Ф. А. Шолохович, О связи между линейной динамической системой и дифференциальным уравнением в пространстве Банаха,
Докл. АН СССР, 1958, том 120, номер 1, 43–46

https://www.mathnet.ru/dan23005

Доклады Академии наук СССР
1958. Том 120, № 1

МАТЕМАТИКА

Ф. А. ШОЛОХОВИЧ

О СВЯЗИ МЕЖДУ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 11 I 1958)

Качественная теория дифференциальных уравнений, заданных в банаховом пространстве B, рассматривалась за последнее время рядом авторов [1-3]. В некоторых работах (например, [1-3]) исследуются отдельные вопросы, связанные с устойчивостью, ограниченностью, скоростью убывания или роста решений уравнения $dp/dt = A(t)p$, $p \in B$. Линейный оператор $A(t)$, как правило, считается ограниченным при каждом фиксированном t. М. Г. Крейн, в частности, рассматривает уравнение

$$dp/dt = Ap, \tag{1}$$

где линейный ограниченный оператор A не зависит от t.

Вместе с тем в качественной теории дифференциальных уравнений важное место занимает теория динамических систем, в которой свойства интегральных кривых изучаются вне связи с дифференциальными уравнениями.

Динамическая система $f(p,t) = f(t)p$ ([4], стр. 347), отвечающая уравнению (1), удовлетворяет обычным аксиомам:

A_1. $f(p,0) = p$, т. е. $f(0) = I$ (тождественный оператор).

A_2. $f[f(p,t_1), t_2] = f(p, t_1 + t_2)$.

A_3. $f(p, t)$ непрерывна по совокупности аргументов.

Кроме этих аксиом, она обладает еще свойством линейности:

A_4. $f(p_1 + p_2, t) = f(p_1, t) + f(p_2, t)$ (это легко проверить, решив уравнение (1) методом последовательных приближений).

Естественно возникает задача изучения линейной динамической системы, т. е. системы, удовлетворяющей условиям A_1 — A_4 (1-я задача). Задача в такой форме будет иметь смысл и интерес, если указанная постановка окажется более общей, чем качественное изучение уравнения (1) (2-я задача)*.

В настоящей заметке будет показано, что в случае конечномерного пространства B 1-я и 2-я задачи эквивалентны, но для бесконечномерного пространства 1-я задача является более общей, чем 2-я. Кроме того будет решен один вопрос, поставленный Э. Хиллом [5].

В дальнейшем термин «линейный оператор» употребляется в смысле «ограниченный линейный оператор»

Теорема 1. *Для того чтобы линейная динамическая система $f(t)p$, заданная в банаховом пространстве B, соответствовала уравнению* (1), *необходимо и достаточно условие*

$$\lim_{t \to 0} \| f(t) - I \| = 0.$$

(Другими словами, операторная функция $f(t)$ равномерно непрерывна ([5], определение 3.4.2) при $t = 0$.)

* Постановка 1-й задачи принадлежит Е. А. Барбашину.

Доказательство. Необходимость. По условию, в каждой точке $p \in B$ существует производная вдоль траектории

$$\frac{dp}{dt} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t)p - p}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(t) - I]p = Ap.$$

Рассмотрим совокупность линейных операторов $\{F(t)\}$, где $F(t) = \frac{1}{t}[f(t) - I]$, $-1 \leqslant t < 0$ или $0 < t \leqslant 1$. Так как $\lim\limits_{t \to 0} F(t)p = Ap$, то для любой точки $p \in B$ $\sup\limits_t \| F(t)p \| < \infty$. По теореме Банаха ((5), теорема 2.12.2) отсюда следует, что множество $\{\| F(t) \|\}$ ограничено. Но $\| F(t) \| = \frac{\| f(t) - I \|}{|t|}$, и при $t \to 0$ ограниченность $\| F(t) \|$ означает, что $\| f(t) - I \| \to 0$.

Достаточность. Пусть $\| f(t) - I \| \to 0$. Для доказательства этой части теоремы достаточно заметить, что $f(t)$ является функцией, заданной в интервале $(-\infty, \infty)$, со значениями в банаховой алгебре эндоморфизмов пространства B самого в себя ((5), определение 2.15.1 и теорема 2.15.2).

Поскольку $f(t_1 + t_2) = f(t_1) \cdot f(t_2)$ (условие A_2) и существует равномерный предел $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = I$, то выполнены все условия теоремы 8.4.2 из (5), и, следовательно, существует (в равномерной топологии) $\lim \frac{1}{t}[f(t) - I] = A$. Оператор A, разумеется, линеен (из доказательства теоремы видно, что переход к пределу освобожден от условия $t > 0$). Тогда $\frac{dp}{dt} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(t) - I]p = Ap$. $\frac{dp}{dt} = Ap$ и есть искомое дифференциальное уравнение. Так как решение этого уравнения единственно, то соответствующая ему динамическая система совпадает с системой $f(t)p$.

Теорема 2. *Для того чтобы однопараметрическая группа $f(t)$ линейных операторов задавала динамическую систему $f(t)p$, достаточно выполнения двух условий*: 1) $f(0) = I$; 2) $f(t)$ *сильно непрерывна при* $t = 0$ (*необходимость этих условий очевидна*).

Доказательство. Требуется только установить непрерывность функции $f(t)p$ по совокупности аргументов. Равенство $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)p = \lim\limits_{t \to t_0} f(t - t_0) f(t_0) p = f(t_0)p$ показывает сильную непрерывность $f(t)$ на всей оси. Отсюда следует непрерывность $\| f(t)p \|$ ((5), стр. 31). Если теперь $a \leqslant t \leqslant b$, то для любой точки $p \in B$ $\sup\limits_t \| f(t)p \| < \infty$ и, по теореме Банаха ((5), теорема 2.12.2), множество $\{\| f(t) \|\}$ ограничено числом M, зависящим только от a и b. Используя оценку $\| f(t)p - f(t_0)p_0 \| \leqslant \leqslant \| f(t) \| \cdot \| p - p_0 \| + \| f(t)p_0 - f(t_0)p_0 \|$, легко закончить доказательство.

Можно привести примеры того, что условия 1) и 2) не вытекают из других условий теоремы.

Теорема 3. *Если задана однопараметрическая группа линейных операторов $f(t)$, действующих в конечномерном пространстве, то из сильной непрерывности $f(t)$ при $t = 0$ следует равномерная непрерывность $f(t)$ при $t = 0$.*

Доказательство. Допустим противное. Поскольку $\| f(t) - f(0) \| = \sup\limits_{\|p\| \leqslant 1} \| [f(t) - f(0)]p \|$, то допущение означает, что существует число $a > 0$, числовая последовательность $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots \to 0$ и последовательность точек пространства $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, $\| p_n \| \leqslant 1$, такие, что при любом n выполняется неравенство $\| f(t_n)p_n - f(0)p_n \| \geqslant a$. Так как в конечномерном пространстве сфера $\| p \| \leqslant 1$ компактна, то можно предположить, что $\lim p_n = q$. В теореме 2 доказано, что сильная непрерывность $f(t)$ влечет за собой непрерывность функции $f(t)p$ по совокупности аргументов. Переходя к пределу в неравенстве $\|f(t_n)p_n - f(0)p_n\| \geqslant a$ при $n \to \infty$, придем к противоречию: $\|f(0)q - f(0)q\| \geqslant a$.

Следствие. *В конечномерном пространстве линейная динамическая система всегда соответствует дифференциальному уравнению.*

Для доказательства достаточно сопоставить теоремы 1 и 3.

Определение. Две линейные динамические системы $f(t)p$ и $g(t)q$, $p \in B$, $q \in B'$, назовем линейно гомеоморфными, если существует такой линейный взаимно-непрерывный изоморфизм Φ банаховых пространств B и B', что из равенства $q = \Phi(p)$ следует равенство $g(t)q = \Phi[f(t)p]$.

Теорема 4. *Если линейная динамическая система $f(t)p$ соответствует дифференциальному уравнению* (1), *то этим же свойством обладает всякая динамическая система $g(t)q$, линейно гомеоморфная системе $f(t)p$.*

Доказательство. Пусть $q = \Phi(p)$, $g(t)q = \Phi \cdot f(t)p$. Но $p = \Phi^{-1}(q)$, поэтому $g(t) = \Phi \cdot f(t) \cdot \Phi^{-1}$, $\|g(0) - g(t)\| = \|\Phi[f(0) - f(t)]\Phi^{-1}\| \leqslant \|\Phi\| \cdot \|f(0) - f(t)\| \cdot \|\Phi^{-1}\|$. Справедливость теоремы теперь очевидна.

Э. Хилл ([5], стр. 225) отмечает: «Всегда ли $\|T(\xi)\|$ непрерывна, неизвестно». В наших обозначениях $T(\xi)$ — это $f(t)$ при $t > 0$ (полугруппа операторов). Мы приведем сейчас пример такой линейной динамической системы $f(t)p$, у которой $\|f(t)\|$ разрывна при $t = 0$ и, тем более, нет равномерной непрерывности $f(t)$ при $t = 0$, так как

$$\|f(t) - f(0)\| \geqslant \big|\|f(t)\| - \|f(0)\|\big|. \tag{2}$$

В качестве банахова пространства B возьмем множество всех вещественных функций $y(x)$, непрерывных в замкнутом интервале $[-\infty, \infty]$, и операции определим естественным образом. Функцию $y(x)$ как точку пространства B будем обозначать буквой p. Пусть $g(x)$ — любая функция, заданная на всей числовой оси и ограниченная положительными числами: $0 < a \leqslant g(x) \leqslant A$. Если $p = y(x)$, то положим $\|p\| = \sup\limits_{-\infty < x < \infty} |y(x)|\, g(x)$. Легко проверить, что выполняются аксиомы нормы, и установить полноту пространства. Определим в пространстве B динамическую систему $f(t)p$. Если $p = y(x)$, то положим $f(t)p = y(x+t)$. Выполнение аксиом A_1, A_2, A_4 очевидно.

Теперь покажем, что $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)p = f(t_0)p$. Возьмем фиксированную точку $p = y(x)$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Вследствие равномерной непрерывности функции $y(x)$ на $[-\infty, \infty]$ существует такое число $\delta > 0$, что при $|\Delta x| < \delta$ и любом $x \in (-\infty, \infty)$ выполняется неравенство $|y(x + \Delta x) - y(x)| < \varepsilon/A$. Пусть $|t - t_0| < \delta$. Тогда $\|f(t)p - f(t_0)p\| = \sup\limits_{-\infty < x < \infty} |y(x+t) - y(x + t_0)|\, g(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon$.

При фиксированном t оператор $f(t)$ аддитивен и однороден. Докажем его ограниченность. В нашем случае $\|p\| \leqslant 1$ означает, что $\sup\limits_{-\infty < x < \infty} |y(x)|\, g(x) \leqslant 1$, тем более, $|y(x)| \leqslant 1/a$. Следовательно, $\|f(t)\| = \sup\limits_{\|p\| \leqslant 1} \|f(t)p\| \leqslant \sup\limits_{|y(x)| \leqslant 1/a} \sup\limits_{-\infty < x < \infty} |y(x+t)|\, g(x) \leqslant A/a$. Этим доказано выполнение всех условий теоремы 2.

Свойства $\|f(t)\|$ зависят от вида функции $g(x)$. Например, пусть $g(x) = 1$ при $x \leqslant 0$, $g(x) = 1/2$ при $x > 0$; $\|f(t)\| = 1$ при $t \leqslant 0$, $\|f(t)\| = 2$ при $t > 0$. Тогда $\|f(t)\|$ может иметь и счетное число точек разрыва. Покажем это. Пусть при $n - 1 < x \leqslant n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ $g(x) = \dfrac{2^n + 1}{2^{n+1}}$, а для $x \leqslant 0$ $g(x) = 1$. Можно убедиться, что при $n - 1 < t \leqslant n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

и любом x $g(x-t)\leqslant\frac{2^{n+1}}{2^n+1}g(x)$. Если $n-1<t\leqslant n$ $(n=1, 2, \ldots)$, то имеем

$$\|f(t)p\|=\sup_{-\infty<x<\infty}|y(x+t)|g(x)=\sup_{-\infty<x<\infty}|y(x)|g(x-t)\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{-\infty<x<\infty}|y(x)|g(x)\frac{2^{n+1}}{2^n+1}=\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\|p\|.$$

Отсюда

$$\|f(t)\|\leqslant\frac{2^{n+1}}{2^n+1}.$$

Чтобы установить обратное неравенство, возьмем для данного фиксированного $t\in(n-1, n]$ $p=y(x)=1$ при $x\leqslant n-1$; $p=\alpha x+\beta$ при $n-1<x<(n-1)+{}^1/_2[t-(n-1)]$; $p=2^{n+1}/(2^n+1)$ при $x\geqslant{}^1/_2(n-1+t)$ (где α и β взяты так, чтобы $y(x)$ была непрерывной). Очевидно, $\|p\|=1$. Пусть теперь $x_0=-{}^1/_2[t-(n-1)]$. Так как $x_0+t={}^1/_2(n-1+t)$, то $y(x_0+t)=2^{n+1}/(2^n+1)$, а $g(x_0)=1$, поскольку $x_0<0$. Таким образом, для указанных t и p

$$\|f(t)p\|=\sup_{-\infty<x<\infty}|y(x+t)|g(x)\geqslant y(x_0+t)g(x_0+t)g(x_0)=\frac{2^{n+1}}{2^n+1}.$$

Итак, для $n-1<t\leqslant n$

$$\|f(t)\|=\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\qquad(n=1, 2, \ldots).$$

При $t\leqslant 0$ $\|f(t)\|=1$, в чем легко убедиться. Следовательно $\|f(t)\|=1/g(x)$ и разрывна в точках $t=0, 1, 2, \ldots$

Можно отметить, что даже при $g(x)\equiv 1$ мы получаем линейную динамическую систему, которая не соответствует никакому дифференциальному уравнению (1), причем в этом случае $\|f(t)\|\equiv 1$. Для конечномерного пространства функция $\|f(t)\|$ непрерывна, что следует из теоремы 3, соотношения $\|f(t)-f(t_0)\|\leqslant\|f(t_0)\|\cdot\|f(t-t_0)-I\|$ и неравенства (2) с заменой $f(0)$ на $f(t_0)$.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
13 XI 1956

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, Усп. матем. наук, **3**, в. 3(25), 166 (1948). [2] К. П. Персидский, Изв. АН КазССР, сер. матем. и мех., № 97, в. 4, 3 (1950). [3] К. П. Персидский, Изв. АН КазССР, сер. астр., физ., матем. и мех., № 116, в. 1(6), 64 (1952). [4] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, 1949. [5] Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1951.