

$$\mathfrak{L}x = f, \quad lx = \alpha, \tag{1.5}$$

где $f\in M_N^n$, $\alpha\in R^n$, $l:M_{N+1}^n \longrightarrow R^n$ – линейный вектор-функционал.

Любой такой функционал можно записать в виде

$$lx = B_0x(0)+...+B_Nx(N). \tag{1.6}$$

Здесь $B_0,...,B_N$ – постоянные $n\times n$-матрицы.

Применив вектор-функционал l к решению x уравнения (1.1), записанному в форме (1.4), получим

$$lx = [lX]\alpha+\sum_{l=0}^{N-1} V(l)f(l). \tag{1.7}$$

Здесь через lX обозначено значение вектор-функционала l на значениях фундаментальной матрицы:

$$lX = B_0X(0)+...+B_NX(N), \tag{1.8}$$

$$V(l) = \sum_{j=l}^{N-1} B_{j+1}C(j,l), \quad l=\overline{0,N-1}.$$

Назовем определителем Δ задачи (1.5) определитель матрицы lX.

ТЕОРЕМА 1. *Краевая задача (1.5) однозначно разрешима для любых $f\in M_N^n$ и $\alpha\in R^n$ тогда и только тогда, когда ее определитель Δ отличен от нуля.*

В случае $\Delta\neq0$ решение x задачи (1.5) имеет представление

$$x(t+1) = Z(t+1)\alpha+(Gf)(t), \quad t=\overline{0,N-1}, \tag{1.9}$$

где $Z(\cdot)$ – нормированная фундаментальная матрица задачи (1.5):

$$\mathfrak{L}Z = 0, \quad lZ = E, \tag{1.10}$$

а $G:M_N^n \longrightarrow M_{N+1}^n$ – оператор Грина задачи (1.5).

Нетрудно показать, что

$$Z(t) = X(t)[lX]^{-1}.$$

Оператор G, определенный равенством

$$(Gf)(t) = (Cf)(t)-X(t+1)[lX]^{-1}\cdot\sum_{l=0}^{N-1} V(l)f(l), \quad t=\overline{0,N-1}, \tag{1.11}$$

назовем оператором Грина задачи (1.5).

Из (1.11) следует, что оператор G допускает представление

$$(Gf)(t)=\sum_{l=0}^{t-1} G(t,l)f(l), \quad t=\overline{0,N-1}.$$

Матрицу $G(\cdot,\cdot)$ назовем матрицей Грина задачи (1.5).

Для нее справедливо представление

$$G(t,i) = \begin{cases} -X(t+1)[lX]^{-1}V(i), & \text{если } 0\leq t<i\leq N-1, \\ C(t,i)-X(t+1,[lX]^{-1}V(i), & \text{если } 0\leq i\leq t\leq N-1. \end{cases} \tag{1.12}$$

Через $\Lambda=[\mathfrak{L},l]$: $M^n_{n+1}\longrightarrow M^n_N\times R^n$ обозначим оператор, определяемый равенством

$$\Lambda x \overset{\text{def}}{=} [\mathfrak{L},l]x = \mathrm{col}\{\mathfrak{L}x,lx\}. \tag{1.13}$$

Тогда краевая задача (1.5) может быть записана в форме линейного уравнения

$$\Lambda x = g, \tag{1.14}$$

где $g\in M^n_N\times R^n$, $g=\mathrm{col}\{f,\alpha\}$.

Сопряженным уравнением для краевой задачи (1.5) назовем уравнение, сопряженное к уравнению (1.14), т.е. уравнение

$$\Lambda^* y = z. \tag{1.15}$$

Здесь оператор Λ^* определен следующим образом:

$$\Lambda^* = (M^n_{N+1}\times R^n)^*\longrightarrow(M^n_{N+1})^*.$$

Для удобства в дальнейшем не будем различать пространства R^n и $(R^n)^*$, M^n_{N+1} и $(M^n_{N+1})^*$. В этом случае оператор Λ^* действует следующим образом: $\Lambda^*:M^n_{N+1}\times R^n\longrightarrow M^n_{N+1}$, $z\in M^n_{N+1}$, $z\in M^n_{N+1}\times\times R^n$.

Через $<\lambda,y>$ обозначим значение линейного функционала $\lambda:Y\longrightarrow R$ на элементе y линейного пространства Y.

Элементы $\lambda\in M^n_{N+1}\times R^n$ определяются парой $\varphi\in M^n_N$ и $\psi\in R^n$ так, что $<\lambda,\mathrm{col}\{f,\alpha\}> = <\{\varphi,\psi\}, \mathrm{col}\{f,\alpha\}>=<\alpha,f>+<\psi,\alpha>$.

Отсюда получаем

$$<X,\Lambda x> = <\varphi, x>+<\psi,lx> = <\mathfrak{L}^*\varphi,X> + <l^*\psi,X> = <\mathfrak{L}^*\varphi+l^*\psi,X>.$$

Здесь операторы $\mathfrak{L}^*:(M^n_{N+1})^* \longrightarrow (M^n_{N+1})^*$ и $l^*:(R^n)^* \longrightarrow (M^n_{N+1})^*$ сопряжены операторам $\mathfrak{L}:M^n_{N+1}\longrightarrow M^n_N$ и $l:M^n_{N+1}\longrightarrow R^n$ соответственно.

Для удобства в дальнейшем будем писать $\mathfrak{L}^*:M^n_N\longrightarrow M^n_{N+1}$, $l^*:R^n\longrightarrow M^n_{N+1}$.

Таким образом, сопряженное уравнение для краевой задачи (1.5) имеет вид:

$$\Lambda^* y \equiv \mathfrak{L}^*\varphi+l^*\psi = z, \tag{1.16}$$

где $\alpha\in M^n_N$, $\varphi=\{\varphi(0),...,\varphi(n-1)\}$, $z\in M^n_{N+1}$, $z=\{z(0),...,z(N)\}$, $\psi\in R^n$.

Для определения оператора Λ^* запишем цепочку соотношений

$$<\varphi,\mathfrak{L}x>+<\psi,lx> = \sum_{l=1}^{N}<\varphi(l),x(l+1)-\sum_{j=0}^{l}A(l,j)x(l)>+\sum_{l=0}^{N}<\psi,Bx(l)> =$$

$$= \sum_{l=1}^{N}<\varphi(l-1,x(l)>-\sum_{j=0}^{l-1}\sum_{l=j}^{N-1}<\varphi(l),A(l,j)x(j)>+\sum_{l=1}^{N}<\psi,B_l x(l)> =$$

$$= \sum_{l=1}^{N}<\varphi(l-1),x(l)>-\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{l=j}^{N-1}<A^*(l,j)\varphi(j),x(l)>+\sum_{l=0}^{N-1}<B^*_l\psi,x(l)> =$$

$$= <B^*_0\psi-\sum_{j=0}^{N-1}A^*(j,l)\varphi(l),x(0)>+<B^*_n\psi+\varphi(N-1),X(N)>.$$

Из последней цепочки соотношений видим, что

$$(\Lambda^*\lambda)(0) = B'_0\psi-\sum_{i=0}^{N-1}A'(i,0)\varphi(i),$$

$$(\Lambda^*\lambda)(t) = B'_t\psi+\varphi(t-1)-\sum_{i=t}^{N-1}A'(i,t)\varphi(t), \quad t=1,2,...,N-1,$$

$$(\Lambda^*\lambda)(N) = B'_N\psi+\varphi(N-1).$$

Здесь и далее символ "$'$" обозначает операцию транспонирования матрицы. В задаче Коши $B_0=E$, $B_i=0$ при $i=1,2,...,N$.

Сопряженное уравнение к задаче Коши (1.3) имеет вид

$$(\Lambda^*\lambda)(0) = \psi-\sum_{i=t}^{N-1}A'(i,0)\varphi(i) \equiv z(0),$$

$$(\Lambda^*\lambda)(t)-\varphi(t-1)-\sum_{i=t}^{N-1}A'(i,t)\varphi(i) \equiv z(t), \quad t=1,2,...,N-1,$$

$$(\Lambda^*\lambda)(N) = \varphi(n-1) \equiv z(N).$$

Нетрудно показать, что полученная система при любом $z\in M^n_{N+1}$ имеет единственное решение

$$\lambda = \{\varphi,\psi\}\in M^n_N\times R^n.$$

Пусть для произвольных $\lambda \in M^n_N\times R^n$, $\lambda=\{\varphi,\psi\}$, $\varphi=\{\varphi(0),...,\varphi(N-1)\}$, $\psi=\mathrm{col}\{\psi_1,...,\psi_n\}$, $f\in M^n_N$, $\alpha\in R^n$, $f=\{f(0),...,f(N-1)$, $\alpha=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ выражение $<\lambda,\mathrm{col}\{f,\alpha\}>$ имеет вид

$$<\lambda,\mathrm{col}\{f,\alpha\}> = \{<\varphi,\psi>,\mathrm{col}\{f,\alpha\}> = <\varphi,f>+<\psi,\alpha> = <\varphi(0),f(0)>+...+$$
$$+...+<\varphi(N-1),f(N-1)> + \psi_1\alpha_1+...+\psi_n\alpha_n.$$

Здесь $<\varphi(t),f(t)>=\varphi_1(t)f_1(t)+...+\varphi_N(t)f_N(t)$, для $t=0,1,...,N-1$

$$\varphi(t) = \mathrm{col}\{\varphi_1(t),...,\varphi_N(t)\},$$
$$f(t) = \mathrm{col}\{f_1(t),...,f_N(t)\}.$$

Оператор $\Lambda:M^n_{N+1}\longrightarrow M^n_N\times R^n$ действует из $(N+1)$-мерного пространства N-мерных вектор-столбцов в $(N+1)$-мерное пространство n-мерных вектор-столбцов.

ТЕОРЕМА 2. а) *Краевая задача* (1.5) *разрешима при любой паре* $f\in M^n_N$, $f\in R^n$ *тогда и только тогда, когда однородная задача*

$$\mathfrak{L}x = 0, \quad lx = 0 \tag{1.17}$$

имеет только тривиальное решение $x=0$.

b) *Краевая задача* (1.5) *разрешима при любом* $f\in M^n_N$, $\alpha\in R^n$ *тогда и только тогда, когда сопряженное уравнение* (1.15) *разрешимо при любой правой части* $z\in M^n_{N+1}$.

c) *Краевая задача* (1.17) *и однородное уравнение*

$$\Lambda^*\lambda = 0$$

имеют одинаковое число линейно независимых решений.

d) *Если краевая задача* (1.5) *разрешима не при любых* $f\in M^n_N$ *и* $\alpha\in R^n$, *то те* f *и* α, *при которых она разрешима, образуют подпространство в* $M^n_N\times R^n$, *являющееся ортогональным дополнением к пространству всех решений уравнения* $\Lambda^*y=0$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим краевую задачу

$$(\mathfrak{L}x)(t) \equiv x(t+1)-x(t) = f(t), \quad t=\overline{0,N-1}, \tag{1.18}$$

$$lx \equiv B_0x(0)+...+B_Nx(N) = \alpha.$$

Уравнение, сопряженное для этой задачи, имеет вид

$$\begin{cases} B'_0\psi-\varphi(0) = z(0), \\ B'_t\psi+\varphi(t-1)-\varphi(t) = z(t), \quad t\in 1,2,...N-1, \\ B'_N\psi+\varphi(N-1) = z(N). \end{cases} \tag{1.19}$$

Складывая все уравнения в системе (1.19), получим равенство

$$\sum_{t=0}^{N} B'_t\psi = \sum_{t=0}^{N} z(t).$$

Отсюда очевидно, что для однозначной разрешимости задачи (1.18) и системы (1.19) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\det\left(\sum_{t=0}^{N} B_t\right) \neq 0.$$

Отметим, что этот результат следует и из теоремы 1. Однако, теорема 2 позволяет описать множество правых частей f и α, при которых задача (1.3) разрешима.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим краевую задачу

$$(\mathfrak{L}x)(t) \equiv f(t), \quad t=\overline{0,N-1}, \quad lx \equiv x(1)-x(0) = \alpha. \tag{1.20}$$

В этом случае

$$B_0 = -E, \quad B_1 = E, \quad B_t = 0 \ \text{ при } t=2,...,N;$$

$$\sum_{t=0}^{N} B_t = 0.$$

При этих условиях краевая задача (1.20) не является разрешимой при любых $f\in M_N^n$ и $\alpha\in R^n$.

Уравнение, сопряженное к (1.20) записывается следующим образом:

$$\begin{cases} -\psi+\varphi(0) = z(0), \\ \psi+\varphi(0)-\varphi(1) = z(1), \\ \varphi(f-1)-\varphi(f) = z(t), \quad t=\overline{1,N-1}; \\ \varphi(N-1) = z(N). \end{cases}$$

Общее решение однородного сопряженного уравнения имеет вид

$$\lambda = \{\varphi,\psi\} = \{(-\varphi,0,...,0),\psi\}.$$

Размерность этого линейного многообразия в пространстве $M_N^n\times R^n$ равна 1.

Запишем условие ортогональности λ и $\mathrm{col}\{f,\alpha\}$:

$$\langle\lambda,\mathrm{col}\{f,\alpha\}\rangle = \langle\{\varphi,\psi\},\mathrm{col}\{f,\alpha\}\rangle = \langle\varphi,f\rangle+\langle\psi,\alpha\rangle = \langle-\psi,f(0)\rangle+\langle\psi,\alpha\rangle =$$

$$= \langle\psi,-f(0)+\alpha\rangle = 0.$$

Так, как ψ может пробегать все пространство R^n, то получаем равенство $f(0)=\alpha$. Это означает, что при $f(0)=\alpha$ задача (1.20) разрешима (но неоднозначно).

При $f(0)=\alpha$ решение записывается в виде

$$x(1) = x(0)+\alpha,$$

$$x(t) = x_0+\alpha+\sum_{l=1}^{t-1} f(l), \quad t=2,3,...N.$$

Решение $x=\{x(0),...,x(N)\}$ задачи (1.20) при $f(0)=\alpha$ определено неоднозначно и зависит от вектора $x(0)$. Размерность нуль-пространства однородной задачи (1.20) в пространстве M^n_{N+1} равна 1. При $f(0)\neq\alpha$ задача (1.20) вообще не имеет решений.

§2. Разрешимость квазилинейных разностных краевых задач

В этом разделе рассматриваются краевые задачи для разностного уравнения, записанного в виде

$$\mathfrak{L}x = Fx, \tag{2.1}$$

где $\mathfrak{L}:M^n_{N+1}\longrightarrow M^n_N$ – линейный оператор,

$$(\mathfrak{L}x)(t) = x(t+1)-\sum_{i=0}^{t} A(t,i)x(i), \quad t=\overline{0,N-1},$$

$F:M^n_{N+1}\longrightarrow M^n_T$ – вообще говоря, нелинейный оператор.

Пусть краевая задача для уравнения (2.1) имеет вид

$$\mathfrak{L}x = Fx, \quad lx = \alpha, \tag{2.2}$$

где $l:M^n_{N+1}\longrightarrow R^n$ – линейный вектор-функционал, причем $\det[lX] \neq 0$. Как известно, в этом случае линейная краевая задача $\mathfrak{L}x=f$, $lx=\alpha$ однозначно разрешима при любых $f\in M^n_N$ и $\alpha\in R^n$. Обозначим через $G(k,i)$ матрицу Грина этой задачи и пусть $Z=X[lX]^{-1}$ – фундаментальная матрица однородного уравнения $\mathfrak{L}x=0$, удовлетворяющая условию $lZ=E$.

Тогда задача (2.2) эквивалентна уравнению

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{N-1} G(t,i)(Fx)(i)+Z(t+1)\alpha, \quad t=\overline{0,N-1} \tag{2.3}$$

в пространстве M^n_{N+1}.

Уравнение (2.3) можно короче записать так:

$$x = GFx + Z\alpha,$$

где G – оператор Грина задачи (2.2) с ядром $G(t,i)$.

Если оператор F является произведением оператора Немыцкого H, определяемого равенством

$$(Hy)(t) = f(t,y(t)), \quad t=\overline{0,N-1},$$

на некоторый линейный оператор $T:M^n_{N+1}\longrightarrow M^n_N$,

$$(Tx)(t) = \sum_{i=0}^{N} T(t,i)x(i), \quad t=\overline{0,N-1},$$

то уравнение (2.3) имеет вид

$$x = GNTx + g, \tag{2.4}$$

где $g=Z\alpha$.

Домножим на $T(t,i+1)$ каждое из равенств

$$x(t+1) = \sum_{j=0}^{m-1} G(t,j)f(j,(Tx)(j))+Z(t+1)\alpha, \quad t=\overline{0,N-1},$$

полученные выражения сложим и прибавим к обеим частям выражение $T(t,0)x(0)$. Обозначим $z(j)=(Tx)(j)$, $j=\overline{0,N}$.

Тогда вместо уравнения (2.4) будем иметь уравнение

$$z(t) = \sum_{i=0}^{N-1} T(t,i+1)\sum_{j=0}^{N-1} G(i,j)f(j,z(j))+r(t), \tag{2.5}$$

где $r(t)=\sum\limits_{i=0}^{N-1}T(t,i+1)Z(i+1)\alpha+T(t,0)x(0)$.

Заметим, что в силу однозначной разрешимости задачи (2.2) при любых $f\in M_N^n$ и $\alpha\in R^n$ и вида оператора $\mathfrak{L}$ можно записать:

$$x(0) = [lX]^{-1}(\alpha-lCHz).$$

Между множеством решений $z\in M_N^n$ уравнения (2.5) и множеством решений $x\in M_{N+1}^n$ краевой задачи (2.2) имеется взаимно однозначное соотгетствие, определяемое равенствами

$$z = Tx,\quad x = GNz+g,\quad x(0) = [lX]^{-1}(\alpha-lCNz).$$

Оператор $(Ky)(t)=\sum\limits_{j=0}^{N-1}T(t,i+1)\sum\limits_{j=0}^{N-1}G(i,j)y(j)$, $t=\overline{0,N-1}$, имеет представление

$$(Ky)(t) = \sum_{j=0}^{N-1}K(t,j)y(j),\quad t=\overline{0,N-1},$$

где $K(t,j)=\sum\limits_{i=0}^{N-1}T(t,i+1)G(i,j)$.

Тогда уравнение (2.5) может быть записано в виде

$$z(t) = \sum_{i=0}^{N-1}K(t,j)f(j,z(j))+r(t),\quad t=\overline{0,N-1},$$

или, короче

$$z = KNz + r.$$

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\mathfrak{L}x = Fx,\quad lx = \psi x \tag{2.6}$$

с нелинейным, вообще говоря, вектор-функционалом $\psi:M_{N+1}^n\longrightarrow R^n$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть:*

а) *оператор* $F:M_{N+1}^n\longrightarrow M_N^n$ *непрерывен, вектор-функционал* $\psi:M_{N+1}^n\longrightarrow R^n$ *непрерывен;*

б) *для всех решений семейства задач*

$$\mathfrak{L}x = \lambda Fx,\quad lx = \lambda\psi x,\quad \lambda\in[0,1], \tag{2.7}$$

имеет место общая априорная оценка

$$\|x_\lambda\|_{M_{N+1}^n} \leqslant d < \infty.$$

Тогда исходная краевая задача имеет по крайней мере одно решение $x\in M_{N+1}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия б) следует, что однородная задача $\mathfrak{L}x=0$, $lx=0$ имеет только тривиальное решение. В силу фредгольмовости краевой задачи $\mathfrak{L}x=f$, $lx=\alpha$, такая задача при любых $f\in M_N^n$ и $\alpha\in R^n$ имеет единственное решение $x=Z\alpha+Gf$. Таким образом, задача (2.7) эквивалентна уравнению

$$x = \lambda\Phi x \overset{\text{def}}{=\!=} \lambda\{Z\alpha+GFx\}$$

с непрерывным оператором $\Phi:M_{N+1}^n\longrightarrow M_N^n$.

Определим оператор $\Phi_1:M_{N+1}^n\longrightarrow M_{N+1}^n$ равенствами

$$(\Phi_1x)(0) = [lX]^{-1}(\alpha-lCFx),$$

$$(\Phi_1x)(t)=(\Phi x)(t-1),\quad t=\overline{1,N}.$$

Тогда задача (2.6) эквивалентна уравнению

$$x = \Phi_1 x$$

с непрерывным оператором $\Phi_1 : M^n_{N+1} \to M^n_{N+1}$ и для завершения доказательства остается сослаться на теорему Лере–Шаудера [3] (с.417).

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть выполнено условие* а) *теоремы* 2.1. *Пусть, далее,* $\det[lX] \neq 0$, *где* X *– фундаментальная матрица уравнения* $\mathfrak{L}x=0$, *а нелинейные операторы* F *и* ψ *удовлетворяют условиям*

$$\lim_{\|x\|_{M^n_{N+1}} \to +\infty} \frac{\|Fx\|_{M^n_N}}{\|x\|_{M^n_{N+1}}} = 0, \qquad \lim_{\|x\|_{M^n_{N+1}} \to +\infty} \frac{|\psi x|}{\|x\|_{M^n_{N+1}}} = 0. \tag{2.8}$$

Тогда задача (2.6) *имеет по крайней мере одно решение* $x \in M^n_{N+1}$.

Для доказательства достаточно заметить, что для любого решения x_λ задачи (2.7) выполняется неравенство

$$\|x_\lambda\|_{M^n_{N+1}} \leq \|Z\|\,|\psi x_\lambda| + \|G\|\,\|Fx_\lambda\|_{M^n_N},$$

где $\|Z\|$ – норма оператора умножения на матрицу Z как оператора из R^n в M^n_N, $\|G\|$ – норма оператора Грина как оператора из M^n_N в M^n_N.

Из последнего неравенства и условий (2.8) сразу вытекает наличие априорной оценки $\|x_\lambda\|_{M^n_{N+1}} \leq d < \infty$.

Доказательство закончено.

§3. Задача управления как краевая задача

Рассмотрим краевую задачу

$$\mathfrak{L}x = f, \quad l_1 x = \alpha_1, \quad l_2 x = \alpha_2, \tag{3.1}$$

где $l_1, l_2 : M^n_{N+1} \to R^n$ – линейные вектор-функционалы.

Предположим, что

$$l_1 x = B^1_0 x(0) + \quad + B^1_N x(N),$$

$$l_2 x = B^2_0 x(0) + \ldots + B^2_N x(N),$$

B^j_i, $i=\overline{0,N}$; $j=1,2$ – заданные $n\times n$-матрицы.

Пусть $H : M^\nu_N \to M^n_N$ – линейный оператор, представимый в виде $(Hu)(t) = \sum_{i=0}^{t} H(t,i)u(i)$ для $t=\overline{0,N-1}$, $u \in M^\nu_N$, $u=\{u(0),\ldots,u(N-1)\}$ и $f=Hu+v$, $v \in M^n_N$.

Задача управления состоит в отыскании такого $u \in M^\nu_N$, при котором разрешима задача

$$\mathfrak{L}x = Hu+v, \quad l_1 x = \alpha_1, \quad l_2 x = \alpha_2. \tag{3.2}$$

Наиболее распространенной в приложениях является задача

$$\mathfrak{L}x = Hu+v, \ x(0) = \alpha_1, \quad x(N) = \alpha_2. \tag{3.3}$$

В экономической динамике встречаются задачи вида

$$\mathfrak{L}x = Hu+v, \quad x(0) = \alpha_1, \quad \sum_{k=0}^{N} x(k) = \alpha_2, \tag{3.4}$$

и

$$\mathfrak{L}x = Hu+v, \quad \sum_{k=0}^{N} x(k) = \alpha_1, \quad x(N) = \alpha_2, \tag{3.5}$$

в которых задаются начальное (соответственно, конечное) состояние системы и некоторая интегральная характеристика траектории.

ТЕОРЕМА 3.3. *Задача управления* (3.2) *разрешима при любых* $\alpha_1,\alpha_2\in R^n$, $v\in M_N^n$ *тогда и только тогда, когда система*

$$\begin{cases} \mathfrak{L}^*\varphi+l_1^*\psi_1+l_2^*\psi_2 = 0, \\ H^*\varphi = 0 \end{cases}$$

имеет в пространстве $M_m^n\times R^n\times R^n$ *только тривиальное решение* $\{\psi,\psi_1,\psi_2\}=\{0,0,0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\Lambda:M_{N+1}^n\times M_N^\nu\longrightarrow M_N^n\times R^n\times R^n$ оператор, определенный на парах $y=\mathrm{col}\{x,u\}$, где $x\in M_{N+1}^n$, $u\in M_N^\nu$, равенством

$$\Lambda y = \mathrm{col}\{\mathfrak{L}x-Hu,\ l_1x,\ l_2x\}.$$

Обозначим $g=\mathrm{col}\{v,\alpha_1,\alpha_2\}$, где $v\in M_N^n$, $\alpha_1,\alpha_2\in R^n$. Тогда задача управления (3.2) может быть записана в виде операторного уравнения

$$\Lambda y = g. \tag{3.6}$$

Заметим, что оператору Λ можно сопоставить операторную матрицу:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathfrak{L} & -H \\ l_1 & 0 \\ l_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнение, сопряженное к уравненню (3.6), т.е. уравнение

$$\Lambda^*\lambda = z, \tag{3.7}$$

где $\lambda\in(M_N^n\times R^n\times R^n)^*$, $z\in(M_{N+1}^n\times M_N^\nu)^*$.

В дальнейшем не будем различать конечномерные пространства и сопряженные к ним пространства.

Элемент $\lambda\in M_N^n\times R^n\times R^n$ определяется тройкой $\{\varphi,\psi_1,\psi_2\}$, $\varphi\in M_N^n$, $\psi_1,\psi_2\in R^n$, поэтому

$$<\lambda,g> = <\lambda,\mathrm{col}\{v,\alpha_1,\alpha_2\} = <\{\varphi,\psi_1,\psi_2\},\mathrm{col}\{v,\alpha_1,\alpha_2\}> =$$
$$= <\varphi,v> + <\psi_1,\ \alpha_1> + <\psi_2,\ \psi_2>.$$

Подставив $v=\mathfrak{L}x-Hu$, $\alpha_1=l_1x$, $\alpha_2=l_2x$, получим

$$<\lambda,\Lambda x> = <\lambda,\mathrm{col}\{\mathfrak{L}x-Hu,\ l_1x,\ l_2x\}> = <\varphi,\mathfrak{L}x-Hu> + <\psi_1,\ l_1x> +$$
$$+ <\psi_2,l_2x> = <\varphi,\mathfrak{L}x> - <\varphi,Hu> + <\psi_1,l_1x> + <\psi_2,l_2x> =$$
$$= <\mathfrak{L}^*\varphi,x>-<H^*\varphi,u> + <l_1^*\psi_1,x> + <l_2^*\psi_2,x> = <\mathfrak{L}^*\varphi+l_1^*\psi_1+l_2^*\psi_2,x> - H^*\varphi,u>.$$

Здесь $\mathfrak{L}^*:(M_N^n)^*\longrightarrow(M_{N+1}^n)^*$, $l_1^*;l_2^*:(R^n)^*\longrightarrow(M_{N+1}^n)^*$, $H^*:(M_N^n)^*\longrightarrow(M_N^\nu)^*$. Или, по-другому, $\mathfrak{L}^*:M_N^n\longrightarrow M_{N+1}^n$, $l_1^*,l_2^*:R^n\longrightarrow M_{N+1}^n$, $H^*:M_N^n\longrightarrow M_N^\nu$.

Таким образом, оператор Λ^* имеет представление

$$\Lambda^*\lambda = \mathrm{col}\{\mathfrak{L}^*\varphi+l_1^*\psi_1+l_2^*\psi_2-H^*\varphi\}.$$

В матричной записи оператору Λ^* соответствует матрица

$$\Lambda^* = \begin{pmatrix} \mathfrak{L}^* & l_1^* & l_2^* \\ -H^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, сопряженное уравнение для задачи (3.2) имеет вид

$$\begin{cases} \mathfrak{L}^*\varphi+l_1^*\psi_1+l_2^*\psi_2 = z_1, \\ -H^*\varphi = z_2, \end{cases} \tag{3.8}$$

где $z_1\in M^n_{N+1}$, $z_2\in M^\nu_N$, $z=\mathrm{col}\{z_1,z_2\}$.

Так как (3.6) и (3.7) – уравнения в конечномерных пространствах, то для них справедливы соответствующие утверждения теории фредгольмовых операторов. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Построим в явном виде оператор $H^*:(M^n_N)^*\to(M^\nu_N)^*$. Для удобства будем рассматривать его как оператор $H^*:M^n_N\to M^\nu_N$.

Пусть $\varphi\in(M^n_N)^*$, $\varphi=\{\varphi(0),...,\varphi(N-1)\}$. Справедливы формулы

$$<\varphi,Hu> = \sum_{k=0}^{N-1}<\varphi(k),\sum_{i=0}^{k}H(k,i)u(i)> = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{k}<\varphi(k),H(k,i)u(i)> =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{k}<H^*(k,i)\varphi(k),u(i)> = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=i}^{N-1}<H^*(k,i)\varphi(k),u(i)> = \sum_{i=0}^{N-1}\left\langle\sum_{k=i}^{N-1}H^*(k,i)\varphi(k),u(i)\right\rangle.$$

Итак,

$$(H^*\varphi)(k) = \sum_{i=k}^{N-1}H'(i,k)\varphi(i), \quad k=\overline{0,N-1}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Задача управления (3.3) разрешима при любых $\alpha_1,\alpha_2\in R^n$, $v\in M^n_N$ тогда и только тогда, когда система

$$\psi_1-\sum_{i=0}^{N-1}A'(i,0)\varphi(i) = 0, \quad \sum_{i=0}^{N-1}H'(i,0)\varphi(i) = 0,$$

$$\varphi(k-1)-\sum_{i=0}^{N-1}A'(i,k)\varphi(i) = 0, \quad \sum_{i=k}^{N-1}H'(i,k)\varphi(i), \quad k=\overline{1,N-1},$$

$$\psi_2+\varphi(N-1)=0, \quad H'(N-1,N-1)\psi(N-1) = 0$$

имеет в пространстве $M^n_N\times R^n\times R^n$ только тривиальное решение $\{\varphi,\psi_1,\psi_2\}=\{0,0,0\}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Задача управления (3.5) разрешима при любых $\alpha_1,\alpha_2\in R^n$, $v\in M^n_N$ тогда и только тогда, когда система

$$\psi_1+\psi_2-\sum_{i=0}^{N-1}A'(i,0)\varphi(i) = 0, \quad \sum_{i=0}^{N-1}H'(i,0)\varphi(i) = 0,$$

$$\psi_2+\varphi(k-1)-\sum_{i=k}^{N-1}A'(i,k)\varphi(i) = 0, \quad \sum_{i=k}^{N-1}H'(i,k)\varphi(i) = 0, \quad k=\overline{1,N-1},$$

$$\psi_2+\varphi(N-1) = 0, \quad H'(N-1,N-1)\varphi(N-1) = 0$$

имеет в пространстве $M^n_N\times R^n\times R^n$ только тривиальное решение $\{\varphi,\psi_1,\psi_2\}=\{0,0,0\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Задача управления (3.5) разрешима при любых $\alpha_1,\alpha_2\in R^n$, $v\in M^n_N$ тогда и только тогда, когда система

$$\psi_1-\sum_{i=0}^{N-1}A'(i,0)\varphi(i) = 0, \quad \sum_{i=0}^{N-1}H'(i,0)\varphi(i) = 0,$$

$$\psi_1+\varphi(k-1)-\sum_{i=k}^{N-1}A'(i,k)\varphi(i) = 0, \quad \sum_{i=k}^{N-1}H'(i,k)\varphi(i) = 0, \quad k=\overline{1,N-1},$$

$$\psi_1+\psi_2+\varphi(N-1)=0, \quad H'(N-1,N-1)\varphi(N-1) = 0$$

имеет в пространстве $M^n_N\times R^n\times R^n$ только тривиальное решение $\{\varphi,\psi_1,\psi_2\}=\{0,0,0\}$.

Предположим, что краевая задача

$$\mathfrak{L}x = v, \quad l_1x = \alpha_1 \tag{3.9}$$

однозначно разрешима. Тогда сопряженное уравнение для этой задачи имеет вид

$$\mathfrak{L}^*\varphi + l_1^*\psi_1 = g, \tag{3.10}$$

и также однозначно разрешимо для любого $g\in(M_{N+1}^n)^* = M_{N+1}^n$.

Таким образом, существует линейный оператор $\Xi:M_{N+1}^n \longrightarrow M_N^n$, ставящий в соответствие правой части g уравнения (3.10) компоненту φ решения $\lambda=\{\varphi,\psi_1\}$.

Определим оператор $\mathfrak{B}:R^n \longrightarrow M_N^n$ равенством

$$\mathfrak{B}\psi_2 = \Xi l_2^*\psi_2, \quad \psi_2\in R^n.$$

Подставляя правую часть последнего равенства во второе уравнение системы (3.7), получаем

$$H^*\mathfrak{B}\psi_2 = 0,$$

где $\psi_2\in R^n$, $H^*:R^n \longrightarrow M_N^\nu$ – линейный оператор.

Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть задача* (3.9) *однозначно разрешима. Задача управления* (3.2) *разрешима при любых* $\alpha_1,\alpha_2 \in R^n$, $v \in M_N^n$ *тогда и только тогда, когда при любом* $k=\overline{0,N}$ *ранг матрицы линейного оператора* $(\mathfrak{W})(k)=(H^*\mathfrak{B})(k)$ *равен* n.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть задача (3.8) однозначно разрешима, и набор $\nu\times n$–матриц $\mathfrak{W}(k)$, $k=\overline{0,N}$ определен оператором $\mathfrak{W}=H^*\mathfrak{B}:R^n \longrightarrow M_N^\nu$. Задача управления (3.2) разрешима при любых $\alpha_1,\alpha_2\in R^n$, $v\in M_N^n$ тогда и только тогда, когда $\det M(k)\neq 0$ для любого $k=\overline{0,N}$.

Здесь $M(k)=\mathfrak{W}'(k)\mathfrak{W}(k)$ – матрица Грама системы строк (столбцов) матрицы $\mathfrak{W}(k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В условиях следствия разрешимость задачи управления сохраняется при малых возмущениях параметров задачи. А именно, если задача управления (3.2) разрешима при любых $\alpha_1,\alpha_2\in R^n$, $v\in M_N^n$ и возмущения ее параметров таковы, что соответствующее им возмущение матриц $\Delta M(k)$ матриц $M(k)$ $(k=\overline{0,N})$ удовлетворяют неравенству

$$\|\Delta M(k)\| < \|[M(k)]^{-1}\|^{-1},$$

то возмущенная задача

$$(\mathfrak{L}+\Delta\mathfrak{L})x = (H+\Delta H)u+v, \quad (l_1+\Delta l_1)x = \alpha_1, \quad (l_2+\Delta l_2) = \alpha_2$$

разрешима в силу известной теоремы об обратном операторе. Это обстоятельство дает принципиальную возможность получения эффективных конструктивных теорем об управляемости линейных дискретных систем.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $l_1x\equiv x(0)$ задача (3.8) всегда однозначно разрешима. В этом случае при каждом $k=\overline{0,N}$ оператор $\mathfrak{B}(k):R^n \longrightarrow R^n$ определяется равенством

$$\mathfrak{B}(k) = (C^*l_2^*)(k),$$

где оператор Коши C рассматривается как оператор, действующий из пространства M_N^n в это же пространство. Точнее, если $f \in M_N^n$, $f=\{f(0),\dots,f(N-1)\}$, то $x=Cf$, $x=\{x(0),\dots,x(N-1)\}$ $x\in M_N^n$.

§4. Управляемость линейных разностных систем

Рассмотрим линейную систему управления

$$\mathfrak{L}x = Gu+f \tag{4.1}$$

в следующих предположениях.

Оператор $\mathfrak{L}:M_{N+1}^n \longrightarrow M_N^n$ имеет представление

$$(\mathfrak{L}x)(t) = x(t+1)-\sum_{i=0}^{t} A(t,i)x(i), \quad x(t)\in R^n, \quad t\in\overline{0,N-1};$$

$G(t)$ – $n\times\nu$-матрица при каждом $t\in\overline{0,N-1}$; $(Gu)(t)=G(t)u(t)$. В пространстве M_N^ν введем скалярное произведение

$$\langle u,v\rangle = \sum_{i=0}^{N-1}(u(i),v(i)),$$

$u,v,\in M_N^\nu$, где (α,β) – скалярное произведение векторов $\alpha,\beta\in R^n$. Определим норму $\|u\|_{M_N^n}$ элемента $u\in M_N^\nu$ равенством

$$\|u\|_{M_N^\nu} = \langle u,v\rangle.$$

В указанных предположениях при любых $\alpha\in R^n$, $u\in M_N^\nu$ и $f\in M_N^n$ задача Коши

$$\mathfrak{L}x = Gu+f, \quad x(0) = \alpha$$

однозначно разрешима и для ее решения x справедливо представление

$$x(t+1) = X(t+1)\alpha+(CGu)(t)+(Cf)(t), \quad t\in\overline{0,N-1}. \tag{4.2}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Систему (4.1) назовем вполне управляемой, если для любых $\alpha\in R^n$ и $\beta\in R^n$ найдется управление $u_\alpha^\beta\in M_N^\nu$, такое, что решение задачи $\mathfrak{L}x=Gu_\alpha^\beta+f$, $x(0)=\alpha$ удовлетворяет условию $x(N)=\beta$.

Напомним, что в формуле (4.2) $X(\cdot)$ – фундаментальная матрица, $C:M_N^n\longrightarrow M_N^n$ – оператор Коши уравнения (4.1),

$$(Cf)(t) = \sum_{i=0}^{t} C(t,i)f(i), \quad t=\overline{0,N-1},$$

где $C(\cdot,\cdot)$ – матрица Коши уравнения (4.1) (см. п.1).

В формуле (4.2) положим $t=N-1$ и $x(N)=\beta$, получим равенство

$$\beta = X(N)\alpha+(CGu)(N-1)+(Cf)(N-1),$$

откуда

$$(CGu)(N-1) = \beta-X(N)\alpha-(Cf)(N-1), \tag{4.3}$$

или

$$\sum_{i=0}^{N-1} C(N-1,i)G(i)u(i) = \beta-X(N)\alpha-\sum_{i=0}^{N-1} C(N-1,i)f(i).$$

В силу конечномерности пространства M_N^ν для любого элемента $u\in M_N^\nu$ справедливо представление

$$u = u_0+v,$$

где

$$u_0(i) = U(i)\gamma, \quad \gamma\in R^n,$$
$$U(i) = G'(i)C'(N-1,i).$$

Элемент v определяется из равенства

$$(CGv)(N-1) = \sum_{i=0}^{N-1} C(N-1,i)G(i)v(i) = 0,$$

причем

$$\langle u_0,v\rangle = \sum_{i=0}^{N-1}(G'(i)G'(N-1,i)\gamma,v(i)) = \sum_{i=0}^{N-1}(\gamma,C(N-1,i)G(i)v(i)) =$$
$$= (\gamma,\sum_{i=0}^{N-1} C(N-1,i)G(i)v(i)) = 0.$$

В таком случае формула (4.3) примет вид

$$M\gamma = \beta - X(N)\alpha - (Cf)(N-1),$$

где

$$M = \sum_{i=0}^{N-1} C(N-1,i)G(i)G'(i)C'(N-1,i).$$

Заметим, что управление $u=u_0$ среди всех управлений вида $u=u_0+v$ имеет минимальную норму в пространстве M_N^v. Действительно,

$$\|u\|_{M_N^v} = \langle u_0+v, u_0+v\rangle = \langle u_0,u_0\rangle + \langle v,v\rangle \geq \|u_0\|_{M_N^v}.$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Система (4.1) вполне управляема тогда и только тогда, когда* $\det M \neq 0$. *В случае* $\det M \neq 0$ *множество управлений, решающих задачу управления, представимо в виде*

$$U(i) = U(i)M^{-1}[\beta - X(N)\alpha - (Cf)(N-1)] + v(i),$$

где v пробегает все множество решений уравнения $(CGv)(N-1)=0$.

В заключение заметим, что результаты этого пункта были получены на основе идей монографии [4] и статей [5], [6].

§5. Управляемость нелинейных разностных систем

Рассмотрим нелинейную систему управления

$$\mathfrak{L}x = Gu + F(x,u) \tag{5.1}$$

в следующих предположениях.

Операторы $\mathfrak{L}:M_{N+1}^n \longrightarrow M_N^n$ и $G:M_N^v \longrightarrow M_N^n$ удовлетворяют условиям предыдущего пункта; $u \in U^v$, U^v – подпространство пространства M_N^v, в котором введено скалярное произведение; оператор $F:M_{N+1}^n \times U^v \longrightarrow M_N^n$ непрерывен.

Предположим, что для каждого $\alpha \in R^n$ и каждого $u \in U^v$ задача Коши

$$\mathfrak{L}x = Gu + F(x,u), \quad x(0)=\alpha$$

однозначно разрешима.

Для системы (5.1) примем определение полной управляемости, аналогичное определению 1 п.4.

ТЕОРЕМА 2. *Система (5.1) вполне управляема, если выполнены следующие условия:*

а) $\det M \neq 0$,

б) *столбцы матрицы* $U(\cdot)$ *принадлежат пространству* U^v;

в) *для каждой фиксированной пары* $\alpha \in R^n$, $\beta \in R^n$ *для всех решений* $\{x_\lambda, u_\lambda\}$ *всех систем*

$$x(t+1) = \lambda[(CGu)(t) + (CF(x,u))(t)] + X(t+1)\alpha,$$

$$u(t) = -\lambda U(t)M^{-1}[(CGu)(N-1) + (CF(x,u))(N-1) + U(t)M^{-1}[\beta - X(N)\alpha], \quad t=\overline{0,N-1},$$

где $\lambda \in [0,1]$, *имеет место априорная общая оценка*

$$\|\{x_\lambda, u_\lambda\}\|_{M_{N+1}^n \times U^v} \leq d < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь известной схемой [4], [6], сведем вопрос об условиях управляемости к вопросу об условиях разрешимости уравнения

$$z = \Phi z,$$

где

$$z = \mathrm{col}\{y,u\}, \quad y \in M_N^n, \quad y(t) = x(t+1), \quad t=\overline{0,N-1},$$

$$x = \{\alpha, y\}, \quad u \in U^{\nu}, \quad \Phi: M_N^n \times U^{\nu} \longrightarrow M_N^{\nu} \times U^{\nu},$$

$$\Phi z = \Phi\left\{\begin{matrix} y \\ u \end{matrix}\right\} = \mathrm{col}\{\Phi_1(y,u), \Phi_2(y,u)\},$$

$$(\Phi_1(y,u))(t) = (CGu)(t) + (CF(\{\alpha,y\},u))(t) + X(t+1)\alpha,$$

$$(\Phi_2(y,u))(t) = U(t)M^{-1}[(CGu)(N-1) + (CF(\{\alpha,y\}))(N-1) + U(t)M^{-1}[\beta - X(N)\alpha], \quad t = \overline{0, N-1}.$$

В условиях теоремы оператор $\Phi: M_N^n \times U^{\nu} \longrightarrow M_N^{\nu} \times U^{\nu}$ непрерывен. Ссылка на принцип Лере–Шаудера [3] (с.417) завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия а), б) теоремы 2 и

$$\lim_{\|\{x,u\}\|_{M_{N+1}^n \times U^{\nu}} \longrightarrow +\infty} \frac{\|F(x,u)\|_{M_N^n}}{\|\{x,u\}\|_{M_{N+1}^n \times U^{\nu}}} = 0. \tag{5.2}$$

Тогда система (5.1) вполне управляема.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $(F(x,u))(t) = f(t, (\mathcal{L}_1 x), (G_1 u)(t))$, $t = \overline{0, N-1}$, где $\mathcal{L}_1: M_{N+1}^n \longrightarrow M_N^n$, $G_1: U^{\nu} \longrightarrow M_N^n$ – линейные операторы. Если при некоторых $0 \leqslant p, r < 1$ справедливо неравенство

$$\|f(t,x,u)\|_{R^n} \leqslant \rho(t) + \varphi\|x\|_{R^n}^p + \psi\|u\|_{R^n}^r, \quad t = \overline{0, N-1},$$

то, очевидно, выполнено условие (5.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.

2. Андрианов Д.Л., Полушкина Г.К. *Краевые задачи для макроэкономических моделей с запаздыванием* // Функционально-дифференц. уравнения. – Пермь, 1992. – С.15–34.

3. Треногин В.А. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1980. – 496 с.

4. Зубов В.И. *Лекции по теории управления.* – Л.: Издательство ЛГУ, 1975. – 204 с.

5. Култышев С.Ю. *Об управляемости линейных функционально-дифференциальных систем* // Функционально-дифференц. уравнения и краевые задачи матем. физики. – Пермь, 1978. – С.174–178.

6. Култышев С.Ю., Максимов В.П. *Управляемость нелинейных функционально-дифференциальных систем* // Краевые задачи. – Пермь, 1982. – С.12–18.

г. Пермь

Поступила
05.07.1993