

МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 2. С. 5–15.

УДК 517.978.2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА С ИЗМЕНЕНИЕМ ДИНАМИКИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРВОГО ИГРОКА

С. Р. Алеева^{1,a}, Л. В. Галлямова^{2,b}

¹ Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

² ООО «Бодибит Система», Челябинск, Россия

^asofochka7782@mail.ru; ^bludmila-turivnenko@yandex.ru

Рассматривается однотипная игра, в которой первый игрок имеет изменение динамики и интегральное ограничение на управление, у второго игрока — геометрическое ограничение на управление и неизменяющаяся динамика. Цель первого игрока состоит в ε -поймке противника в фиксированный момент времени p при затрате минимального запаса ресурса, цель второго — избежать ε -поймки. Доказано необходимое и достаточное условие решения задачи первым игроком.

Ключевые слова: дифференциальная игра, изменение динамики, интегральное ограничение, гарантированный результат.

Введение

Из [1] известно, что линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания может быть сведена с помощью замены переменных к задаче с простым движением. При этом в новой игре вектограммы игроков в каждый момент времени гомотетичны одному и тому же выпуклому симметрическому компактному. Такой класс игр называется классом однотипных игр. Рассматривается дифференциальная игра преследования с интегральным ограничением и нарушением динамики преследователя. Интегральные ограничения на управление преследователя усложняют построение оптимального управления, так как область достижимости при таких ограничениях нелинейно зависит от потраченного запаса ресурсов. При этом трата ресурсов должна быть минимальна. Решение однотипной задачи с интегральными ограничениями сводится к экстремальной задаче. Нарушение динамики преследователя так же усложняет построение оптимального управления. В реальной ситуации при преследовании возможно возникновение различных помех, которые временно затрудняют движение либо вовсе останавливают его. На устранение поломки всегда требуется время. После чего преследователь возобновляет своё движение. Предлагается вид гарантирующих стратегий игроков. Придерживаясь такой стратегии, первый игрок может сделать расстояние между игроками в конечный момент времени не больше чем цена игры, а второй игрок — не меньше чем цена игры. Данная работа продолжает исследования, начатые в [2–4], где решалась задача о минимизации запаса ресурса для разного вида однотипных игр и задача минимизации расстояния [5].

1. Постановка задачи преследования

Первый игрок управляет движением точки x в пространстве \mathbb{R}^2 . Уравнение движения первого игрока выглядит следующим образом: $\ddot{x} = u$. Будем рассматривать игру с фиксированным моментом окончания p и одной поломкой, которая затрагивает только динамику первого игрока. Выбор момента поломки τ не зависит от первого игрока. На её ликвидацию требуется время $\sigma = \text{const}$. По истечении времени $\tau + \sigma$ динамика первого игрока восстанавливается в прежнем режиме. Тогда уравнение движения первого игрока можно записать в виде

$$\ddot{x} = u = \begin{cases} u_1(t), & t_0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau < t < T(\tau), \\ u_2(t), & T(\tau) \leq t \leq p, \end{cases}$$

где $T(\tau) = \min\{\tau + \sigma, p\}$.

Второй игрок управляет движением точки y в пространстве \mathbb{R}^2 . Уравнение движения второго игрока записывается следующим образом: $\dot{y} = v$.

Будем накладывать следующие ограничения на управления игроков:

$$\mu(t) = \mu_0 - \int_{t_0}^t \|u(r)\|^2 dr \geq 0, \quad \mu_0 > 0, \quad t_0 \leq t \leq p, \quad \|v\| \leq 1.$$

Задано число $\varepsilon > 0$. Цель первого игрока заключается в том, чтобы в заданный момент времени сделать расстояние между игроками

$$\|y(p) - x(p)\| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Второй игрок стремится не допустить выполнение неравенства (1).

1.1. Переход к однотипной игре

Рассматриваемая игра с помощью замены переменных $z = y - x - (p - t)\dot{x}$ может быть сведена к однотипной игре с фиксированным временем окончания p [1]:

$$\dot{z} = v - (p - t) \cdot \begin{cases} u_1(t), & t_0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau < t < T(\tau), \\ u_2(t), & T(\tau) \leq t \leq p, \end{cases} \quad z, u, v \in \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

$$\mu(t) = \mu_0 - \int_{t_0}^t \|u(r)\|^2 dr \geq 0, \quad \mu_0 > 0, \quad t_0 \leq t \leq p,$$

$$\|v\| \leq 1.$$

Цель (1) превращается в

$$\|z(p)\| \leq \varepsilon. \quad (3)$$

1.2. Общий вид задачи и функция цены игры

Рассмотрим игру (2) в общем виде:

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)v; \quad z, u, v \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

$$\mu(t) = \mu_0 - \int_{t_0}^t \|u(r)\|^2 dr \geq 0, \quad \mu_0 > 0, \quad t_0 \leq t \leq p,$$

$$\|v\| \leq 1.$$

Её цель — (3). В игре (4) динамики игроков до момента времени $t \leq \tau$ определяются функциями $a(t)$ и $b(t)$, а при $t > \tau$ — функциями $a_\tau(t)$ и $b_\tau(t)$. Причём $a_\tau(t) = 0$ при $\tau < t < T(\tau)$ и $a_\tau(t) = a(t)$ при $T(\tau) \leq t \leq p$, $b_\tau(t) \equiv b(t)$. Для построения решения игры определим стратегии игроков и порождаемое ими движение.

Стратегией первого игрока [2; 3] является функция вида

$$u = \varphi(t)w(t, z), \quad (5)$$

где $w(t, z)$ — любая функция, удовлетворяющая равенству

$$\|w(t, z)\| = 1.$$

Функция $\varphi \in L_2[t, p]$ неотрицательна, строится в зависимости от начального состояния t_0, z_0, μ_0 и удовлетворяет неравенству

$$\int_{t_0}^p \varphi^2(t) dt \leq \mu_0.$$

Стратегия второго игрока [2; 3] — любая функция $v(t, z)$, удовлетворяющая неравенству

$$\|v(t, z)\| \leq 1. \quad (6)$$

Зафиксируем начальный момент времени $t_0 < p$ и возьмём разбиение

$$\omega : t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_{k+1} = p.$$

Для начального состояния $z(t_0) = z_0, \mu(t_0) = \mu_0$ и для выбранных стратегий построим ломаную

$$\begin{aligned} z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \left(\int_{t_i}^t a(r)\varphi(r) dr \right) \cdot w(t_i, z_\omega(t_i)) + \\ + \left(\int_{t_i}^t b(r) dr \right) \cdot v(t_i, z_\omega(t_i)), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Семейство функций $\|z_\omega(t)\|$ на отрезке $[t_0, p]$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. По теореме Арцела [6] из любой последовательности можно выделить равномерно сходящуюся на отрезке $[t_0, p]$ подпоследовательность.

Под реализацией значений $\|\cdot\|$ на движении, порождённом управлениями (5) и (6), понимаем любую функцию, которая является равномерным пределом на отрезке $[t_0, p]$ последовательности функций $\|z_{\omega_n}(t)\|$. Здесь $\|z_{\omega_n}(t)\|$ — последовательность ломаных (7) с диаметром разбиения $d_{\omega_n} = \max_{1 \leq i \leq k_n} (t_{i+1} - t_i)$, стремящимся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Пусть в момент поломки τ реализовалось состояние $z(\tau)$, примем его за начальное. Тогда в соответствии с [2] можно записать величину, на которую может рассчитывать первый игрок:

$$\begin{aligned} G(\tau, z(\tau), \varphi(\cdot)) = \max\{f_2(\tau, \varphi(\cdot)), \|z(\tau)\| + f_1(\tau, \varphi(\cdot))\}, \\ f_1(\theta, \varphi(\cdot)) = \int_\theta^p (b_\tau(r) - a_\tau(r)\varphi(r)) dr; \quad f_2(\tau, \varphi(\cdot)) = \max_{\tau \leq \theta \leq p} f_1(\theta, \varphi(\cdot)). \end{aligned} \quad (8)$$

Если выбор момента поломки τ не зависит от первого игрока, то он может рассчитывать на величину, равную

$$\max_{t_0 \leq t \leq p} \max\{f_2(t, \varphi(\cdot)), \|z(t)\| + f_1(t, \varphi(\cdot))\}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} G_*(t_0, z_0, \varphi(\cdot)) &= \max\{F(t_0, \varphi(\cdot)), \|z_0\| + f(t_0, \varphi(\cdot))\}, \\ f(t, \varphi(\cdot)) &= \max_{t \leq \tau \leq p} \left\{ \int_t^\tau (b(r) - a(r)\varphi(r))dr + f_1(\tau, \varphi(\cdot)) \right\}, \\ F(t, \varphi(\cdot)) &= \max_{t \leq \theta \leq p} \max\{f_2(\theta, \varphi(\cdot)), f(\theta, \varphi(\cdot))\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$G(t_0, z_0, \mu_0) = \inf_{\varphi(\cdot)} G_*(t_0, z_0, \varphi(\cdot)), \quad \varphi(t) \geq 0, \quad \int_{t_0}^p \varphi^2(t)dt \leq \mu_0. \quad (10)$$

Так же как и в [2], показывается, что G из (10) является ценой игры (4).

Для начального состояния t_0, z_0, μ_0 обозначим через $\varphi_0(t)$ решение задачи (10), положим

$$\begin{aligned} w(z) &= z/\|z\| \text{ при } z \neq 0; \\ w(0) &= s, \quad \forall s : \|s\| = 1. \end{aligned}$$

Гарантирующее выполнение цели управление первого игрока имеет вид

$$u = \varphi_0(t)w(z). \quad (11)$$

Гарантирующее выполнение цели управление второго игрока имеет вид

$$v(t, z) = w(z). \quad (12)$$

Обозначим $L(\tau) = \max_{T(\tau) \leq \theta \leq p} \int_\theta^p (b(r) - a(r)\varphi(r))dr$, $A(t) = \max_{t \leq \tau \leq p} \int_\tau^{T(\tau)} a(r)\varphi(r)dr$.

Тогда

$$\begin{aligned} f_1(\tau, \varphi(\cdot)) &= \int_\tau^p (b(r) - a(r)\varphi(r))dr + \int_\tau^{T(\tau)} a(r)\varphi(r)dr, \\ f_2(\tau, \varphi(\cdot)) &= \max_{\tau \leq \theta \leq p} \int_\theta^p (b(r) - a(r)\varphi(r))dr = \\ &= \max \left\{ \max_{\tau \leq \theta \leq T(\tau)} \int_\theta^p b(r)dr - \int_{T(\tau)}^p a(r)\varphi(r)dr, \max_{T(\tau) \leq \theta \leq p} \int_\theta^p (b(r) - a(r)\varphi(r))dr \right\} = \\ &= \max \left\{ \int_\tau^p (b(r) - a(r)\varphi(r))dr + \int_\tau^{T(\tau)} a(r)\varphi(r)dr, L(\tau) \right\}, \\ f(t, \varphi(\cdot)) &= \int_t^p (b(r) - a(r)\varphi(r))dr + A(t); \\ F(t, \varphi(\cdot)) &= \max_{t \leq \tau \leq p} \max \left\{ \int_t^p (b(r) - a(r)\varphi(r))dr + A(t), \right. \\ &\max \left. \left\{ \int_\tau^p (b(r) - a(r)\varphi(r))dr + \int_\tau^{T(\tau)} a(r)\varphi(r)dr, L(\tau) \right\} \right\} = \\ &= \max_{t \leq \tau \leq p} \max \left\{ \int_\tau^p (b(r) - a(r)\varphi(r))dr + A(t), L(\tau) \right\} = \\ &= \max \left\{ \max_{t \leq \tau \leq p} \left\{ \int_\tau^p (b(r) - a(r)\varphi(r))dr + A(t) \right\}, \max_{t \leq \tau \leq p} L(\tau) \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\max_{t \leq \tau \leq p} L(\tau) \leq \max_{t \leq \tau \leq p} \int_\tau^p (b(r) - a(r)\varphi(r))dr$ и $A(t) \geq 0$, получим

$$F(t, \varphi(\cdot)) = \max_{t \leq \tau \leq p} f(t, \varphi(\cdot)).$$

2. Задача о минимизации запаса ресурсов

Зафиксируем число $\varepsilon \geq 0$ и рассмотрим задачу, когда цель первого игрока заключается в минимизации интеграла

$$\int_{t_0}^p \varphi^2(t) dt \rightarrow \min$$

при условии осуществления неравенства

$$\|z(p)\| \leq \varepsilon. \quad (13)$$

Для этого рассмотрим сначала следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^p \varphi^2(t) dt \rightarrow \min, \quad \varphi(t) \geq 0, \quad \varphi(\cdot) \in L_2[t_0, p], \\ \max_{t_0 \leq t \leq p} \left\{ \int_t^p (b(r) - a(r)\varphi(r)) dr + A(t) \right\} \leq \varepsilon, \\ \int_{t_0}^p (b(r) - a(r)\varphi(r)) dr + A(t_0) + \|z_0\| \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (14)$$

Существует такое число $t(\varepsilon)$, что

$$\int_t^p b(r) dr - \varepsilon > 0 \quad \text{при } t_0 \leq t < t(\varepsilon); \quad \int_t^p b(r) dr - \varepsilon \leq 0 \quad \text{при } t(\varepsilon) \leq t \leq p. \quad (15)$$

Теорема 1. Пусть существуют число $\nu \geq 0$, неубывающая на отрезке $[t_0, \tau]$ функция $\psi_1(t)$, $\psi_1(t_0) = 0$, неубывающая на отрезке $[T(\tau), p]$ функция $\psi_2(t)$ и выполнены следующие условия:

$$\int_t^p (b(r) - a(r)\varphi(r)) dr + A(t) \leq \varepsilon, \quad t_0 \leq t \leq p, \quad (16)$$

$$\int_{t_0}^p (b(t) - a(t)\varphi(t)) dt + A(t_0) + \|z_0\| \leq \varepsilon, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\tau} \psi_1(t) (b(t) - a(t)\varphi(t)) dt + \int_{T(\tau)}^p \psi_2(t) (b(t) - a(t)\varphi(t)) dt = \\ = (\psi_1(\tau) + \psi_2(p))\varepsilon, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\nu \left(\int_{t_0}^p (b(t) - a(t)\varphi(t)) dt + A(t_0) + \|z_0\| - \varepsilon \right) = 0. \quad (19)$$

Тогда и только тогда функция

$$\varphi_*(t) = \begin{cases} \frac{a(t)}{2}(\nu + \psi_1(t)), & t_0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \tau < t < T(\tau); \\ \frac{a(t)}{2}(\nu + \psi_2(t)), & T(\tau) \leq t \leq p, \end{cases} \quad (20)$$

является решением задачи (14).

Доказательство. Необходимость. Возьмём последовательность разбиений

$$\omega_n : t_0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < \tau = t_l^{(n)} < \dots < T(\tau) = t_j^{(n)} < \dots < t_{k_n}^{(n)} < t_{k_n+1}^{(n)} = p,$$

диаметры разбиения которых стремятся к нулю и каждая точка разбиения ω_n является точкой разбиения ω_{n+1} . Рассмотрим оптимизационную задачу

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^p \varphi^2(t) dt &\rightarrow \min, \quad \varphi(t) \geq 0, \quad \varphi(\cdot) \in L_2[t_0, p], \\ \int_{t_i^{(n)}}^p (b(t) - a(t)\varphi(t)) dt + A(t_i^{(n)}) - \varepsilon &\leq 0, \quad i = 0, \dots, k_n, \\ \int_{t_0}^p (b(t) - a(t)\varphi(t)) dt - \varepsilon + A(t_0) + \|z_0\| - \varepsilon &\leq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Эта задача имеет решение, которое обозначим $\varphi_n(t)$. Зафиксируем числа $\nu_*^{(n)}$, $\nu^{(n)}$, $\nu_0^{(n)}$, \dots , $\nu_{k_n}^{(n)}$ и составим функцию Лагранжа для задачи (21)

$$\begin{aligned} L(\varphi(\cdot)) &= \nu_*^{(n)} \int_{t_0}^p \varphi^2(t) dt + \nu^{(n)} \left(\int_{t_0}^p (b(t) - a(t)\varphi_n(t)) dt - A(t_0) + \|z_0\| - \varepsilon \right) + \\ &+ \sum_{i=0}^{l-1} \nu_i^{(n)} \left(\int_{t_i^{(n)}}^{\tau} (b(t) - a(t)\varphi_n(t)) dt - \varepsilon \right) + \sum_{i=l}^{j-1} \nu_i^{(n)} \left(\int_{t_i^{(n)}}^{T(\tau)} (b(t) - a(t)\varphi(t)) dt + \right. \\ &\left. + \max_{t_i^{(n)} \leq \tau \leq p} \int_{\tau}^{T(\tau)} a(t)\varphi_n(t) dr - \varepsilon \right) + \sum_{i=j}^{k_n} \nu_i^{(n)} \left(\int_{t_i^{(n)}}^p (b(t) - a(t)\varphi_n(t)) dt - \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Введём в рассмотрение функцию

$$\psi_n(t) = \begin{cases} 0, & t_0 = t, \\ \nu_0^{(n)}, & t_0^{(n)} < t \leq t_1^{(n)}, \\ \nu_0^{(n)} + \nu_1^{(n)}, & t_1^{(n)} < t \leq t_2^{(n)}, \\ \dots & \dots \\ \nu_0^{(n)} + \nu_1^{(n)} + \dots + \nu_{l-1}^{(n)}, & t_{l-1}^{(n)} < t \leq t_l^{(n)} = \tau, \\ 0, & \tau = t_l^{(n)} < t < t_j^{(n)} = T(\tau), \\ \nu_j^{(n)}, & T(\tau) = t_j^{(n)} \leq t \leq t_{j+1}^{(n)}, \\ \nu_j^{(n)} + \nu_{j+1}^{(n)}, & t_{j+1}^{(n)} \leq t \leq t_{j+2}^{(n)}, \\ \dots & \dots \\ \nu_j^{(n)} + \nu_{j+1}^{(n)} + \dots + \nu_{k_n}^{(n)}, & t_{k_n}^{(n)} < t \leq p. \end{cases} \quad (23)$$

Эту функцию можно переписать в виде

$$\psi_n(t) = \begin{cases} \psi_{1n}(t), & t_0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau < t < T(\tau), \\ \psi_{2n}(t), & T(\tau) \leq t \leq p. \end{cases} \quad (24)$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{l-1} \nu_i^{(n)} \left(\int_{t_i^{(n)}}^{\tau} (b(t) - a(t)\varphi_n(t)) dt - \varepsilon \right) = \int_{t_0}^{\tau} \psi_{1n}(t)(b(t) - a(t)\varphi(t)) dt - \psi_{1n}(\tau)\varepsilon, \quad (25)$$

$$\sum_{i=0}^{k_n} \nu_i^{(n)} \left(\int_{t_i^{(n)}}^p (b(t) - a(t)\varphi_n(t)) dt - \varepsilon \right) = \int_{T(\tau)}^p \psi_{2n}(t)(b(t) - a(t)\varphi(t)) dt - \psi_{2n}(\tau)\varepsilon. \quad (26)$$

С помощью этих равенств выделим в функции Лагранжа (22) слагаемые, содержащие функцию $\varphi_n(t)$:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{\tau} [(\nu_*^{(n)} \varphi_n^2(t) - a(t)(\nu^{(n)} + \psi_{1n}(t))\varphi_n(t))] dt + \int_{\tau}^{T(\tau)} \nu_*^{(n)} \varphi_n^2(t) dt + \\ & + \int_{T(\tau)}^p [(\nu_*^{(n)} \varphi_n^2(t) - a(t)(\nu^{(n)} + \psi_{2n}(t))\varphi_n(t))] dt. \end{aligned} \quad (27)$$

Задача (21) является задачей выпуклого программирования. По теореме Куна — Таккера [7] существует ненулевой набор чисел

$$\nu_*^{(n)} \geq 0, \nu^{(n)} \geq 0, \nu_0^{(n)} \geq 0, \dots, \nu_{k_n}^{(n)} \geq 0, \quad (28)$$

такой, что выполнены условия дополняющей нежёсткости

$$\nu^{(n)} \left(\int_{t_0}^p (b(t) - a(t)\varphi_n(t)) dt + A(t_0) + \|z_0\| - \varepsilon \right) = 0, \quad (29)$$

$$\nu_i^{(n)} \left(\int_{t_i^{(n)}}^p (b(t) - a(t)\varphi_n(t)) dt + A(t_0) - \varepsilon \right) = 0, \quad i = 0, \dots, k_n, \quad (30)$$

и условие минимума функции Лагранжа

$$L(\varphi_n(\cdot)) \leq L(\varphi(\cdot)) \quad \forall \varphi(t) \geq 0.$$

Минимизируя для каждого промежутка времени по $\varphi_n(t) \geq 0$ подынтегральные выражения в (27), находим, что

$$\begin{aligned} 2\nu_*^{(n)} \varphi_n(t) &= a(t)(\nu^{(n)} + \psi_{1n}(t)), \quad t_0 \leq t \leq \tau; \\ 2\nu_*^{(n)} \varphi_n(t) &= 0, \quad \tau < t < T(\tau); \\ 2\nu_*^{(n)} \varphi_n(t) &= a(t)(\nu^{(n)} + \psi_{2n}(t)), \quad T(\tau) \leq t \leq p. \end{aligned} \quad (31)$$

Допустим, что $\nu_*^{(n)} = 0$. Так как функция $a(t)$ может на указанных отрезках обращаться в нуль только на множестве нулевой меры, то из формул (23), (28), (31) получим, что все числа (28) равны нулю. Этого быть не может. Положим $\nu_*^{(n)} = 1$. Тогда из формул (31) получим

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{a(t)}{2}(\nu + \psi_{1n}(t)), & t_0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \tau < t < T(\tau); \\ \frac{a(t)}{2}(\nu + \psi_{2n}(t)), & T(\tau) \leq t \leq p. \end{cases} \quad (32)$$

Покажем, что $\nu^{(n)} + \psi_{2n}(p) > 0$. Допустим, что рассматриваемая сумма равна нулю. Тогда из формул (23) и (28) следует, что $\nu^{(n)} + \psi_{2n}(t) = 0$ при $t_0 \leq t \leq p$. Следовательно, $\varphi_n(t) = 0$ при $t_0 \leq t \leq p$. Подставим эту функцию в последнюю связь (21). Получим неравенство, которое противоречит (15). Из доказанного неравенства и из формулы (23) вытекает, что $\nu^{(n)} + \psi_{2n}(t) > 0$ при $t_{k_n}^{(n)} < t \leq p$. Следовательно, учитывая определение числа $t(\varepsilon)$ (15), получим, что

$$\int_t^p (b(r) - a(r)\varphi_n(r)) dr - \varepsilon < 0, \quad \text{при } t(\varepsilon) < t \leq p.$$

Зафиксируем число $q \in (t(\varepsilon), p)$. Тогда из условия дополняющей нежёсткости (30) следует, что $\nu_i^{(n)} = 0$ для номеров $i = m, m+1, \dots, k_n$, где $t(\varepsilon) < t_m^{(n)} <$

$q < t_{m+1}^{(n)}$. Поэтому из формулы (23) получим, что $\psi_n(t) = \psi_n(p)$ при $q \leq t \leq p$. Следовательно, учитывая формулу (32), будем иметь

$$\left(\frac{\nu^{(n)} + \psi_{2n}(p)}{2} \right)^2 \int_q^p a^2(t) dt \leq \int_{t_0}^p \varphi_n^2(t) dt \leq \int_{t_0}^p \varphi_*^2(t) dt.$$

Здесь учтено, что оптимальное значение целевого функционала в задаче (21) не превосходит оптимального значения целевого функционала в задаче (14).

Из предыдущего неравенства получим, что начиная с какого-то номера все числа $\nu^{(n)}$, $\psi_{1n}(\tau)$ и $\psi_{2n}(p)$ ограничены сверху одним и тем же числом. Согласно второй теореме Хелли [8] из последовательности функций $\psi_{2n}(t)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке отрезка $[T(\tau), p]$ к некоторой функции $\psi_2(t)$, из последовательности функций $\psi_{1n}(t)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке отрезка $[t_0, \tau]$ к некоторой функции $\psi_1(t)$. Из ограниченности последовательности чисел $\nu^{(n)}$ следует, что из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не вводя новых обозначений, считаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{1n}(t) = \psi_1(t); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{2n}(t) = \psi_2(t); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \nu^{(n)} = \nu. \quad (33)$$

Отметим, что функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ не убывают, $\psi(t_0) = 0$ и число $\nu \geq 0$. Из формулы (32) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi_*(t). \quad (34)$$

Последовательность функций $a(t)\varphi_n(t)$ ограничена суммируемой на отрезке $[t_0, p]$ функцией $Ma^l(t)$, где M — некоторое число. Применяя к неравенствам (21) теорему Лебега [8] и учитывая, что диаметр разбиений ω_n стремится к нулю, получим, что предельная функция (34) удовлетворяет связям в задаче (14). Следовательно, функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ и число ν (33) удовлетворяют неравенствам (16) и (17). Перейдём к пределу в равенстве (29). Получим для функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ и числа ν (33) равенство (19). Просуммируем равенства (29) и учтём вид функции (23). Тогда согласно формулам (25) и (26) получим, что

$$\int_{t_0}^{\tau} \psi_{1n}(t)(b(t) - a(t)\varphi_n(t)) dt + \int_{T(\tau)}^p \psi_{2n}(t)(b(t) - a(t)\varphi_n(t)) dt - \psi_{1n}(\tau)\varepsilon - \psi_n(p)\varepsilon = 0.$$

Перейдём в этом равенстве к пределу. Получим, что функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ из (33) удовлетворяют равенству (18). Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Запишем функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L(\varphi(\cdot)) &= \int_{t_0}^{\tau} (\varphi^2(t) + (\nu + \psi_1(t))(b(t) - a(t)\varphi(t))) dt + \\ &+ \int_{\tau}^{T(\tau)} (\varphi^2(t) + \nu(b(t) - a(t)\varphi(t) + a(t)\varphi(t))) dt + \\ &+ \int_{T(\tau)}^p (\varphi^2(t) + (\nu + \psi_2(t))(b(t) - a(t)\varphi(t))) dt - \\ &- (\psi_1(\tau) + \psi_2(p))\varepsilon + \nu(\|z_0\| - \varepsilon). \end{aligned}$$

Минимум этой функции Лагранжа по всем функциям $\varphi(\cdot) \in L_2[t_0, p]$, $\varphi(t) \geq 0$, достигается на функции (20). Согласно равенствам (16) и (17) функция (20) удовлетворяет связям в задаче (14). Возьмём любую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую

связям в задаче (14), и рассмотрим функцию

$$\psi_n(t) = \begin{cases} \psi_1(t), & t_0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \tau < t < T(\tau); \\ \psi_2(t), & T(\tau) \leq t \leq p. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{\tau} \psi_1(t)(b(t) - a(t)\varphi(t))dt + \int_{T(\tau)}^p \psi_2(t)(b(t) - a(t)\varphi(t))dt = \\ & = \int_{t_0}^p \psi(t)(b(t) - a(t)\varphi(t))dt, \quad \psi_1(\tau) + \psi_2(p) = \psi(\tau) + \psi(p). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{\tau} \psi_1(t)(b(t) - a(t)\varphi(t))dt + \int_{T(\tau)}^p \psi_2(t)(b(t) - a(t)\varphi(t))dt - (\psi_1(\tau) + \psi_2(p))\varepsilon = \\ & = \int_{t_0}^p \psi(t)(b(t) - a(t)\varphi(t))dt - (\psi(\tau) + \psi(p))\varepsilon = \\ & = \left[\int_{t_0}^p \psi(t)(b(t) - a(t)\varphi(t))dt - \psi(p)\varepsilon \right] - \psi(\tau)\varepsilon. \end{aligned}$$

Используя формулу интегрирования по частям в интеграле Римана — Стильтьеса [9], будем иметь

$$\begin{aligned} & \left[\int_{t_0}^p \psi(t)(b(t) - a(t)\varphi(t))dt - \psi(p)\varepsilon \right] - \psi(\tau)\varepsilon = \\ & = \int_{t_0}^p \left(\int_t^p (b(r) - a(r)\varphi(r))dr - \varepsilon \right) d\psi(t) + (-\psi(\tau)\varepsilon) \leq 0. \end{aligned}$$

Так как $A(t) \geq 0$, условие (16) можно переписать в виде

$$\int_t^p (b(r) - a(r)\varphi(r))dr - \varepsilon \leq \int_t^p (b(r) - a(r)\varphi(r))dr + A(t) - \varepsilon \leq 0$$

и $(-\psi(\tau)\varepsilon) \leq 0$. Следовательно,

$$\int_{t_0}^p \varphi_*^2(t)dt = L(\varphi_*(\cdot)) \leq L(\varphi(\cdot)) \leq \int_{t_0}^p \varphi^2(t)dt.$$

Это неравенство доказывает теорему. □

Список литературы

1. **Красовский, Н. Н.** Позиционные дифференциальные игры / Н. Н. Красовский, А. И. Субботин. — М. : Наука, 1974. — 456 с.
2. **Алеева, С. Р.** Однотипная игра с интегральным ограничением первого игрока / С. Р. Алеева, В. И. Ухоботов // Вестн. Челяб. гос. ун-та. — 1999. — № 1 (4). Сер. 3: Математика. Механика. — С. 16–29.
3. **Алеева, С. Р.** Моделирование гарантированного результата в задачах управления движением с интегральными ограничениями в условиях воздействия помех : дис. . . . канд. физ.-мат. наук / С. Р. Алеева. — Челябинск, 2002. — 145 с.

4. Алеева, С. Р. Об одной дифференциальной игре с интегральным ограничением / С. Р. Алеева // Математика. Механика. Информатика : материалы Всерос. науч. конф., Челябинск, 19–22 сент. 2006 г. / отв. ред. С. В. Матвеев. — Челябинск : Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2007. — С. 7–13.
5. Алеева, С. Р. Гарантированный результат в задаче минимизации расстояния с интегральным ограничением / С. Р. Алеева // Вестн. Челяб. гос. ун-та. — 2012. — № 26 (280). Математика. Механика. Информатика. Вып. 15. — С. 41–48.
6. Люстерник, А. А. Элементы функционального анализа / А. А. Люстерник, В. И. Соболев. — М. : Наука, 1965. — 520 с.
7. Иоффе, А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 480 с.
8. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1972. — 496 с.
9. Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. — М. : Мир, 1979. — 289 с.

Поступила в редакцию 26.04.2016

После переработки 05.06.2016

Сведения об авторах

Алеева Сюзанна Рифхатовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: sofochka7782@mail.ru.

Галлямова Людмила Владимировна, ООО «Бодибит Система», Челябинск, Россия; e-mail: ludmila-turivnenko@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 2. P. 5–15.

DIFFERENTIAL GAME WITH A CHANGE OF DYNAMICS AND CONTROL INTEGRAL CONSTRAINT OF THE FIRST PLAYER

S.R. Aleeva^{1,a}, L.V. Galljamova^{2,b}

¹*Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*

²*ООО "Bodibit Sistema", Chelyabinsk, Russia*

^a*sofochka7782@mail.ru*; ^b*ludmila-turivnenko@yandex.ru*

The one-type game is considered in which the first player has a change of the dynamics and an integral constraint on the control, and the second one has a geometrical constraint. The purpose of the first player is the ε -capture of the enemy at a fixed time p with a minimum expenditure of reserve resources, the goal of the second one is opposite. A necessary and sufficient condition for the solving of the problem by the first player is found.

Keywords: *differential game, change of dynamics, integral constraint, guaranteed result.*

References

1. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Positional differential games]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 456 p. (In Russ.).

2. **Aleeva S.R., Ukhobotov V.I.** Odnotipnaya igra s integral'nym ogranicheniem pervogo igroka [The one-type game with an integral constraint of the first player]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. 3: Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Chelyabinsk State University. Ser. 3: Mathematics. Mechanics], 1999, no. 1 (4), pp. 16–29. (In Russ.).
3. **Aleeva S.R.** *Modelirovanie garantirovannogo rezul'tata v zadachakh upravleniya dvizheniem s integral'nymi ogranicheniyami v usloviyakh vozdeystviya pomekh* [Modelling of the guaranteed result in traffic control problems with integral constraints in terms of interference effects. Thesis]. Chelyabinsk, 2002. 145 p. (In Russ.).
4. **Aleeva S.R.** Ob odnoy differentsial'noy igre s integral'nym ogranicheniem [On a differential game with integral constraint]. *Matematika. Mekhanika. Informatika: Materialy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii* [Mathematics. Mechanics. Informatics: Proceedings of All-Russian Scientific Conference], Chelyabinsk, 19–22 September 2006, S.V. Matveev (ed.). Chelyabinsk, Chelyabinsk State University Publ., 2007. Pp. 7–13. (In Russ.).
5. **Aleeva S.R.** Garantirovannyi rezul'tat v zadache minimizatsii rasstoyaniya s integral'nym ogranicheniem [Guaranteed result in the problem of minimizing of the distance with integral constraint]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta*. [Bulletin of Chelyabinsk State University], 2012, no. 26 (280), pp. 41–48. (In Russ.).
6. **Lyusternik A.A., Sobolev V.I.** *Elementy funktsional'nogo analiza* [Elements of functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 520 p. (In Russ.).
7. **Ioffe A.D., Tihomirov V.M.** *Teoriya ekstremal'nykh zadach* [The theory of extreme problems]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 480 p. (In Russ.).
8. **Kolmogorov A.N., Fomin S.V.** *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 496 p. (In Russ.).
9. **Riss F., Syokefal'vi-Nad' B.** *Lektsii po funktsional'nomu analizu* [Lectures on functional analysis]. Moscow, Mir Publ., 1979. 289 p. (In Russ.).

Accepted article received 26.04.2016

Corrections received 05.06.2016