



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. V. Bankevich, On monotonicity of some functionals under monotone rearrangement with respect to one variable, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2016, Volume 444, 5–14

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

February 7, 2025, 11:37:28



С. В. Банкевич

**О МОНОТОННОСТИ НЕКОТОРЫХ
ФУНКЦИОНАЛОВ ПРИ МОНОТОННОЙ
ПЕРЕСТАНОВКЕ ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega = \omega \times [-1, 1]$, где ω – ограниченная область в \mathbb{R}^{n-1} . Обозначим $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, y) = (x', y)$.

Напомним теорему о послойном представлении измеримой неотрицательной функции u , заданной на Ω (см. [1, Теорема 1.13]). Положим $\mathcal{A}_t(x') := \{y \in [-1, 1] : u(x', y) > t\}$. Тогда имеет место равенство

$$u(x', y) = \int_0^\infty \mathcal{X}\{\mathcal{A}_t(x')\}(y) dt,$$

где $\mathcal{X}\{A\}$ – характеристическая функция множества A .

Определим монотонную перестановку измеримого множества $E \subset [-1, 1]$ и монотонную перестановку неотрицательной функции $u \in W_1^1(\Omega)$:

$$E^* := [1 - |E|, 1]; \quad u^*(x', y) = \int_0^\infty \mathcal{X}\{(\mathcal{A}_t(x'))^*\}(y) dt.$$

Определим множество \mathfrak{F} непрерывных функций $F : \omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ (здесь и далее $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$), выпуклых и возрастающих по третьему аргументу, удовлетворяющих $F(\cdot, \cdot, 0) \equiv 0$.

Рассмотрим функционал:

$$I(u) = \int_\Omega F(x', u(x), \|\mathcal{D}u\|) dx, \quad (1)$$

где $F \in \mathfrak{F}$, $\|\cdot\|$ – некоторая норма в \mathbb{R}^n , симметричная по последней координате, то есть удовлетворяющая $\|(x', y)\| = \|(x', -y)\|$,

$$\mathcal{D}u = (a_1(x', u(x))D_1u, \dots, a_{n-1}(x', u(x))D_{n-1}u, a(x, u(x))D_nu)$$

Ключевые слова: перестановки функций, интегральные функционалы.
Работа поддержана грантом РФФИ 15-01-07650.

– градиент u с весом (следует обратить внимание, что только вес при $D_n u$ зависит от y), $a(\cdot, \cdot) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $a_i(\cdot, \cdot) : \omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – непрерывные функции. Здесь и далее индекс i пробегает от 1 до $n-1$.

Хорошо известно, что при $a_i = a \equiv 1$ справедливо неравенство

$$I(u^*) \leq I(u), \quad u \in W_1^1(\Omega), \quad u \geq 0 \quad (2)$$

(см., например, [2] и цитированную там литературу).

В настоящей работе мы приводим необходимые условия на вес a для выполнения неравенства (2) и доказываем неравенство (2) при некоторых дополнительных ограничениях.

В работе [3] рассматривается неравенство, аналогичное (2). А именно,

$$I(\bar{u}) \leq I(u), \quad u \in W_1^1(\Omega), \quad u \geq 0, \quad (3)$$

где \bar{u} – симметризация по Штейнеру (симметричная перестановка) функции u по переменной y . Автор [3] доказывает неравенство в случае, когда вес a – четная и выпуклая по y функция. Для этого неравенство (3) доказывается для кусочно линейных функций u и утверждается, что в общем случае неравенство получается при помощи аппроксимации. Однако предельный переход в [3] должным образом не обоснован, и можно считать, что результат получен лишь для липшицевых функций u . Отметим, что в статье [3] также только вес при $D_n u$ зависит от y , избавиться от этого ограничения не удастся.

В одномерном случае неравенства (2) и (3) рассматриваются в работе [4], где получены необходимые и достаточные условия их выполнения. В частности, пробел в работе [3] был закрыт для $n = 1$. При некоторых дополнительных ограничениях этот результат был анонсирован в [5].

В статье [6] рассматривается неравенство (2) с аналогичным функционалом в двумерном случае при дополнительном ограничении $u(\cdot, -1) \equiv 0$. Отметим, что наши условия на весовые функции слабее, чем в [6].

Статья разделена на четыре параграфа. В §2 приведены условия, необходимые для выполнения неравенства (2). В §3 приведено доказательство неравенства (2) для кусочно линейных функций u . §4 содержит доказательство неравенства в более общих случаях.

§2. УСЛОВИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА (2)

Здесь и далее мы будем ссылаться на некоторые утверждения из работы [4], доказательства которых в многомерном случае дословно совпадают с доказательствами в одномерном случае.

Кроме того, в данном параграфе мы для простоты опускаем параметры x' и v у функции a , подразумевая, что все неравенства выполняются для любых $x' \in \omega, v \in \mathbb{R}_+$. В рамках этой договоренности положим $a(x', y, v) \equiv a(y)$.

Предложение 1 ([4, Теорема 1]). **1.** Если неравенство (2) выполняется для некоторой $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u , то вес a четен по y , то есть $a(y) \equiv a(-y)$.

2. Если неравенство (2) выполняется для произвольной $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u , то вес a удовлетворяет неравенству

$$a(s) + a(t) \geq a(1 - t + s), \quad -1 \leq s \leq t \leq 1. \quad (4)$$

Замечание 1. Если функция a неотрицательна, а также четна и вогнута по первому аргументу, то она удовлетворяет условию (4). Действительно: для такой функции при любых (s, t) выполнено $a(1) - a(s) \leq a(t) - a(-1 + t - s)$. А так как $a(1) \geq 0$, то получаем $a(s) + a(t) \geq a(-1 + t - s) = a(1 - t + s)$. Обратное, вообще говоря, неверно, то есть не всякая четная неотрицательная функция, удовлетворяющая (4), вогнута.

Замечание 2. Если положить $u(\cdot, -1) \equiv 0$, то условие (4) остается необходимым для выполнения неравенства (2).

Предложение 2 ([4, Лемма 1]). Рассмотрим непрерывную функцию $a \geq 0$, заданную на $[-1, 1]$ и удовлетворяющую условию (4). Тогда для любых $-1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m \leq 1$ верно

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a(t_k) &\geq a\left(1 - \sum_{k=1}^m (-1)^k t_k\right), && \text{для четных } m, \\ \sum_{k=1}^m a(t_k) &\geq a\left(-\sum_{k=1}^m (-1)^k t_k\right), && \text{для нечетных } m. \end{aligned}$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА (2) ДЛЯ КУСОЧНО ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы докажем неравенство (2) для кусочно линейных функций.

Лемма 1. Пусть функция $a(x', \cdot, u)$ четна и удовлетворяет условию (4) для всех (x', u) . Тогда, если u — неотрицательная кусочно линейная функция, то $I(u) \geq I(u^*)$.

Доказательство. Доказательство следует схеме доказательства теоремы 2 в [4]. Пусть функция u имеет изломы на множестве $\partial\Omega \subset C \subset \Omega$. Возьмем

$$U := \{(x', u(x', y)) : y \in (-1, 1), (x', y) \notin C\}.$$

Тогда открытое множество U разбивается в объединение конечного числа связанных открытых множеств G_j . Обозначим m_j число прообразов значения $(x', u_0) \in G_j$, то есть число решений уравнения $u(x', y) = u_0$ (очевидно, это число постоянно для $(x', u_0) \in G_j$). Легко видеть, что эти прообразы являются линейными функциями $(x', u_0) : y = y_k^j(x', u_0)$, $k = 1, \dots, m_j$, и $D_n y_k^j(x', u(x', y)) = \frac{1}{D_n u(x', y)}$. Мы будем считать, что $y_1^j(x', u_0) < y_2^j(x', u_0) < \dots < y_{m_j}^j(x', u_0)$.

Уравнение $u^*(x'_0, y^*) = u_0$ задает y^* как функцию $(x'_0, u_0) \in G_j$. Ее можно выразить через y_k^j (в частности, y^* кусочно линейна):

$u(x'_0, -1) < u_0$	m_j четно	$y^* = 1 - \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j$
	m_j нечетно	$y^* = - \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j$
$u(x'_0, -1) > u_0$	m_j четно	$y^* = -1 + \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j$
	m_j нечетно	$y^* = \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j$

Отсюда ясно, что при $(x', u) \in G_j$

$$D_n y^*(x', u(x', y)) = \frac{1}{D_n u^*(x', y)} = \sum_{k=1}^{m_j} |D_n y_k^j(x', u(x', y))|$$

и $D_i u^*(x', y) = \pm \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k D_i y_k^j(x', u(x', y))$, где знак перед правой частью зависит только от j .

Тогда

$$\begin{aligned} I(u) &= \sum_{j=1}^N \int_{G_j} F(x', u(x), \|a_i(x', u(x)) D_i u(x), a(x, u(x)) D_n u(x)\|) dx \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{u(G_j)} \sum_{k=1}^{m_j} F\left(x', u, \frac{\|a_i(x', u) D_i y_k^j(x', u), a(x', y_k^j(x', u), u)\|}{|D_n y_k^j(x', u)|}\right) \\ &\quad \times |D_n y_k^j(x', u)| dx' du, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(u^*) &= \sum_{j=1}^N \int_{G_j} F(x', u^*, \|a_i(x', u^*(x)) D_i u^*(x), a(x, u^*(x)) D_n u^*(x)\|) dx \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{u(G_j)} F\left(x', u^*, \frac{\|a_i(x', u^*) D_i y^*(x', u^*), a(x', y^*(x', u^*), u^*)\|}{\sum_{k=1}^{m_j} |D_n y_k^j(x', u^*)|}\right) \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{m_j} |D_n y_k^j(x', u^*)| dx' du^*. \quad (6) \end{aligned}$$

Зафиксируем j , x' и u и обозначим $b_k = |D_n y_k^j|$, $c_{ki} = D_i y_k^j$, $c_i^* = D_i y^*$, $y_k = y_k^j(x', u)$, $y^* = y^*(x', u)$, $m = m_j$. Тогда справедлива следующая

цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m b_k F\left(\frac{\|a_i c_{ki}, a(y_k)\|}{b_k}\right) &\stackrel{a}{\geq} F\left(\frac{\sum_{k=1}^m \|a_i c_{ki}, a(y_k)\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\right) \sum_{k=1}^m b_k \\
&\stackrel{b}{=} F\left(\frac{\sum_{k=1}^m \|(-1)^k a_i c_{ki}, a(y_k)\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\right) \sum_{k=1}^m b_k \\
&\stackrel{c}{\geq} F\left(\frac{\|\sum_{k=1}^m ((-1)^k a_i c_{ki}, a(y_k))\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\right) \sum_{k=1}^m b_k \\
&= F\left(\frac{\|\sum_{k=1}^m (-1)^k a_i c_{ki}, \sum_{k=1}^m a(y_k)\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\right) \sum_{k=1}^m b_k \\
&\stackrel{d}{\geq} F\left(\frac{\|\sum_{k=1}^m (-1)^k a_i c_{ki}, a(y^*)\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\right) \sum_{k=1}^m b_k \\
&\stackrel{e}{=} F\left(\frac{\|\pm a_i \sum_{k=1}^m (-1)^k c_{ki}, a(y^*)\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\right) \sum_{k=1}^m b_k \\
&= F\left(\frac{\|a_i c_i^*, a(y^*)\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\right) \sum_{k=1}^m b_k. \quad (7)
\end{aligned}$$

Здесь в переходе (а) применено неравенство Йенсена, в переходах (b) и (e) использована четность нормы, в (c) использовано неравенство треугольника, в (d) – предложение 2 и четность веса a по y .

Из (7) видно, что подынтегральное выражение в (5) не меньше подынтегрального выражения в (6). Тем самым, доказательство завершено. \square

Замечание 3. Если $u(\cdot, -1) \equiv 0$, то утверждение леммы верно без условия четности веса. Четность используется только в переходе (d) цепочки неравенств (7), и, поскольку при $u(\cdot, -1) \equiv 0$ всегда выполнено $u(x'_0, -1) < u_0$, то предложение 2 как раз обеспечивает требуемые для перехода (d) неравенства.

§4. ПЕРЕХОД К СОБОЛЕВСКИМ ФУНКЦИЯМ

Следующие утверждения доказаны в одномерном случае в работе [4]. Доказательства в многомерном случае совершенно аналогичны.

Предложение 3 ([4, Лемма 5]). *Функционал $I(u)$ слабо полунепрерывен снизу в $W_1^1(\Omega)$.*

Предложение 4 ([4, Лемма 6]). *Пусть $A \subset W_1^1(\Omega)$. И пусть $B \subset A$ таково, что $\forall v \in B$ выполнено $I(v^*) \leq I(v)$. Предположим, что для каждого $u \in A$ найдется последовательность $u_k \in B$ такая, что $u_k \rightarrow u$ в $W_1^1(\Omega)$ и $I(u_k) \rightarrow I(u)$. Тогда $\forall u \in A$ будет выполнено $I(u^*) \leq I(u)$.*

Теорема 1. *Пусть функция $a(x', \cdot, u)$ четна и удовлетворяет условию (4) для всех x' и u . Тогда*

1. *Неравенство (2) верно для произвольной неотрицательной $u \in \text{Lip}(\Omega)$.*

2. *Предположим, что $d\omega \in \text{Lip}$ и для любых $x' \in \omega, z \in \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{R}$ функция F удовлетворяет неравенству*

$$F(x', z, p) \leq C(1 + |z|^{q^*} + |p|^q),$$

где $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, если $q < n$, либо q^* любое в противном случае. Если $q \leq n$, то дополнительно предположим, что веса a и a_i ограничены. Тогда неравенство (2) верно для произвольной неотрицательной $u \in W_q^1(\Omega)$.

Доказательство. 1. Мы можем приблизить липшицевы u кусочно линейными функциями u_k вместе с производными почти всюду. Поскольку u_k равномерно ограничены вместе с производными, то и $F(x', u_k(x), \|Du_k\|)$ равномерно ограничены. Тогда мы можем воспользоваться теоремой Лебега, получив $u_k \rightarrow u$ в $W_1^1(\Omega)$ и $I(u_k) \rightarrow I(u)$. Воспользовавшись предложением 4, получаем требуемое.

2. Рассмотрим произвольную $u \in W_q^1(\Omega)$. Для нее можно построить последовательность кусочно линейных функций u_k , приближающих ее

в $W_q^1(\Omega)$. Действительно, поскольку $\partial\Omega \in \text{Lip}$, u можно продолжить финитным образом на внутренность большого шара в \mathbb{R}^n и приблизить гладкими финитными функциями. Далее шар триангулируется, и значения функции линейно интерполируются. Очевидно, в процессе все функции остаются неотрицательными.

Тогда, ввиду предложения 4, достаточно добиться $I(u_k) \rightarrow I(u)$. Доказательство этой сходимости можно свести к теореме Красносельского о непрерывности оператора Немыцкого (см. [7, гл. 5, §17]). Однако для удобства читателя мы приводим здесь рассуждение целиком.

Покажем, что веса $a_i(x', u(x))$ и $a(x, u(x))$ ограничены. Если $q \leq n$, то это выполнено по предположению теоремы. Если же нет, то $W_q^1(\Omega)$ вкладывается в $C(\bar{\Omega})$, тем самым, $u_k(x)$ равномерно ограничены, а значит, и $a_i(x', u_k(x))$ и $a(x, u_k(x))$ равномерно ограничены. Поэтому $\|\mathcal{D}u_k(x)\| \leq C_1|\nabla u_k(x)|$. То есть,

$$F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) \leq C_2(1 + |u_k(x)|^{q^*} + |\nabla u_k(x)|^q).$$

Рассмотрим множества A_m , состоящие из $x \in \Omega$, для которых при всех $k \geq m$ выполнено $1 + |u_k(x)|^{q^*} + |\nabla u_k(x)|^q \leq 2(1 + |u(x)|^{q^*} + |\nabla u(x)|^q)$. Очевидно, что $A_m \subset A_{m+1}$. Переходя к подпоследовательности, можем считать, что $u_k \rightarrow u$ и $\nabla u_k \rightarrow \nabla u$ почти всюду. А значит $|A_m| \rightarrow |\Omega|$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{X}\{A_k\}F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) &\leq 2(1 + |u(x)|^{q^*} + |\nabla u(x)|^q), \\ \mathcal{X}\{A_k\}F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) &\rightarrow F(x', u(x), \|\mathcal{D}u(x)\|) \end{aligned}$$

почти всюду. По теореме вложения $\|u_k\|_{q^*} \leq C_3\|u_k\|_{W_q^1}$. Тем самым, мы нашли суммируемую мажоранту и получаем

$$\int_{\Omega} \mathcal{X}\{A_k\}F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) dx \rightarrow I(u)$$

по теореме Лебега.

Теперь оценим остаток:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus A_k} F(x', u_k(x), \|Du_k(x)\|) dx \\ & \leq \int_{\Omega \setminus A_k} C_2(1 + |u_k(x)|^{q^*} + |\nabla u_k(x)|^q) dx \\ & \leq C_4 \left(\int_{\Omega \setminus A_k} (1 + |u(x)|^{q^*} + |\nabla u(x)|^q) dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Omega \setminus A_k} (1 + |u(x) - u_k(x)|^{q^*} + |\nabla(u - u_k)(x)|^q) dx \right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое стремится к нулю по абсолютной непрерывности интеграла. Для второго слагаемого выполнено

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus A_k} (1 + |u(x) - u_k(x)|^{q^*} + |\nabla(u - u_k)(x)|^q) dx \\ & \leq C_5 (|\Omega \setminus A_m(k)| + \|u - u_k\|_{W_1^q}^{q^*} + \|u - u_k\|_{W_1^q}^q) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тем самым, сходимость $I(u_k) \rightarrow I(u)$ доказана. \square

Аналогично, с учетом замечаний (2) и (3), доказывается

Теорема 2. Пусть $u(\cdot, -1) \equiv 0$ и функция $a(x', \cdot, u)$ удовлетворяет условию (4) для всех x' и u . Тогда верны выводы теоремы 1.

Я признателен А. И. Назарову за постановку задачи, многочисленные ценные замечания и мотивацию. Также я признателен В. Г. Осмоловскому за замечания, позволившие улучшить текст статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Либ, М. Лосс, *Анализ*. Научная книга, Новосибирск, 276 с. (1998)
2. B. Kawohl, *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*. — Lecture notes in mathematics **1150**. Berlin; Springer Verlag, 134 p. (1985)
3. F. Brock, *Weighted Dirichlet-type inequalities for Steiner symmetrization*. — Calc. Var. and PDEs **8** (1999), 15–25.
4. S. V. Bankevich, A. I. Nazarov, *On monotonicity of some functionals under rearrangements*. — Calc. Var. and PDEs **53**, No. 3 (2015), 627–647. (<http://link.springer.com/article/10.1007/s00526-014-0761-6>)

5. С. В. Банкевич, А. И. Назаров, *Об обобщении неравенства Поля–Сеге для одномерных функционалов*. — Доклады Академии Наук **438**, No. 1 (2011), 11–13.
6. R. Landes, *Some remarks on rearrangements and functionals with non-constant density*. — Math. Nachr. **280**, No. 5–6 (2007), 560–570.
7. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*. Наука, М., 1966.

Bankevich S. V. On monotonicity of some functionals under monotone rearrangement with respect to one variable.

We consider the P]olya–Szegö inequality for monotone rearrangement with integrand dependent on the rearrangement variable. The inequality is proved for integrands having polynomial growth.

Центр алгоритмической биотехнологии,

Поступило 11 ноября 2015 г.

С.-Петербургский

государственный университет

Университетская наб. д.7-9,

С.-Петербург 199034, Россия

E-mail: Sergey.Bankevich@gmail.com