ОБСУЖДЕНИЕ „АКСИОМ“ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С СОСТАВНЫМИ ЧАСТИЦАМИ [1])

Р. Хааг

§ 1. Введение

В предыдущих обзорах [2]) с достаточной ясностью было показано, что в настоящее время мы располагаем в основном двумя различными методами для попыток исследования проблем квантовой теории поля.

Один способ подхода к вопросу — обзор Челлена [1] — является характерным примером и состоит в том, чтобы исходить из некоторой почти законченной теории (или модели). Все принадлежности (перестановочные соотношения, уравнения движения и т. д.) даются с самого начала в явном виде. Но для того, чтобы записать фундаментальные уравнения, необходимо прибегать к математическим операциям, которые могут быть определены лишь a posteriori с помощью надлежащего предельного перехода. Проблема здесь состоит или в нахождении точных определений этих операций, придающих какой-то смысл физическим предсказаниям теории, или же в доказательстве того, что такие определения не могут быть даны (если быть настроенными менее оптимистично).

Другой метод был назван А. С. Уайтманом «аксиоматическим». Он его разобрал в деталях в своем обзоре [3]), открывающем коллоквиум. Этот метод основывается на следующей идее: поскольку понятие квантовой релятивистской теории взаимодействующих частиц не противоречиво само по себе, представляется целесообразным исходить из общей системы фундаментальных принципов и, все сильнее ограничивая математическую структуру теории, отыскать ее «невралгические» моменты.

Два года тому назад использование того или другого метода казалось как бы вопросом идеологии, и каждая из двух партий была достаточно убеждена в бесполезности методов другой. Сегодня сфера взаимного понимания существует: это — изучение «пропагаторов» и связанных с ними функций теории поля. Более того, приверженцы обеих идеологий работают совместно и в согласии, о чем свидетельствует сообщение Челлена.

Тем не менее обсуждение, которое я намереваюсь развить, будет посвящено исключительно второму методу, т. е. аксиоматическому, или, точнее говоря, формулировке системы условий или аксиом, характеризующих класс теорий, которые мы желаем изучать. Уайтман в третьей части своего доклада попытался полно и точно сформулировать условия, которые ныне рассматриваются как существенные свойства локальной квантовой теории поля. Быть может, полезно подчеркнуть, что эти аксиомы достаточны для обеспечения любой модели, удовлетворяющей им, разумной физической интерпретацией. Обратное, однако, неверно,

---

[1]) Haag R., Discussion des „axiomes“ et des propriétés asymptotiques d'une théorie des champs locale avec particules composées, в сб. Colloques Internationaux au Lille, Juin 1957, Paris, 1959, p. 151—162.

[2]) Речь идет об обзорах, представленных на Лилльском коллоквиуме (июнь 1957). — *Прим. перев.*

[3]) Здесь и далее имеется в виду обзор Уайтмана, перевод которого помещен в настоящем сборнике, стр. 96—133. — *Прим. ред.*

так как данные аксиомы более ограничительны, чем следует. Этот недостаток аксиоматики весьма существен, так как может оказаться, что ни одна нетривиальная физическая модель не совместима с этими аксиомами.

Если рассмотреть систему аксиом, указанных Уайтманом, то можно установить, что они разбиваются на две категории. Первая, состоящая из аксиом I, II, III, имеет дело лишь с математической структурой величин, используемых в теории. Физическая интерпретация возникает из соотношений между фундаментальными величинами, определенными математически с помощью аксиом I, II, III, и из асимптотической конфигурации частиц, заданных физически. Эта связь устанавливается уравнениями (34) Уайтмана (см. стр. 111).

Такая операция возможна, если на фундаментальные величины наложить дополнительные математические условия. В этом состоит содержание аксиомы IV: IV,а требует существования пределов в левых частях уравнений (34), IV,б уточняет свойства этих пределов, требуя, чтобы они были физически приемлемыми; это необходимо, в сущности, для обеспечения свойств унитарности и инвариантности S-матрицы.

Предшествующие обсуждения показали исключительную сложность структуры аксиомы IV. Образно выражаясь, можно сказать, что кучу мусора вымели к входной двери, а затем забросили в угол аксиомы IV. Конечно, нельзя осуждать Уайтмана: ему никогда не нравилось присоединять к аксиоматике асимптотические условия, и для него самого это лишь предварительный и в конце концов неудовлетворительный этап.

Имеются и другие аргументы против этой схемы:

1) Асимптотические условия не были сформулированы применительно к теории поля, описывающей также и составные частицы. Подобная формулировка не представляется невозможной [1]), но тогда следовало бы ввести разграничение между различными категориями теорий, так что общая формулировка стала бы довольно громоздкой.

2) С точки зрения физической интерпретации предыдущая схема выступает как чистая теория S-матрицы. С другой стороны, заданной S-матрице соответствует бесконечно много теорий поля, которые все обладают свойством «интерполирования» этой S-матрицы в смысле асимптотического условия (см. [2] и [3]). Для выбора теории нужна, таким образом, физическая интерпретация более ограничительная, чем предыдущая.

В силу этих соображений, мы попытаемся дать другую физическую интерпретацию. Вместо аксиомы IV мы наложим другие условия, которые нам представляются более фундаментальными. Из них можно будет вывести содержание аксиомы IV. С практической точки зрения главным преимуществом этой формулировки является то, что она содержит также случай теорий с составными частицами; при этом не возникает никаких осложнений. Таким образом, решается вопрос, поставленный в конце § 3 обзора Уайтмана: каким образом можно выразить, например, падающее дейтронное поле в терминах нуклонного и мезонного полей [2]).

Для того чтобы сделать обсуждение по возможности более ясным, мы ограничимся примером теории с одним нейтральным скалярным

---

[1]) Одна идея, возможно плодотворная, была предложена В. Циммерманом (не опубликовано).

[2]) Эти вопросы были исследованы в [4] и в последующих работах. В них автор пользуется эвристическим приемом в терминах графов. Экстейн (см. [5]) также предложил некоторый метод, очень близкий к нашему, для исследования проблем, связанных с составными частицами в теории поля.

полем. К сожалению, я не способен провести обсуждение на высоком уровне математической точности.

§ 2. Терминология

Изложим снова аксиомы I, II, III Уайтмана на нашем собственном языке.

I. Предположим, что каждой точке x пространства — времени сопоставлена алгебраическая величина $A(x)$. Рассмотрим кольцо $\mathscr{R}$, построенное с помощью этих величин $A(x)$. Это значит, что мы рассматриваем формальные произведения $A(x_1)\ldots A(x_n)$, формальные суммы $\int f(x_1,\ldots,x_n)A(x_1)\ldots A(x_n)\,dx_1\ldots dx_n$, где весовые функции f принадлежат классу функций, определенному надлежащим образом (ср. с изложением Уайтмана). Определим также единичный элемент E и построим формальные полиномы вида

$$f^{(0)}E+\int f^{(1)}(x)\,A(x)\,dx+\int f^{(2)}(x,y)\,A(x)\,A(y)\,dxdy+\ldots .$$

Эти полиномы являются элементами $\mathscr{R}$.

Элемент z^+, сопряженный элементу z кольца $\mathscr{R}$, определяется как полином, получающийся заменой весовых функций $f^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)$ на $f^{(n)*}(x_1,\ldots,x_n)$, где символ $*$ означает комплексное сопряжение. Поскольку сопряженный оператор определен, $\mathscr{R}$ является кольцом с инволюцией.

Алгебраическая структура $\mathscr{R}$ подчиняется, кроме того, следующим условиям.

II. Каждому элементу $L=(a,\Lambda)$ неоднородной группы Лоренца сопоставляется элемент $U(L)$ в кольце $\mathscr{R}$, такой, что

$$U(L_1)\cdot U(L_2)=U(L_1\cdot L_2). \tag{1}$$

В этом равенстве слева стоит операция умножения в $\mathscr{R}$, а справа, в скобках, умножение из неоднородной группы Лоренца. Соотношение

$$U(L)\cdot A(x)U^{-1}(L)=A(Lx) \tag{2}$$

выражает трансформационное свойство поля (символически).

III (локальная коммутативность). Символически

$$[A(x),\ A(y)]=0 \text{ при } (x-y)^2>0. \tag{3}$$

IV („причинность"). Рассмотрим множество операторов $A(x)$, соответствующих множеству точек x, временна́я координата которых заключается между t и $t+\delta$. Кольцо, построенное на этом множестве операторов, обозначим через $\mathscr{R}_{t,\delta}$. Предположим, что

$$\mathscr{R}_{t,\delta}=\mathscr{R} \tag{4}$$

для произвольного t и δ достаточно малого, но конечного. Это требование влечет за собой существование уравнения движения, квазидифференциального по времени, для поля $A(x)$. На этом основании мы назвали равенство (4) условием „причинности", хотя такая терминология может еще больше увеличить неясность, уже господствующую вокруг понятия причинности. Большинство авторов согласны называть аксиому III причинной. Возможно, между прочим, что между аксиомами III и IV существуют какие-то соотношения, но сейчас они неясны. Эта последняя аксиома не была сформулирована в явном виде в сообщении Уайтмана, но это было сделано в его более ранней работе (см. [6]).

После этих предварительных замечаний мне хотелось бы обсудить вкратце метод, использованный Уайтманом для описания теории в терминах вакуумных средних значений (см. [6]), с точки зрения, которая может оказаться полезной. В математической теории представлений колец в пространстве Гильберта доказывается следующая теорема[1]).

Если на кольце с инволюцией $\mathcal{R}$ определить положительно определенную линейную форму F, т. е. если каждому элементу z из $\mathcal{R}$ сопоставить комплексное число $F(z)$, такое, что

$$F(z_1+z_2)=F(z_1)+F(z_2) \text{ и } F(z^+z)\geqslant 0 \text{ для } z\in\mathcal{R},$$

то можно очень просто построить пространство Гильберта $\mathcal{Y}$ и представление (циклическое) кольца $\mathcal{R}$ с помощью операторов в $\mathcal{Y}$.

Для доказательства сначала рассматривается множество σ всех элементов ξ из $\mathcal{R}$, для которых $F(\xi^+\xi)=0$. Затем кольцо разбивается на классы так, что все элементы $\mathcal{R}$, отличающиеся друг от друга лишь на элемент из σ, принадлежат к одному и тому же классу. Пусть Φ_1 и Φ_2 — два таких класса, а z_1 и z_2 — элементы из $\mathcal{R}$. Если z_1 описывает класс Φ_1, а z_2 — класс Φ_2, то сумма z_1+z_2 описывает некоторый класс Φ. Таким образом определяется сложение классов: $\Phi_1+\Phi_2=\Phi$. Кроме того, $F(z_1^+z_2)$ остается постоянным, когда z_1 и z_2 пробегают классы Φ_1 и Φ_2 соответственно. Значит, можно определить скалярное произведение

$$(\Phi_1,\ \Phi_2)=F(z_1^+z_2).$$

Стало быть, множество классов образует пространство Гильберта. Наконец, $z'=zz_1$ описывает некоторый класс Φ', когда z_1 пробегает класс Φ_1. Таким образом, можно написать $\Phi'=z\Phi_1$, что определяет представление элемента z из $\mathcal{R}$ с помощью оператора в $\mathcal{Y}$. Неравенство Шварца, являющееся следствием положительной определенности формы F, играет важную роль при доказательстве этих результатов.

С физической точки зрения это означает, что если отождествить линейную положительно определенную форму $F(z)$ с вакуумным средним значением оператора z, то мы получаем конструкцию Уайтмана. Класс, содержащий единицу (а также все операторы Лоренца $U(L)$), приводит к вектору состояния вакуума $|0\rangle$). Нулевой класс σ есть множество операторов уничтожения, т. е. операторов, для которых $\xi|0\rangle=0$. Если Φ является вектором состояния и z — элемент представления класса Φ с помощью операторов над $\mathcal{Y}$, то имеет место соотношение

$$\Phi=z|0\rangle.$$

§ 3. Подкольца $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ и их физическая интерпретация

Рассмотрим область $\mathcal{L}$ пространства — времени и подкольцо $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$, построенное с помощью тех операторов $A(x)$, для которых $x\in\mathcal{L}$. Для простоты всегда будем считать $\mathcal{L}$ четырехмерным цилиндром, основанием которого является трехмерный объем[2]) в момент времени t, а высота всегда равна одной и той же продолжительности δ. Иногда будет удобно вместо $\mathcal{L}$ писать $(V,\ t)$.

---

[1]) Имеется в виду обзорная статья М. А. Наймарка „Кольца с инволюцией" (*Успехи матем. наук*, 3 (1948), вып. 5 (27), 52—145).— *Прим. перев.*

[2]) Из контекста, по-видимому, следует, что под „объемом" автор понимает связное, ограниченное, замкнутое множество.— *Прим. перев.*

Мы снова можем построить теорию Уайтмана (см. предыдущий раздел) и получить пространство Гильберта $\mathcal{Y}_{\mathcal{L}}$, соответствующее подкольцу $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$, принимая опять за линейные формы F вакуумные средние значения. $\mathcal{Y}_{\mathcal{L}}$ является подпространством $\mathcal{Y}$, включающим, очевидно, вектор состояния вакуума $|0\rangle$ (поскольку $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ содержит единичный элемент). Подпространство $\mathcal{Y}_{\mathcal{L}}$, ортогональное вектору $|0\rangle$, обозначим через $\overline{\mathcal{Y}}_{\mathcal{L}}$. Дадим теперь физическую интерпретацию теории: векторы из $\mathcal{Y}_{\mathcal{L}}$ соответствуют ситуации, когда физическая система целиком локализована в объеме V в момент времени t. Это заменяет асимптотическую интерпретацию, упомянутую во введении. Выше были указаны преимущества этого метода. Следует, однако, иметь в виду, что наше предложение в изложенном здесь виде также не является окончательно удовлетворительным, поскольку мы не можем *точно* определить в терминах результатов измерений то, что нами названо „локализацией". Мы можем дать только приближенное определение (практически достаточное, например, для построения S-матрицы): если Φ есть состояние, локализованное в момент времени t в объеме V, и если над Φ производится измерение с помощью измерительного прибора, ограниченного некоторой областью $\mathcal{L}'$, причинно отделенной от (V, t)[1]) и достаточно удаленной от (V, t), то результат будет существенно одним и тем же для Φ и для $|0\rangle$.

Математически это можно выразить так:

V. Если Φ и Φ' являются двумя нормированными векторами, принадлежащими $\overline{\mathcal{Y}}_{\mathcal{L}}$ и $\overline{\mathcal{Y}}_{\mathcal{L}'}$ соответственно и если области $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ причинно разделены, то

$$|(\Phi, \Phi')| < \varepsilon(R), \text{ где } \varepsilon(R) \to 0 \text{ при } R \to \infty. \tag{5}$$

Здесь R есть наименьшее расстояние между $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$, скажем $R = \min \sqrt{(x_\mu - x'_\mu)^2}$. Из физических соображений можно предположить, что убывание ε с ростом R должно быть экспоненциальным в теории, которая не описывает частиц с нулевой массой покоя. Мы пока не ищем наиболее слабой аксиоматики, совместимой с физической интерпретацией; поэтому просто предположим в соотношении (5) экспоненциальное убывание для больших значений R. Вот другая формулировка, эквивалентная (5), с помощью вакуумных средних значений операторов:

$$\langle 0|q'q|0\rangle \to \langle 0|q'|0\rangle\langle 0|q|0\rangle, \text{ если } q \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}},\ q' \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}'}. \tag{6}$$

Аксиомы III и V позволяют определить прямое произведение Λ векторов состояний, локализованных в причинно разделенных областях. Если

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= q|0\rangle,\ \Phi \in \mathcal{Y}_{\mathcal{L}},\ q \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}, \\ \Phi' &= q'|0\rangle,\ \Phi' \in \mathcal{Y}_{\mathcal{L}'},\ q' \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}'}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

то „произведение состояний"

$$\Phi \wedge \Phi' \equiv qq'|0\rangle \tag{8}$$

однозначно определено на основании III тогда и только тогда, когда области $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ причинно разделены.

В других случаях определение (8) лишено смысла, так как „оператор рождения" q для состояния Φ определяется из соотношений (7) лишь с точностью до аддитивного оператора уничтожения, принадле-

[1]) Две области $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ будем называть причинно разделенными, если пространственно-временное расстояние любой точки $\mathcal{L}'$ от произвольной точки $\mathcal{L}$ является пространственно-подобным.

жащего $\mathscr{R}_{\mathscr{L}}$ (Φ соответствует классу элементов из $\mathscr{R}_{\mathscr{L}}$, а q есть произвольный представитель этого класса). Если $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}'$ причинно разделены, то этот произвол не затронет результата определения (8). Действительно, можно переставить направо аддитивный оператор уничтожения, который, подействовав на вакуум, даст нуль.

Векторы вида $\overline{\mathscr{Y}}_{V_1 t} \wedge \overline{\mathscr{Y}}_{V_2 t}$ будем называть векторами дважды локализованных состояний. Они описывают ситуацию, когда в момент времени t материя находится только лишь в двух несоприкасающихся объемах V_1 и V_2 и нигде больше.

Непосредственно ясны следующие свойства операции $\wedge$:

$$\Phi \wedge \Phi' = \Phi' \wedge \Phi, \tag{9}$$

$$U(L)\cdot(\Phi \wedge \Phi') = [U(L)\Phi] \wedge [U(L)\Phi']. \tag{10}$$

Если соотношение (3) остается справедливым (аксиома III) для произвольно малых пространственно-подобных разделений, то произведение $\wedge$ определяется, как только области $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}'$ оказываются причинно разделенными. Но метрика $\overline{\mathscr{Y}}_{\mathscr{L}} \wedge \overline{\mathscr{Y}}_{\mathscr{L}'}$ приближается к метрике произведения лишь в том случае, когда расстояния разделения двух областей велики:

$$|\Phi \wedge \Phi'|^2 = \langle 0 | q^+ q'^+ q' q | 0 \rangle = \langle 0 | q'^+ q' q^+ q | 0 \rangle, \tag{11}$$

что, в силу (6), стремится к выражению

$$\langle 0 | q'^+ q' | 0 \rangle \langle 0 | q^+ q | 0 \rangle = |\Phi'|^2 \cdot |\Phi|^2.$$

Таким образом, операция $\wedge$ является настоящим прямым произведением лишь асимптотически.

§ 4. Корпускулярные аспекты

Интуитивно ясно, что понятие n-кратно локализованного состояния в момент времени t могло бы служить для определения асимптотических состояний с n частицами, если устремить t к ∞. Пусть Φ — произвольное нормированное состояние. Это означает, что в начальный момент времени оно существенным образом локализовано внутри конечного объема. Пусть, кроме того, $\Phi_{V_1 V_2 t}$ — произвольное состояние из $\mathscr{Y}_{V_1 t} \wedge \mathscr{Y}_{V_2 t}$. Рассмотрим теперь последовательность произведений

$$(\Phi_{V_1 V_2 t}, \Phi).$$

Фиксируем объемы V_1 и V_2 и обозначим положения их центров в момент времени t с помощью векторов $\mathbf{v}_1 t$ и $\mathbf{v}_2 t$ соответственно. Устремим теперь t к ∞. Можно ожидать, что для больших значений t главный член даст в точности компоненту Φ, соответствующую состоянию с двумя частицами, вылетающими со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ соответственно. Все вклады должны обращаться в нуль (как более высокая степень $1/t$), поскольку все менее и менее вероятно найти несколько частиц [1]) в одном и том же конечном объеме, например V_1.

Кратко можно сказать, что утверждение „в объеме V имеется отклонение от состояния вакуума“ асимптотически эквивалентно утверждению „в объеме V имеется хотя бы одна частица“. Мы могли бы, стало быть, попытаться определить асимптотические состояния с n частицами как пределы в смысле слабой сходимости векторов $\Phi_{V_1 t} \wedge \wedge \Phi_{V_2 t} \wedge \ldots \wedge \Phi_{V_n t}$ (умноженных на должную степень t, чтобы гарантировать сходимость выражений).

[1]) Любая компактная система называется частицей, либо элементарной, либо составной.

Но мы воспользуемся другим методом. Прежде всего одночастичные состояния можно получить с помощью одних лишь операторов Лоренца $U(L)$ (аксиома II), затем ищутся дискретные подпространства $\mathcal{Y}_K$ пространства $\mathcal{Y}$, которые преобразуются по неприводимому представлению неоднородной группы Лоренца (дискретные собственные значения оператора P_μ^2). Для того чтобы отбросить лишние модели, необходимо предположить, что

VI. а) В спектре P_0 содержатся лишь положительные энергии (ср. с обзором Уайтмана).

б) Существует по меньшей мере одно собственное значение P^2, которое дискретно.

Пусть $\Phi_x^{(i)}$ — состояние (несобственное) частицы типа i (с массой m_i), локализованной в смысле Ньютона и Вигнера[1]) в момент времени t в положении x. Подобные состояния опять-таки полностью определяются операторами Лоренца. Общее состояние такой частицы будет, следовательно, иметь вид

$$\Phi_\varphi^{(i)} = \int \varphi(\mathbf{x}, t) \cdot \Phi_{\mathbf{x}, t}^{(i)} \, d\mathbf{x}. \tag{12}$$

Волновая функция $\varphi(\mathbf{x}, t)$ интерпретируется как амплитуда вероятности нахождения частицы в точке $\mathbf{x}$ и в момент времени t. Норма состояния Φ_φ может быть выражена с помощью волновой функции

$$|\Phi_\varphi|^2 = \int |\varphi(\mathbf{x}, t)|^2 \, d\mathbf{x}. \tag{13}$$

Уравнение движения для волновой функции гласит:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi}(\mathbf{K}, t) = \sqrt{\mathbf{K}^2 + m^2} \, \tilde{\varphi}(\mathbf{K}, t). \tag{14}$$

Здесь $\tilde{\varphi}(\mathbf{K}, t)$ означает трехмерное преобразование Фурье волновой функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$. Эти результаты вытекают из работы Ньютона и Вигнера [7].

Далее, в соответствии с нашей интерпретацией надо предположить, что состояние Φ_x существенным образом принадлежит подпространству $\overline{\mathcal{Y}}_{V, x_0}$, где V означает малый объем, окружающий точку $\mathbf{x}$. Возможно, что эта гипотеза уже является математическим следствием из требований, которые сформулированы нами выше. В волновой механике можно найти аналог: волновая функция (в относительных координатах) любой связанной системы существенным образом ограничена малой областью, соответствующей размерам объекта. Для большей верности мы будем рассматривать это свойство как дополнительную аксиому.

VII. Любое состояние Φ_φ (ср. уравнение (12)), где $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ вне некоторого объема V_1 в момент времени t, может быть аппроксимировано состоянием Φ, являющимся элементом подпространства $\overline{\mathcal{Y}}_{V, t}$, где V обозначает объем, содержащий V_1 таким образом, что

$$|\Phi - \Phi_\varphi|^2 < \varepsilon(V), \tag{15}$$

где $\varepsilon(V)$ экспоненциально стремится к 0, когда $V \to \infty$.

Мы можем определить тем самым „оператор рождения“ $q^{(i)}(x)$:

$$q^{(i)}(x) \, |0\rangle = \Phi_x^{(i)} \tag{16}$$

так, что $q(x)$ принадлежит существенным образом кольцу $\mathcal{R}_{V, x_0}$, соот-

[1]) См. [7]. Следует заметить, что это понятие не ковариантно, т. е. что соотношение $U(L)\Phi_x = \Phi_{Lx}$, вообще говоря, не верно, за исключением, однако, трансляций.

ветствующему окрестности V точки $\mathbf{x}$, или, как мы будем говорить, что $q(x)$ есть „*почтилокальный*“ оператор. Очевидно, что $q(x)$ при выборе почтилокального представителя в классе операторов, удовлетворяющих (16), еще не определяется единственным образом. Этот произвол, однако, не имеет значения для дальнейшего. Попутно можно отметить, между прочим, что в качестве $q(x)$ нельзя выбрать обычный оператор „падающего поля“, не являющийся „почтилокальным“ в указанном смысле.

Пусть $\tilde{q}(\mathbf{K}, t)$ — трехмерное преобразование Фурье оператора $q(\mathbf{x}, t)$ и

$$\tilde{\rho}(\mathbf{K}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}(\mathbf{K}, t) - i\sqrt{\mathbf{K}^2 + m^2}\,\tilde{q}(\mathbf{K}, t). \tag{17}$$

Тогда функция $\rho(\mathbf{x}, t)$, являющаяся преобразованием Фурье $\tilde{\rho}(\mathbf{K}, t)$, обладает следующими двумя свойствами:

1) она почти-локальна;

2) согласно (14), она является чистым оператором уничтожения.

Теперь нами может быть доказана следующая теорема.

Теорема. 1. *Пусть $\Phi_\varphi^{(i)}$ и $\Phi_\psi^{(j)}$ — нормированные одночастичные состояния (индексы i и j указывают тип частицы). Тогда последовательность состояний*

$$\Phi(t) = \int \varphi(\mathbf{x}_1, t)\,\psi(\mathbf{x}_2, t)\,q^{(i)}(\mathbf{x}_1, t)\,q^{(j)}(\mathbf{x}_2, t)\,d\mathbf{x}_1\,d\mathbf{x}_2\,|0\rangle \tag{18}$$

сильно сходится при $t \to \pm\infty$.

2. *Пусть*

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty}\Phi(t) &= \Phi_\varphi^{(i)} \overset{+}{\times} \Phi_\psi^{(j)}, \\ \lim_{t\to-\infty}\Phi(t) &= \Phi_\varphi^{(i)} \overset{-}{\times} \Phi_\psi^{(j)} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

— предельные состояния.

Определенные таким образом операции $\overset{-}{\times}$ и $\overset{+}{\times}$ обладают тогда всеми свойствами симметрического прямого произведения:

$$\text{a)}\ \Phi_\varphi^{(i)} \times \Phi_\psi^{(j)} = \Phi_\psi^{(j)} \times \Phi_\varphi^{(i)} \ \text{(коммутативность)}, \tag{20}$$

$$\text{b)}\ (\Phi_{\varphi_1} \times \Phi_{\psi_1},\ \Phi_{\varphi_2} \times \Phi_{\psi_2}) = (\Phi_{\varphi_1},\ \Phi_{\varphi_2})(\Phi_{\psi_1},\ \Phi_{\psi_2}) + (\Phi_{\varphi_1},\ \Phi_{\psi_2})(\Phi_{\psi_1},\ \Phi_{\varphi_2})\ \text{(метрика)}, \tag{21}$$

$$\text{c)}\ U(L)\,\Phi_\varphi \times \Phi_\psi = U(L)\,\Phi_\varphi \times U(L)\,\Phi_\psi \tag{22}$$

(трансформационное свойство по отношению к операциям группы Лоренца).

При доказательстве будет показана возможность применения результатов этой теоремы к случаю произвольного числа множителей. Тем самым состояния, соответствующие определенным конфигурациям входящих или уходящих частиц, могут быть выражены с помощью фундаментальных переменных. То же самое можно сказать по-другому, а именно: последовательность операторов $\int \varphi(\mathbf{x}, t)\,q(\mathbf{x}, t)\,d\mathbf{x}$ сильно сходится. С помощью классического метода можно получить затем операторы падающих и расходящихся полей, используя пределы при $t = \pm\infty$. Вторая часть теоремы утверждает, что эти операторы обладают свойствами, указанными в аксиоме IV, б Уайтмана. В выра-

жении (18) не существенно, являются ли рассматриваемые частицы элементарными или составными.

Для доказательства первой части теоремы заметим, что с помощью соотношений (14) и (17) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)=\int\varphi(x_1)\psi(x_2)\rho(x_1)q(x_2)\,d\mathbf{x}_1d\mathbf{x}_2\,|\,0\rangle. \tag{23}$$

Для упрощения записи мы не будем писать индекса, указывающего тип частицы и положим

$$m_i=m_j=m.$$

Квадрат нормы вектора (23) равен

$$|\dot{\Phi}(t)|^2=\int\tilde{\psi}(\mathbf{K}_2',\ 0)\tilde{\varphi}(\mathbf{K}_1',\ 0)\tilde{\varphi}(\mathbf{K}_1,\ 0)\tilde{\psi}(\mathbf{K}_2,\ 0)\times$$
$$\times\exp\left\{i\left[\sum(\sqrt{\mathbf{K}'^2+m^2}-\sqrt{\mathbf{K}^2+m^2})\,t+\sum(\mathbf{K}_i\cdot\mathbf{x}_i-\mathbf{K}_i'\cdot\mathbf{x}_i')\right]\right\}\times$$
$$\times\langle 0\,|\,q^+(x_2')\rho^+(x_1')\rho(x_1)q(x_2)\,|\,0\rangle\,d\mathbf{K}_id\mathbf{K}_i'd\mathbf{x}_id\mathbf{x}_i'. \tag{24}$$

В силу трансляционной инвариантности, вакуумное среднее значение под знаком интеграла не зависит от t. Оно является функцией только трех векторов

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2,\ \ \mathbf{x}'=\mathbf{x}_1'-\mathbf{x}_2',\ \ \boldsymbol{\xi}=\mathbf{x}_1'-\mathbf{x}_1.$$

Так как ρ является чистым оператором уничтожения, к тому же почти-локальным, то эта функция (обобщенная) будет стремиться экспоненциально к нулю, когда одновременно $|\mathbf{x}|\to\infty$ и $|\mathbf{x}'|\to\infty$. Что касается ξ, то, согласно (6), следует различать два вклада: с одной стороны, произведение двух различных вакуумных средних значений, которое не зависит от ξ и, с другой стороны, добавочный член, который экспоненциально убывает при больших значениях ξ.

Вклад первого члена легко можно представить в виде

$$\left|\int F(\mathbf{K})\,e^{2i\sqrt{\mathbf{K}^2+m^2}t}\,d\mathbf{K}\right|^2, \tag{25}$$

где $F(\mathbf{K})$ есть произведение трех множителей $\tilde{\varphi}(\mathbf{K})$, $\tilde{\psi}(\mathbf{K})$ и $\tilde{g}(\mathbf{K})$. Последний является преобразованием Фурье функции $g(\mathbf{x})=\langle 0\,|\,\rho(\mathbf{x},0)\times\times q(0)\,|\,0\rangle$. Так как $g(\mathbf{x})$ экспоненциально убывает при больших значениях x, то $\tilde{g}(\mathbf{K})$ является „хорошей функцией“ при всех конечных значениях $|\mathbf{K}|$. Она может неограниченно возрастать при больших значениях $|\mathbf{K}|$ из-за возможной особенности $g(\mathbf{x})$ в начале координат. Но если эта особенность разумного типа, то она не играет роли, так как тогда можно выбрать плотное множество весовых функций $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$, таких, что произведение F убывает достаточно быстро при больших значениях $|\mathbf{K}|$ (причем они являются „хорошими функциями“ при конечных $\mathbf{K}$). Таким образом, рассмотренный вклад в $|\dot{\Phi}|^2$ будет стремиться к 0 при $t\to\infty$, как t^{-3}.

Так же можно свести второй вклад к аналогичному выражению:

$$\int F(\mathbf{K},\ \mathbf{K}',\ \mathbf{k})\exp\{it[\sqrt{\mathbf{K}^2+m^2}-\sqrt{\mathbf{K}'^2+m^2}+\sqrt{(\mathbf{K}-\mathbf{k})^2+m^2}-$$
$$-\sqrt{(\mathbf{K}'-\mathbf{k})^2+m^2}]\}\,d\mathbf{K}d\mathbf{K}'d\mathbf{k},$$

где F — „хорошая функция“, асимптотически убывающая. С помощью метода стационарных фаз можно установить, что этот член также пропорционален t^{-3} при больших значениях t.

Следовательно, асимптотически имеем

$$|\dot{\Phi}(t)|^2 \sim t^{-3}; \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\Phi}(t')| dt' < Ct_1^{1/2}.$$

Это доказывает первую часть теоремы (стр. 141).

Доказательство 2a) проводится точно так же; при этом используется почтилокальность операторов $q(x)$.

Чтобы доказать 2b), запишем скалярное произведение двух состояний вида (18):

$$[\Phi'(t), \Phi(t)] = \int \varphi'(x_1')^* \psi'(x_2')^* \varphi(x_1) \psi(x_2) \times$$
$$\times \langle 0 | q^+(x_2') q^+(x_1') q(x_1) q(x_2) | 0 \rangle dx_i' dx_i. \tag{26}$$

Для больших значений t будет играть роль лишь поведение $g(x_2', \ldots, x_2) = \langle 0 | q^+(x_2') \ldots q(x_2) | 0 \rangle$ при больших значениях по меньшей мере одного из относительных расстояний. Применяя соотношение (6) и вспоминая, что $\langle 0 | q(x) | 0 \rangle = 0$ и что вклад произведения $\langle 0 | q^+(x_2') \times \times q^+(x_1') 0 \rangle \langle 0 | q(x_1) q(x_2) | 0 \rangle$ имеет вид (25), мы можем заменить $g(x_2', \ldots, x_2)$ на

$$\langle 0 | q^+(x_2') q(x_2) | 0 \rangle \langle 0 | q^+(x_1') q(x_1) | 0 \rangle \times$$
$$\times \langle 0 | q^+(x_2') q(x_1) | 0 \rangle \langle 0 | q^+(x_1') q(x_2) | 0 \rangle,$$

что дает нам непосредственно 2b).

Наконец, 2c) является следствием (10), так же как 2a) можно считать следствием (9) и 2b) — следствием (11).

Во всех этих доказательствах существенным образом использовано обращение в нуль вклада в интеграл (18), происходящего из области, в которой точки x и x' близки одна к другой при больших значениях t. Если, однако, точки x и x' удалены одна от другой, то мы имеем дело с произведениями состояний типа, рассмотренного в третьей части, и мы можем поэтому воспользоваться свойствами этих произведений.

§ 5. Заключение

Операция произведения $\wedge$, которую можно определить лишь для состояний причинно разделенных, приводит к операциям умножения типа $\overset{-}{\times}$ и $\overset{+}{\times}$, определенным для любых пар состояний. Заметим, что собственно операцию $\wedge$ невозможно распространить на все совокупности из двух состояний. Вообще говоря, нельзя также ввести полную корпускулярную интерпретацию для всех значений времени t. Понятие „число частиц [1]) в конечный момент времени t“, когда имеется возможность взаимодействия, не является реалистическим в теории поля. В подтверждение этого мнения можно упомянуть одну простую аналогию, заимствованную из квантовой механики.

Система из трех нуклонов имеет три асимптотических состояния: тритий, дейтрон плюс нейтрон, а также три изолированных нуклона. Для конечных моментов времени волновые функции, которые являются

[1]) Мы говорим о „физических“ частицах. „Голые“ частицы, во всяком случае, трудно наблюдать.

произведениями функций трех изолированных нуклонов, образуют полный базис системы. Следовательно, нельзя ответить на вопрос, имеем мы дело (в некоторой области пространства) со взаимодействующими нуклонами, с тремя изолированными нуклонами или же с состоянием дейтрон плюс нейтрон. Это обстоятельство имеет прямое отношение к теории поля со сложными частицами. Самое большее, чего можно надеяться достичь, это интерпретации элементарных частиц в терминах конфигураций. Но даже если признать (не очень определенное) различие между частицами элементарными и составными, все же обсуждение „эффектов экранировки", сделанное Ван-Хове[1]), показывает, что по меньшей мере не существует никакого простого или естественного определения системы ортогональных состояний, соответствующих определенным числам частиц в некоторый конечный момент времени. Таким образом, при построении полной, а не только асимптотической физической интерпретации необходимо говорить о локализации системы, рассматриваемой как одно целое, а не как совокупность частиц.

В итоге мы воспользовались тремя типами гипотез или аксиом. Первые две характеризуют ковариантную теорию поля. Все остальные, кроме аксиомы VI, выражают „причинный" и „локальный" характер теории. Аксиома VI является условием, накладываемым на спектр энергии и количества движения. Мы доказали, что эти гипотезы достаточны для определения состояний, обладающих определенной асимптотической конфигурацией, правильными трансформационными свойствами и свойствами ортогональности. Нет надобности делать различие между теориями, включающими или не включающими составные частицы. Тем не менее обсуждение остается неполным; действительно, для доказательства унитарности S-матрицы необходимо еще показать, что состояния, асимптотическая конфигурация которых вполне определена, образуют полную систему состояний в $\mathcal{Y}$. В исследовании более удовлетворительном было бы приятно заменить спектральное условие, выражаемое аксиомой VI, более фундаментальной гипотезой, исходя из которой можно было бы вывести аксиому VI и полноту системы асимптотических состояний частиц.

[1]) Ср. сообщения Ван-Хове и Рюиграка на этом коллоквиуме [8], [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Källen G., L'électrodynamique quantique, сб. "Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des shamps", Colloque Internationaux au Lille, Juin 1957; Paris, 1959, 109—117.
2. Haag R., *Dan. Mat. Fys. Medd.*, **29** (1955), № 12.
3. Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W., *Nuovo Cimento*, **1** (1955), 205.
4. Nishijima K., *Prog. Théor. Phys.*, **10** (1953), 549.
5. Ekstein H., *Nuovo Cimento*, **4** (1956), 1017.
6. Wightman A. S., *Phys. Rev.*, **101** (1956), 860.
7. Newton T. D., Wigner E. P., *Rev. Mod. Phys.*, **21** (1949), 400.
8. Van Hove L., Quelques méthodes et problèmes de la théorie quantique des champs en interaction, сб. "Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs", Colloques Internationaux au Lille, 1957, p. 39—55.
9. Ruijgrock T. W., Un modèle exactement renormalisable de champs quantifiés, сб. "Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs", Colloques Internationaux au Lille, 1957, p. 163—168.