И. Л. Гуревич, Несимметричное обтекание мягкой оболочки,
Тр. сем. по краев. задачам, 1990, выпуск 25, 118–123

https://www.mathnet.ru/kukz38

УДК 532.5

Гуревич И.Л.

НЕСИММЕТРИЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ МЯГКОЙ ОБОЛОЧКИ

I. Вывод системы уравнений

В плоскости $z=x+iy$ рассматривается безвихревое течение идеальной несжимаемой жидкости с вектором скорости на бесконечности $(V_0\cos\alpha, V_0\sin\alpha)$ с учетом ускорения силы тяжести $(0, -g)$ (случаи $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/2$ исследованы в [I]). Оболочка (замкнутая кривая Γ длины L) заполнена неподвижной жидкостью меньшей плотности и закреплена в точке $z=0$. Ее форма и углы β, δ (рис.I) неизвестны. Задаются значения параметров $\varkappa$, ν, γ, характеризующих разность полных давлений и плотностей внутри и вне оболочки, а также циркуляцию скорости. При определенных ограничениях на $\varkappa$, ν, γ методом Лере-Шаудера доказывается разрешимость задачи.

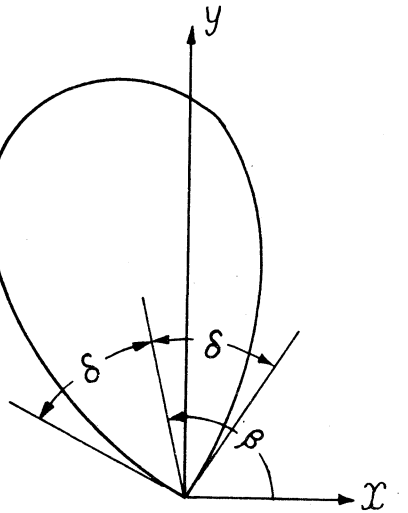

Рис.I

Введем обозначения: V - скорость; ρ_e , p_e , C_e - соответственно плотность, давление и константа Бернулли в движущейся жидкости; ρ_i , p_i , C_i - те же величины внутри оболочки; w - комплексный потенциал; s - дуговая абсцисса на оболочке, отсчитываемая от точки $z=0$ (при обходе оболочки с ростом s область течения остается слева); $\Phi(s)$ - угол между касательной и осью x , $\Phi(0)=\beta+\delta$, $\Phi(L)=\beta-\delta-\pi$; $T=const>0$ - сила натяжения.

Из условия равновесия элемента оболочки и уравнения Бернулли вытекает

$$\frac{d\Phi}{ds}=C_e-C_i-\rho V^2/2-(\rho_e-\rho_i)gy. \tag{1}$$

Пусть области течения конформно соответствует круг $|\zeta|<1$ в плоскости $\zeta=re^{i\sigma}$, причем $z=0$ переходит в $\zeta=-i$, а $z=\infty$ в $\zeta=0$. Зависимость $w(\zeta)$ дается формулой

$$w=-\varphi_0\left[i\ln\zeta+\frac{1}{2}(\zeta e^{i\Delta}+\zeta^{-1}e^{-i\Delta})\right], \tag{2}$$

где $\varphi_0>0$ и Δ - неизвестные числа. Введем также представление

$$\frac{dz}{d\zeta}=\frac{\varphi_0}{2V_0}\zeta^{-2}e^{-\omega(\zeta)} \tag{3}$$

и обозначим $\omega(e^{i\sigma})=\tau(\sigma)+i\theta(\sigma)$. Из (2), (3) и условия при $z=\infty$ вытекает $\omega(\zeta)=i(\Delta-\alpha)+a_1\zeta+\ldots$. Снова используя (2), (3), а также последнее разложение, получим

$$\frac{ds}{d\sigma}=LI^{-1}e^{-\tau},\quad V=2V_0e^{\tau}|\gamma+\sin(\sigma+\Delta)|,\quad \Phi=\frac{\pi}{2}-\theta-\sigma, \tag{4}$$

$$I=\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}e^{-\tau}d\sigma,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\theta(\sigma)\,d\sigma=\Delta-\alpha. \tag{5}$$

В силу (4) и задания $\Phi(0)$, $\Phi(L)$

$$\theta(-\pi/2)=\pi-\beta-\delta,\qquad \theta(3\pi/2)=\delta-\beta. \tag{6}$$

Имея в виду применение принципа Лере - Шаудера, в (I) заменим V на tV , g на $t^2g\ (0\leqslant t\leqslant 1)$. Из (I), (4), (6) следует:

$$\theta(\sigma)=\frac{\pi}{2}-\beta-\delta-\sigma+M\int_{-\pi/2}^{\sigma}A\left[\theta,\tau\right]d\sigma, \tag{7}$$

$$M=(\pi+2\delta)\Big(\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} A\,d\sigma\Big)^{-1},$$

$$A=\varkappa e^{-\tau}+t^{2}\nu I^{-1}e^{-\tau}\int\limits_{-\pi/2}^{\sigma} e^{-\tau}\cos(\theta+\sigma)d\sigma+te^{\tau}(\gamma+\sin(\Delta+\sigma))^{2}, \qquad (8)$$

$$\varkappa=(C_i-C_e)(2V_0^2\rho_e)^{-1}>0, \qquad \nu=Lg(\rho_e-\rho_i)(2V_0^2\rho_e)^{-1}.$$

Далее, из формулы Гильберта и (6) легко вывести

$$\tau(\sigma)=(\pi-2\delta)D(\sigma,\pi/2)+u(\sigma), \quad D(\sigma,\xi)=-\frac{1}{\pi}\ln\left|\sin\frac{\sigma-\xi}{2}\right|, \qquad (9)$$

$$u(\sigma)=\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} D(\sigma,\xi)\,\frac{d\theta(\xi)}{d\xi}\,d\xi\,. \qquad (10)$$

При заданных δ, β равенства (5), (7) - (10) образуют систему уравнений $\sum_1$ относительно $\theta(\sigma)$, $u(\sigma)$. Каждому ее решению соответствует по формуле Шварца $\omega(\zeta)$ и кривая Γ_t длины L с параметрическим уравнением

$$z=Z(\sigma)=I^{-1}L\int\limits_{-\pi/2}^{\sigma} \exp\left[-\omega(e^{i\sigma})-i\sigma\right]d\sigma\,.$$

Необходимо еще выполнить условие замкнутости $Z(-\pi/2)=Z(3\pi/2)$. Ниже оно заменяется равносильным, но более удобным для исследования.

Умножим производные от обеих частей (7) на $e^{i(\theta+\sigma)}$ и проинтегрируем по $[-\pi/2, 3\pi/2]$. При этом учтем (6) и получаемые с помощью теории вычетов и условия $\omega(0)=i(\Delta-\alpha)$ соотношения

$$\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} e^{-\omega-i\sigma}d\sigma=-2\pi Be^{i(c-\Delta+\alpha)}, \qquad Be^{ic}=a_1\,,$$

$$\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} e^{\omega+i\sigma}(\gamma+\sin(\sigma+\Delta))^{2}d\sigma=-2\pi\Big(\frac{B}{4}-i\gamma e^{-i\alpha}\Big)e^{i(c-\Delta+\alpha)}. \qquad (11)$$

В итоге будем иметь

$$2\sin\beta\cos\delta - tM(2\pi\gamma\cos\alpha + t\nu I^{-1}F) =$$
$$= 2\pi M b\left[æ\sin(c-\Delta+\alpha) - \frac{t}{4}\sin(c-\Delta-\alpha)\right], \tag{12}$$
$$2\cos\beta\cos\delta + tM(2\pi\gamma\sin\alpha + t\nu I^{-1}G^{2}) =$$
$$= 2\pi M b\left[æ\cos(c-\Delta+\alpha) + \frac{t}{4}\cos(c-\Delta-\alpha)\right], \tag{13}$$
$$F = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} e^{-\tau}\sin(\theta+\sigma)d\sigma \int_{-\pi/2}^{\sigma} e^{-\tau}\cos(\theta+\sigma)d\sigma, \quad G = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} e^{-\tau}\cos(\theta+\sigma).$$

Потребуем обращения в нуль правых частей (I2), (I3); для этого достаточно, чтобы было

$$\cos\delta = tMH/2, \quad \cos\beta = -(2\pi\gamma\sin\alpha + t\nu I^{-1}G^{2})/H,$$
$$H = \left[(2\pi\gamma\cos\alpha + \nu t I^{-1}F)^{2} + (2\pi\gamma\sin\alpha + \nu t I^{-1}G^{2})\right]^{1/2}. \tag{14}$$

Заметим, что сумма квадратов правых частей (I2), (I3) равна

$$4(\pi M b)^{2}\left[(æ - 1/4)^{2} + (tæ/2)^{2}\cos^{2}(c-\Delta)\right].$$

Если $M \neq 0$, $æ > 1/4$ и выполняется (I4), то из (I2), (I3) будет следовать $b = 0$, то есть в силу (II) выполняется условие замкнутости. В этом случае $G = 0$, $F = I^{2}SL^{-2}$, где S – площадь, ограниченная кривой Γ_t ($\Gamma_1 = \Gamma$).

Таким образом, будем рассматривать решение $\theta(\sigma)$, $u(\sigma)$, δ, β системы Σ, состоящей из Σ_1 и (I4).

2. Доказательство разрешимости

Считаем выполненными условия

$$0 < \alpha \leq \pi/2, \quad \gamma > 0, \quad æ > \nu \geq 0, \quad æ > 1/4. \tag{15}$$

Введем пространство $E = C \times C \times R \times R$ (C – пространство непрерывных на $[-\pi/2, 3\pi/2]$ функций, R – числовая ось) и функцию $\lambda(x,a,b)$: $\lambda = a$ $(x < a)$, $\lambda = x$ $(a \leq x \leq b)$, $\lambda = b$ $(x > b)$.
Пусть $x_k = (\theta_k, u_k, \delta_k, \beta_k)$ – элементы E, где $k = 0,1$. Введем преобразование $x_1 = Bx_0$ следующим описанием.

Находим $\delta' = \lambda(\delta_0, \varepsilon_1, \pi/2)$, где $\varepsilon_1 > 0$. Находим τ из (9) и

Δ из (5), полагая $u=u_0$, $\delta=\delta'$, причем $-N_1<\tau<N_2-(1-\varepsilon)\ln|\sigma+\pi/2|$ где $\varepsilon=2\varepsilon_1/\pi$.

Находим A и M из (8) при $\theta=\theta_0$, $\delta=\delta'$. Так как $\varkappa>\nu\geq 0$, то $0<M<\infty$. Затем находим $d\theta_1/d\sigma$ и θ_1 из (7), а также u_1 из (I0), причем $-1\leq d\theta_1/d\sigma<N_3|\sigma+\pi/2|^{\varepsilon-1}$, $\theta_1\in C_\varepsilon$, $u_1\in C_\varepsilon$, где C_ε – гёльдеровское пространство.

Находим P_δ и P_β – правые части (I4), причем $P_\beta\in[-1,0)$, $P_\delta>0$. Наконец, находим $\delta_1=\arccos\min(P_\delta,1)$, $\beta_1=\arccos P_\beta$, причем $\delta_1\in[0,\pi/2]$, $\beta_1\in(\pi/2,\pi]$.

Оператор B вполне непрерывен в E и непрерывен по t. Мы докажем, что при достаточно больших $\varkappa$ и достаточно малых ε_1 уравнение $x=Bx$ разрешимо, и его решение $x=(\theta,u,\delta,\beta)$ удовлетворяет $\sum$.

Получим оценки решения $x=Bx$ при условии $\delta\geq\varepsilon_1$. Для такого решения $\delta\in[\varepsilon_1,\pi/2]$, $\beta\in(\pi/2,\pi]$, $\delta'=\delta$, $P_\delta<1$, то есть выполняются все уравнения $\sum$. Так как $d\Phi/d\sigma\overset{\delta}{=}d\theta/d\sigma+1\geq 0$, то оно соответствует обтеканию замкнутой выпуклой оболочки; значит, $G=0$, $F=I^2SL^{-2}>0$. Поэтому из (I4) имеем $\beta\in(\pi/2,\pi/2+\alpha]$, а при $t=0$ будет $\beta=\pi/2+\alpha$, $\delta=\pi/2$.

Из $\sum$, привлекая неравенства Иенсена и $d\theta/d\sigma\geq-1$, условие $\operatorname{Re}\omega(0)=0$ и первую из оценок

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} D(\sigma,\xi)\,d\xi<\ln 2,\quad \int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\left|\sin\frac{\xi+\pi/2}{2}\right|^{2\delta/\pi-1} D(\sigma,\xi)\,d\xi<\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^3 \qquad (\text{I6})$$

получим

$$\begin{gathered}-3\pi/2<\theta<2\pi,\qquad u>-\ln 2,\qquad \tau>-\ln 2,\\ 2\pi\leq I<4\pi,\quad M\leq\varkappa^{-1},\quad P_\delta<(2\pi\gamma+\nu)(2\varkappa)^{-1}.\end{gathered} \qquad (\text{I7})$$

Наложим условие

$$2\varkappa>2\pi\gamma+\nu. \qquad (\text{I8})$$

Тогда

$$\delta>f(x,\gamma,\nu)=\arccos\frac{2\pi\gamma+\nu}{2\varkappa}>0. \qquad (\text{I9})$$

Пусть для рассматриваемого решения $u\leq N$. Оценивая сверху $d\theta/d\sigma$, применяя (I7) и второе неравенство из (I6), получим из (7), (I0):

$$u < f_1 + f_2 e^{N} = \psi(N). \tag{20}$$

Легко показать, что если

$$f_2 < e^{-(f_1+1)}, \tag{21}$$

то $\psi(N_0) < N_0$ при $N_0 = -\ln f_2$. Ввиду (20) это означает, что $\max u \neq N_0$ при выполнении (21).

Приступим непосредственно к доказательству разрешимости урав- нения $x = Bx$ при выполнении (21), (18), (15), то есть при достаточно больших $\varkappa$. Выберем $\varepsilon_1 \in (0, f)$ и введем замкнутое множество $\Omega \in E$, определяемое условиями

$$-\ln 2 \leq u \leq -\ln f_2, \qquad -3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$\varepsilon_1 \leq \delta \leq \pi/2 + \varepsilon_1, \qquad \pi/2 \leq \beta \leq \pi + \varepsilon_1.$$

Пусть $x = (\theta, u, \delta, \beta)$ и $x = Bx$. Из определения B вытекает $\delta \leq \pi/2, \pi/2 < \beta \leq \pi$. Далее, для этого решения верны оценки (17), (19) и утверждение $\max u \neq -\ln f_2$. Значит, $x \overline{\in} \partial\Omega$ при $t \in [0,1]$.

При $t = 0$ система $\sum$ равносильна задаче бесциркуляционного обтекания круга и имеет единственное решение $u = \theta = 0$, $\delta = \pi/2$, $\beta = \pi/2 + \alpha$. Соответствующая система уравнений в вариациях эквива- лентна краевой задаче для непрерывной в замкнутом круге функции $\delta\omega(\zeta)$ $(\delta\omega(0) = 0,\ \delta\omega(e^{i\sigma}) = \delta\tau(\sigma) + i\delta\theta(\sigma))$ с граничным условием $d\delta\theta/d\sigma = \delta M - \delta\tau$, где δM – неизвестное число. С помощью принципа максимума легко показать, что $\delta\omega = \delta M = 0$.

Из полученных результатов и принципа Лере – Шаудера вытекает, что уравнение $x = Bx$ при любом $t \in [0,1]$ имеет решение внутри Ω при выполнении условий (15), (18), (21). Это решение удовлетворяет $\sum$, то есть исходной задаче обтекания замкнутой оболочки.

Обычным путем используя полную непрерывность B и независи- мость оценок от $\min\alpha$ и $\min\gamma$, можно распространить теорему существования на случаи $\alpha = 0$ и $\gamma = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич И.Л. Плоская задача безотрывного обтекания мягкой оболочки тяжелой жидкостью. – Труды семинара по краевым задачам. Казань, 1988, вып.24.

Доложено на семинаре 26 января 1987 года.