Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. В. Сетуха, Фундаментальные решения плоской краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа,
Дифференц. уравнения, 2003, том 39, номер 1, 125–132

https://www.mathnet.ru/de10773

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.82
8 июля 2025 г., 08:42:03

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 1, с. 125–132

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

© 2003 г. А. В. Сетуха

В работе [1] введены понятия обобщенных краевых значений и обобщенных нормальных производных функции двух аргументов на границе области определения и сформулирована плоская краевая задача Неймана для уравнения Лапласа с обобщенными граничными условиями. В настоящей работе рассматривается частный случай такой задачи, когда нормальная производная неизвестной функции на границе области определения приравнивается к дельта-функции, сосредоточенной в заданной точке границы. Такие решения названы фундаментальными решениями краевой задачи Неймана. Доказывается существование указанных фундаментальных решений и исследуются их свойства. С использованием построенных фундаментальных решений доказано существование обобщенных решений краевой задачи Неймана в случае, когда правая часть в граничном условии есть функция, интегрируемая по Лебегу, и получено интегральное представление для решения в виде суперпозиции фундаментальных решений.

Всюду ниже используются обозначения и определения, введенные в работе [1].

1. Постановка краевой задачи. Пусть G – область на плоскости R^2, границей которой является простая гладкая кривая L, замкнутая или разомкнутая. Рассматривается краевая задача Неймана для функции u, определенной в области G:

$$\Delta u(M) \equiv \partial^2 u/\partial x_1^2 + \partial^2 u/\partial x_2^2 = 0 \quad \text{при} \quad M \equiv (x_1, x_2) \in G, \tag{1}$$

$$\partial u/\partial n = f \quad \text{на контуре} \quad L, \tag{2}$$

где f – заданная функция, определенная на кривой L.

Решение задачи (1), (2) ищется в классе функций, указанном в теореме 1 из [1] при требованиях к кривой L и функции f, сформулированных в той же теореме.

2. Необходимое условие разрешимости. Для внутренней задачи Неймана (1), (2) в классическом случае существует необходимое условие разрешимости

$$\int\limits_L f(s)\,ds = 0. \tag{3}$$

Для внешней задачи Неймана в области вне замкнутого гладкого контура условие (3) также является необходимым при отыскании решений, ограниченных на бесконечности [2, с. 367].

Аналогичное утверждение имеет место и для обобщенной задачи.

Теорема 1. *Пусть u – гармоническая функция в области G, границей которой является замкнутая гладкая кривая L класса C^m, $m \geq 2$, в случае, если область G является внешней по отношению к кривой L, выполнено условие*

$$\lim_{|M|\to\infty} u(M) = 0, \tag{4}$$

и пусть функция u удовлетворяет граничному условию (2) в классе $D^{(m-1)\prime}(L)$, $f \in D^{(m-1)\prime}(L)$. Тогда $(f, e) = 0$, где $e(s) \equiv 1$.

Доказательство. Для каждого $\varepsilon \in R$ можно построить кривую L_ε, состоящую из точек $M = M_\varepsilon(s)$, $s \in [a, b]$, где

$$M_\varepsilon(s) = M(s) + \varepsilon\vec{n}(s) \equiv (x_1^{(\varepsilon)}(s), x_2^{(\varepsilon)}(s)). \tag{5}$$

Несложно показать, что $x_i^{(\varepsilon)}(s) \in C^{m-1}[L]$, $i = 1, 2$, и существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ кривая L_ε – замкнутая кривая без самопересечений, не пересекающаяся с кривой L (см. лемму 1 из [1]).

Пусть $J_\varepsilon = \int_a^b (\partial u(M_\varepsilon(s))/\partial n)\, ds$, $0 < |\varepsilon| \le \varepsilon_0$. По предположению теоремы $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = (f, e)$. С другой стороны, применяя условие (3) к контуру L_ε, получаем $\tilde{J}_\varepsilon \equiv \int_L (\partial u(M_\varepsilon(s))/\partial n) ds_\varepsilon = 0$, где s_ε – естественный параметр на контуре L_ε. Поскольку $ds_\varepsilon(s)/ds \to e(s)$ при $\varepsilon \to 0$ в $C^{m-1}(L)$, имеем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \tilde{J}_\varepsilon$, откуда и следует условие $(f, e) = 0$. Теорема доказана.

3. Фундаментальные решения краевой задачи Неймана. Важным частным случаем задачи (1), (2) является случай, когда в правой части условия (2) стоит дельта-функция – функционал $\delta_{Q,L} \subset D^{0\prime}(L)$, введенный в [1].

Определение 1. Фундаментальными решениями краевой задачи (1), (2) будем называть функции $u_{Q,L}(M)$, $Q = M(s_q)$, $s_q \in E_L$, являющиеся решениями задачи (1), (2) в классе функций, удовлетворяющих условиям, сформулированным в теореме 1 из [1], при $f = \delta_{Q,L}$, когда L – разомкнутая кривая, и $f = \delta_{Q,L} - 1/T$, $T = b - a$, когда L – замкнутая кривая, и удовлетворяющие условию

$$\int\limits_L u^-(s)\, ds = 0 \tag{6}$$

в случае внутренней задачи.

Заметим, что в случае замкнутой кривой L функция $f = \delta_{Q,L} - 1/T$ удовлетворяет условию разрешимости, сформулированному в теореме 1.

Пусть, как и в [1],

$$V_L[\nu_1](M_0) = \int\limits_L \nu_1(s) F(M_0 - M(s))\, ds, \quad U_L[\nu_2](M_0) = \int\limits_L \nu_2(s)(\partial F(M_0 - M(s))/\partial n)\, ds \tag{7}$$

есть потенциалы простого и двойного слоя соответственно, где $F(M) = (2\pi)^{-1} \ln |M|^{-1}$ – ньютонов потенциал точечного заряда, $\nu_1, \nu_2 \in L_1[a, b]$ – плотности потенциалов простого и двойного слоя, $\vec{n} = \vec{n}(s)$, производная $\partial/\partial n$ вычисляется по координатам точки $M = M(s)$.

Лемма 1. *Пусть L – гладкая разомкнутая кривая класса C^2, $s_q \in (a, b)$ и функция $\nu(s)$ определена и непрерывна при $s \in [a, b] \setminus \{s_q\}$, дифференцируема при $s \in (a, b) \setminus \{s_q\}$, $\nu(a) = \nu(b) = 0$ и ее производная $\nu'(s) = \gamma(s)$ представляется в виде $\gamma(s) = \tilde{\gamma}(s)/(s - s_q)$, $\tilde{\gamma}(s) \in H^*(L)$, причем*

$$\int\limits_L \gamma(s)\, ds = 0, \tag{8}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши (здесь и ниже $H^*(L)$ – класс определенных на разомкнутой кривой L функций $\gamma(s)$, представимых в виде $\gamma(s) = \gamma^*(s)((b - s)(s - a))^{-\beta}$, где $\gamma^* \in H^\mu(L)$, $\mu \in (0, 1]$, $\beta \in [0, 1)$). Тогда существует функция $u = U_L[\nu]$, определенная и гармоническая на множестве $R^2 \setminus L$, и справедлива формула

$$\nabla u(M_0) = \int\limits_L \gamma(s) \vec{V}(M_0 - M(s))\, ds \equiv \vec{W}_L[\gamma](M_0), \quad M_0 \in R^2 \setminus L, \tag{9}$$

где функция $\vec{V}(M)$ введена в [1], интеграл понимается в смысле главного значения.

Доказательство. Справедливы равенства $\nu(s_0) = \int_a^{s_0} \gamma(s)\, ds = -\int_{s_0}^b \gamma(s)\, ds$, $s \in [a, b]$, и несложно показать, что $\nu \in L_1[a, b]$. Поэтому функция $u(M)$ существует и является гармонической при $M \in R^2 \setminus L$.

Для каждой точки $M_0 \in R^2 \setminus L$ справедливо равенство $\partial \vec{V}(M_0 - M(s))/\partial s = -\nabla_{M_0} \partial F(M_0 - M(s))/\partial n(s)$, где производные $\partial/\partial s$ и $\partial/\partial n(s)$ берутся по координатам точки $M(s)$, а ∇_{M_0} – оператор-градиент, вычисляемый по координатам точки M_0. Пусть $E^\delta(s_q) = \{s \in [a, b] |$

$|s - s_q| > \delta\}$, где $\delta > 0$. Тогда $\nabla u(M_0) = \lim\limits_{\delta\to+0} \int_{E^\delta(s_q)} \nu(s)\nabla_{M_0}(\partial F(M_0 - M(s))/\partial n(s))\,ds = = \lim\limits_{\delta\to 0} \int_{E^\delta(s_q)} \nu(s)(\partial\vec{V}(M_0 - M(s))/\partial s)\,ds$. В окрестности точки s_q функция ν представляется в виде $\nu(s) = C\ln|s - s_q| + \nu^*(s)$, где C – константа, не зависящая от s, функция $\nu^*(s)$ непрерывна в окрестности точки s_q. Поэтому $\lim\limits_{\delta\to 0} \nu(s)\vec{V}(M_0 - M(s))|_{s=s_q-\delta}^{s_q+\delta} = 0$ и, интегрируя по частям, получаем требуемую формулу. Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что если функция γ удовлетворяет условиям этой леммы, то во всех точках $M(s) \in L$, $s \in (a,b) \setminus \{s_q\}$, существуют предельные значения функций u и ∇u и справедлива формула (12) из [1].

Лемма 2. *Пусть L – гладкий замкнутый контур класса C^3, делящий плоскость R^2 на области Ω^+ (внешнюю) и Ω^- (внутреннюю), $Q = M(s_q) \in L$, $u = U_L[\nu]$, $\nu = 2F(M - Q)$. Тогда $u = u_0 + u_1$, где $u_0(M) = kF(M - Q)$, $k = 1$ в области Ω^+ и $k = -1$ в области Ω^-, $u_1 = V_L[\nu_1]$, $\nu_1(s) = 2\partial F(M(s) - Q)/\partial n(s)$, причем $u_1 \in H^{1,\mu}[\Omega^\pm]$.*

Доказательство. Пусть функции u, u_0 и u_1 имеют указанный вид, при этом $\nu_1(s) = = 2K_1(s, s_q)$, $\nu_1 \in C^1(L)$. Поэтому в силу оценок (14) из [1] $u_1 \in H^{1,\mu}[\Omega^\pm]$.

Рассмотрим функцию $g = u_0 + u_1 - u$, определенную на множестве $R^2 \setminus L$. Из лемм 4 и 5 работы [1] следует, что функция g имеет на контуре L обобщенные краевые значения и обобщенные нормальные производные класса $D^{2\prime}(L)$, причем $g^+ = g^-$, $(\partial g/\partial n)^+ = (\partial g/\partial n)^-$. Так как $\nu \in L_1(L)$, то можно показать, что $u \in L_1^{\mathrm{loc}}(R^2)$ (тем же рассуждением, что и при доказательстве теоремы 1 из [1]). Тогда, применяя лемму 6 из [1], получаем, что функция g гармоническая на плоскости R^2.

С другой стороны, при $M \in \Omega^+$ справедливо равенство $g(M) = C\ln|M - Q| + g^*(M)$, где функция $g^*(M)$ удовлетворяет условию (4) на бесконечности, C не зависит от M. Из теоремы Лиувилля [2, с. 307] следует, что $g \equiv 0$ при $M \in R^2$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть L – гладкая кривая класса C^m рассматриваемого вида, являющаяся границей области G, где $m \geq 3$ в случае замкнутой кривой и $m \geq 4$ в случае разомкнутой кривой. Тогда для каждой точки $Q = M(s_q) \in L$, $s_q \in E_L$, существует единственная функция $u = u_{Q,L}$ – фундаментальное решение задачи Неймана, и это решение представляется в виде $u = u_0 + u_1$, причем*

А) в случае внешней задачи и замкнутого контура L $u_0(M) = \ln|M - Q|/\pi$, $u_1 = V_L[\nu_Q]$, где $\nu_Q(s) \in C^{m-2}(L \times L)$ как функция от (s, s_q), и условие (4) выполнено в смысле равномерной сходимости по $Q \in L$;

Б) в случае внутренней задачи и замкнутого контура L $u_0(M) = -\ln|M - Q|/\pi$, $u_1 = V_L[\nu_Q] + p(Q)$, где $\int_L \nu_Q(s)\,ds = 0$, $\nu_Q(s) \in C^{m-2}(L \times L)$ как функция от (s, s_q), $p(Q) \in \in C^{m-2}(L)$;

В) в случае разомкнутого контура L $u_i = U_L[\nu_{i,Q}]$, $i = 0, 1$, где $\nu_{0,Q}(s) = (2/\pi)\ln|(R(s) - - R(s_q))/(R(s) + R(s_q))|$, $R(s) = (s - a)^{1/2}(b - s)^{-1/2}$, $\nu_{1,Q}(a) = \nu_{1,Q}(b) = 0$ при всех $Q = M(s_q)$, $s_q \in (a, b)$, и существует производная $\gamma_{1,Q}(s) = d\nu_{1,Q}(s)/ds$, представимая в виде $\gamma_{1,Q}(s) = \tilde{\gamma}_{1,Q}(s)R_1(s)^{-1}R_1(s_q)$, где $\tilde{\gamma}_{1,Q}(s) \in C^{m-4}(L \times L)$ как функция от (s, s_q), $R_1(s) = ((s - a)(b - s))^{1/2}$.

Доказательство. А) Рассмотрим случай внешней задачи, если контур L замкнутый. Возьмем функцию u_0, как указано в условии теоремы. В силу леммы 4 из [1] функция u_0 имеет на контуре L обобщенные краевые значения $u_0^+ \in L_1(L)$ класса $D^{0\prime}(L)$ и обобщенные нормальные производные $(\partial u_0/\partial n)^+ = \delta_{Q,L} - 2K_1(s, s_q)$ класса $D^{0\prime}(L)$.

Теперь построим функцию $u_1 \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, гармоническую в области G и удовлетворяющую условию (2) с $f(s) = 2K_1(s, s_q) - 1/T$. Такую функцию ищем в виде потенциала простого слоя $u_1 = V_L[\nu_Q]$, причем в силу равенства (10) из [1] для плотности потенциала простого слоя возникает интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$-\frac{1}{2}\nu(s_0) = f(s_0) - \int\limits_L K_1(s_0, s)\nu(s)\,ds, \tag{10}$$

так что $\nu(s) = \nu_Q(s)$ – решение уравнения (10) для указанной функции $f(s)$ (см. [2, с. 371–373]). Уравнение (10) однозначно разрешимо в классе функций $\nu(s) \in C(L)$ для любой правой части $f(s) \in C(L)$ и, используя лемму 3 из [1], можно доказать, что $\nu \in C^{m-2}(L \times L)$, причем производные $\partial^k \nu_Q(s)/\partial s_q^k$, $k = 1, \ldots, m-2$, есть решения этого уравнения для правых частей $f(s) = \partial^k K_1(s, s_q)/\partial s_q^k$. Таким образом, функция u_1 построена.

Пусть теперь $u = u_0 + u_1$. По построению функция u удовлетворяет условиям: $u \in L_1^{\mathrm{loc}}(G) \cap C^2(G)$, на кривой L существуют обобщенные краевые значения и обобщенные нормальные производные класса $D^{0\prime}(L)$, причем $(\partial u/\partial n)^+ = \delta_{Q,L} - 1/T$. Докажем, что для функции u выполнено условие (4). Так как функция u представляется в виде потенциала простого слоя, ее можно представить в виде $u(M) = \alpha \ln|M-Q| + \tilde{u}(M)$, где $\alpha = \pi^{-1} - (2\pi)^{-1} \int_L \nu_Q(s)\, ds$, $\tilde{u}(M)$ – функция, гармоническая в области G и удовлетворяющая оценке (4) в смысле равномерной сходимости по $Q \in L$. Поскольку при каждом Q для функции $\tilde{u}$ справедливы оценки (5) из [1], для всех $\varepsilon > 0$ выполнено равенство $I_\varepsilon = \int_{L_\varepsilon} (\partial u(M_\varepsilon(s))/\partial n(s))\, ds_\varepsilon = 2\pi\alpha$, где s_ε – естественный параметр на контуре L_ε, точки $M_\varepsilon(s)$ определены выражением (5). Но, с другой стороны, $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} I_\varepsilon = (\delta_{Q,L} - 1/T, e) = 0$, где $e(s) \equiv 1$ при $s \in E_L$. Значит, $\alpha = 0$ и функция u удовлетворяет оценке (4) в смысле равномерной сходимости по $Q \in L$. Случай А) доказан.

Б) Рассмотрим случай внутренней задачи, контур L замкнутый. Так же, как в предыдущем случае, возьмем функцию u_0, как указано в условии теоремы. При этом в силу леммы 4 из [1] выполнено равенство $(\partial u_0/\partial n)^- = \delta_{Q,L} + 2K_1(s, s_q)$ и построение функции u сводится к построению функции u_1, обеспечивающей выполнение условия (6) и являющейся классическим решением задачи (1), (2) с правой частью

$$f(s) = -2K_1(s, s_q) - 1/T. \tag{11}$$

Ищем функцию u_1 в виде $u_1 = V_L[\nu_Q] + p(Q)$, при этом функция $\nu = \nu_Q$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2}\nu(s_0) = f(s_0) - \int\limits_L K_1(s_0, s)\nu(s)\, ds \tag{12}$$

с записанной правой частью $f(s)$.

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (12), имеет ровно одно линейно независимое решение $\mu_0(s)$, причем его можно выбрать так, что выполнено условие

$$\int\limits_L \mu_0(s)\, ds = 1, \tag{13}$$

и с учетом леммы 3 из [1] легко получить, что $\mu_0(s) \in C^{m-2}(L)$. Решение неоднородного уравнения (12) существует при выполнении условия (3) [2, с. 373].

При каждом $s_q \in E_L$ функция $f(s)$, определяемая выражением (11), удовлетворяет условию разрешимости (3), так как функция u_0 гармоническая в области G, внутренней по отношению к кривой L, и по теореме 1 выполнено условие $0 = ((\partial u_0/\partial n)^-, e) = 1 + 2\int_L K_1(s, s_q)\, ds = \int_L (1/T + 2K_1(s, s_q))\, ds = -\int_L f(s)\, ds$.

Пусть E_0 – подпространство нормированного пространства $C(L)$, состоящее из функций f, удовлетворяющих условию (3). Оператор $(K\nu)(s_0) \equiv \nu(s_0)/2 + \int_L K_1(s_0, s)\nu(s)\, ds$ является непрерывным оператором, взаимно однозначно отображающим подпространство E_0 на себя. Тогда обратный оператор K^{-1} также непрерывен. Это означает, что для каждой точки $Q \in L$ существует единственное решение уравнения (12) $\nu(s) = \nu_Q(s) \in E_0$ и $\nu_Q(s) \in C(L \times L)$ как функция от (s, s_q). Используя лемму 3 из [1], доказываем, что $\nu_Q(s) \in C^{m-2}(L \times L)$.

Наконец, возьмем при каждом $Q \in L$ константу $p(Q)$ так, чтобы выполнялось условие (6). Для этого следует положить $p(Q) = -\int_L u_0^-\, ds - \int_L V_L[\nu_Q]^-\, ds = h_1(s_q) + h_2(s_q)$, при этом $h_1(s_q) = -(\pi)^{-1} \int_L \ln|M(s) - Q|\, ds$. Учитывая равенство $\partial \ln|M(s) - Q|/\partial s_q = \vec{V}(M(s) - Q)\vec{n}(s_q) = -K_2(s, s_q)/(s - s_q)$, где функции $\vec{V}(M)$ и $K_2(s, s_q)$ определяются формулами (11)

и (12) из [1], имеем $dh_1(s_q)/ds_q = (1/\pi)\int_{s_q-T/2}^{s_q+T/2} K_2(s,s_q)(s-s_q)^{-1}\,ds$, где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Используя лемму 3 из [1], заключаем, что $h_1(s_q) \in C^{m-2}(L)$. Наконец, $h_2(s_q) = -(2\pi)^{-1}\int_L ds_0 \int_L \nu_Q(s)\ln|M(s_0)-M(s)|\,ds \in C^{m-2}(L)$, тем самым случай Б) доказан.

В) Рассмотрим случай внешней краевой задачи на разомкнутом контуре. Пусть функция u_0 имеет вид, указанный в условии теоремы. Заметим, что при каждом значении $s_q \in (a,b)$ функция $\nu_{0,Q}$ удовлетворяет условиям $\lim\limits_{s\to a}\nu_{0,Q}(s) = \lim\limits_{s\to b}\nu_{0,Q}(s) = 0$ и функцию

$$\psi_Q(s) = \nu_{0,Q}(s) - \frac{2}{\pi}\ln|M(s)-M(s_q)| = \frac{2}{\pi}\ln\left|\frac{R(s)-R(s_q)}{|M(s)-M(s_q)|(R(s)+R(s_q))}\right| \tag{14}$$

можно доопределить по непрерывности при $s = s_q$ так, что при каждом $s_q \in (a,b)$ выполнено условие $\psi_Q(s) \in C[a,b]\cap C^1(a,b)$. Тогда $\nu_{0,Q}(s) \in L_1(L)$ как функция от s и функция u_0 существует.

Докажем равенство

$$(\partial u_0/\partial n)^+ = (\partial u_0/\partial n)^- = \delta_{Q,L} + f_Q(s), \tag{15}$$

где

$$f_Q(s) = R_1(s_q)f_Q^*(s), \quad f_Q^*(s) \in C^{m-3}(L\times L) \quad \text{как функция от} \quad (s,s_q). \tag{16}$$

Достроим контур L до замкнутого гладкого контура $\tilde L$ без самопересечений класса C^m, и пусть контур $\tilde L$ делит плоскость R^2 на области Ω^+ (внешнюю) и Ω^- (внутреннюю). Будем считать, что контур $\tilde L$ состоит из точек $M(s)$, $s \in [\tilde a, \tilde b]$. Построим множества $\Omega_\delta = \{M = M_\varepsilon(s)|\ \ s \in (a+\delta, b-\delta), \varepsilon \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\}$, $\delta > 0$, где точки $M_\varepsilon(s)$ определяются выражением (5), $\varepsilon_0 > 0$ – константа, выбранная так, что при $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ контур $\tilde L_\varepsilon$ – замкнутая кривая без самопересечений и пересечений с контуром $\tilde L$. Пусть $\Omega_\delta^\pm = \Omega_\delta \cap \Omega^\pm$, при этом выполнено условие $\overline{\Omega}_\delta \cap (\tilde L \setminus L) = \emptyset$.

Доопределим функцию $\psi_Q(s)$:

$$\psi_Q(s) = -(2/\pi)\ln|M(s)-M(s_q)|, \quad M(s) \in \tilde L \setminus L, \tag{17}$$

и пусть $w(M) = U_{\tilde L}[\psi_Q](M)$, $M \in R^2 \setminus \tilde L$. Используя условия (14) из [1], получаем, что для любых $\mu \in (0,1)$, $\delta > 0$ выполнено условие $w \in H^{1,\mu}(\Omega_\delta^\pm)$. Тогда в силу леммы 2 в областях $\Omega_\delta^\pm$ функция u_0 представляется в виде $u_0 = 2kF(M-Q) + w + h$, где $k = 1$ в области Ω_δ^+ и $k = -1$ в области Ω_δ^-, $h \in H^{1,\mu}(\Omega_\delta^\pm)$, $\mu \in (0,1)$. Из леммы 4 работы [1] следует, что функция u_0 имеет на контуре L обобщенные краевые значения $u_0^\pm$ класса $D^{0\prime}(L)$ и обобщенные нормальные производные

$$(\partial u_0/\partial n)^\pm = \delta_{Q,L} + f_Q^\pm(s) \tag{18}$$

класса $D^{2\prime}(L)$, где $f_Q^\pm(s)$ – функции, непрерывные по s на интервале (a,b).

С другой стороны, для функции $\nu_{0,Q}$ справедливо равенство $d\nu_{0,Q}(s)/ds = \gamma_{0,Q}(s) = (2/\pi)R_1(s_q)(s-s_q)^{-1}/R_1(s)$ и в силу леммы 1 на множестве $R^2 \setminus L$ справедлива формула $\nabla u_0 = \vec V_L[\gamma_{0,Q}]$. Но тогда на каждой простой разомкнутой кривой $L' \subset L$, не содержащей точку Q, функция u имеет правильные нормальные производные, для которых в силу формулы (12) из [1] справедливо равенство $(\partial u_0/\partial n)^+ = (\partial u_0/\partial n)^- = f_Q(s)$, где $s \in (a,b)\setminus\{s_q\}$, $f_Q(s_0) = \int_L \gamma_{0,Q}(s)K_2(s,s_0)(s_0-s)^{-1}\,ds$.

Исследуем свойства функции $f_Q(s_0)$. Напомним, что для сингулярных интегралов справедливы формулы [3, с. 51]

$$\int\limits_a^b \frac{ds}{R_1(s)(s-s_q)(s-s_0)} = 0, \quad \int\limits_a^b \frac{ds}{R_1(s)(s-s_0)} = 0 \quad \text{при} \quad s_0 \in (a,b), \quad s_q \in (a,b), \quad s_0 \neq s_q. \tag{19}$$

Используя первую из формул (19), получаем $f_Q(s_0) = \int_L \gamma_{0,Q}(s)H_1(s,s_0)\,ds$, где $H_1(s,s_0) = (K_2(s,s_0) - K_2(s_0,s_0))/(s-s_0)$, причем из леммы 3 работы [1] следует, что $H_1(s,s_0) \in C^{m-2}(L\times L)$. Теперь, используя второе из равенств (19), имеем $f_Q(s_0) = (2/\pi)\times \int_L (R_1(s_q)/R_1(s))(H_1(s,s_0)-H_1(s_q,s_0))(s-s_q)^{-1}\,ds$. Отсюда следует, что функция $f_Q(s)$ имеет вид (16). Поскольку для любой функции $\varphi \in D^{2\prime}(L)$, такой, что $Q \notin \operatorname{supp}\varphi$, справедливы равенства $((\partial u/\partial n)^{\pm},\varphi) = \int_L \varphi(s)f_Q(s)\,ds$, заключаем, что $f_Q^{\pm}(s) = f_Q(s)$ и из формулы (18) следует формула (15).

Теперь построим функцию u_1, являющуюся классическим решением задачи (1), (2) с $f = -f_Q(s)$. Такая задача сводится к сингулярному интегральному уравнению $\int_L \gamma(s)K_2(s,s_0)(s_0-s)^{-1}\,ds = f(s_0)$, $s_0 \in (a,b)$, в классе функций $\gamma \in H^*(L)$, удовлетворяющих условию (8) (класс $H^*(L)$ определен в лемме 1). При этом если $\gamma = \gamma_{1,Q}(s)$ – решение последнего уравнения для правой части $f = -f_Q(s)$, то функция $u_1 = U_L[\nu_{1,Q}]$, где $d\nu_{1,Q}(s)/ds = \gamma_{1,Q}(s)$, является решением сформулированной краевой задачи.

Учитывая равенство $K_2(s_0,s_0) = -(2\pi)^{-1}$, перепишем рассматриваемое уравнение в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{\gamma(s)\,ds}{s_0-s} + \int\limits_L \gamma(s)K_3(s,s_0)\,ds = -f(s_0), \quad s_0 \in (a,b), \tag{20}$$

где $K_3(s,s_0) = (K_2(s,s_0) - K_2(s_0,s_0))/(s-s_0) \in C^{m-2}(L\times L)$. Напомним, что уравнение

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b \frac{\gamma(s)\,ds}{s_0-s} = f(s_0), \quad s_0 \in (a,b), \tag{21}$$

имеет для любой правой части $f \in H^{\mu}[a,b]$, $\mu \in (0,1]$, единственное решение в сформулированном классе функций, определяемое формулой $\gamma(s_0) = -(2/\pi)(R_1(s_0))^{-1}\int_L R_1(s)f(s)\times (s_0-s)^{-1}\,ds \equiv J[f](s_0)$ [3, с. 50]. Применив оператор J к уравнению (20) и умножив полученное уравнение на $R_1(s_0)$, находим уравнение для функции $\gamma^*(s) = R_1(s)\gamma(s)$:

$$\gamma^*(s_0) + \int\limits_L \gamma^*(s_1)B(s_0,s_1)\,ds_1 = g^*(s_0), \quad s_0 \in [a,b], \tag{22}$$

где $g^*(s) = -R_1(s)J[f](s)$, $B(s_0,s_1) = -(2/\pi)\int_L R(s)K_3(s,s_1)(s_0-s)^{-1}ds$. Так как при каждом $s_1 \in [a,b]$ выполнено равенство $\int_L B(s_0,s_1)\,ds_0 = 0$, то с учетом $\int_{-1}^1(\sqrt{1-x^2}/(x_0-x))\,dx = \pi x_0$ можно показать, что $B(s_0,s_1) \in C^{m-3}(L\times L)$. Теперь функцию $\gamma_{1,Q}(s)$ ищем в виде $\gamma_{1,Q}(s) = \tilde\gamma_{1,Q}(s)R_1(s)R_1(s_q)^{-1}$, где $\gamma^*(s_0) = \tilde\gamma_{1,Q}(s)$ – решение уравнения (22) для правой части $g^*(s) = \tilde g_Q(s) \equiv R_1(s)R_1(s_q)^{-1}J[f_Q](s)$, причем функцию $\tilde g_Q(s)$ можно доопределить на концах отрезка $[a,b]$ так, что $\tilde g_Q(s) \in C^{m-4}(L\times L)$ как функция от (s,s_q).

Рассмотрим уравнение (22) в пространстве $C[a,b]$, оно является уравнением Фредгольма второго рода. Докажем его однозначную разрешимость. Пусть $\gamma_0^*(s_0)$ – решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (22). Тогда функция $\gamma_0(s) = \gamma_0^*(s)/R_1(s) \in H^*(L)$ удовлетворяет условию (8). Подставим эту функцию в левую часть уравнения (20). С учетом второго из равенств (19) в правой части возникнет функция $f = f_0(s_0) \in H^{\mu}[a,b]$, $\mu > 0$, причем $J[f_0] \equiv 0$. Это означает, что функция $\gamma(s) = f_0(s)R_1(s)$ – решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (21), ограниченное на отрезке $[a,b]$. Но такое решение является единственным и поэтому $f(s) \equiv 0$ на $[a,b]$. Тогда функция $u = U_L[\gamma_0]$ – классическое решение краевой задачи (1), (2) с однородным граничным условием, удовлетворяющее условию (4). В силу единственности решения такой задачи заключаем, что $u \equiv 0$ в области $R^2 \setminus L$ и, следовательно, $\gamma_0(s) \equiv 0$ на (a,b). Поэтому решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (22), единственно, а значит, это уравнение однозначно разрешимо в $C[a,b]$.

Таким образом, функция $\tilde{\gamma}_{1,Q}$ однозначно находится из уравнения (22) и, как и в случаях А) и Б), получаем, что $\tilde{\gamma}_{1,Q}(s) \in C^{m-4}(L \times L)$.

Для доказательства условия (3) из [1] напомним, что если $\vec{w}(M) = \vec{V}_L[\gamma](M)$, $\gamma \in H^*(L)$, то комплексная функция $w(z) = w_1(M) - iw_2(M)$, $M = (x_1, x_2)$, $z = x_1 + ix_2$, является аналитической при $z \notin L$ и представляется интегралом Коши $w(z) = (2\pi i)^{-1} \int_L (\gamma(s)/(z - z(s)))\, ds$, где $z(s) = x_1(s) + ix_2(s) \in L$. Поэтому при каждом $Q = M(s_q)$, $s_q \in (a, b)$, функция $\vec{w} = \nabla u_{Q,L} = \vec{V}_L[\gamma_Q]$ удовлетворяет на концах кривой условиям (3) из [1] с $\alpha = 1/2$ в силу оценок для интеграла Коши вблизи концов контура интегрирования [5, с. 76]. Теорема доказана.

Зависимость фундаментальных решений от точки Q уточняет

Лемма 3. *А) Если L – замкнутая кривая класса C^3, то функция $u_{Q,L}(M)$ представляется в виде*

$$u_{Q,L}(M) = k(\pi)^{-1} \ln|M - Q| + u^*_{Q,L}(M), \tag{23}$$

где $k = 1$ для внешней задачи, $k = -1$ для внутренней задачи, функцию $u^*_{Q,L}(M)$ можно доопределить на контуре L так, что $u^*_{Q,L}(M) \in C(\overline{G} \times L)$, $\partial u^*_{Q,L}(M)/\partial x_i \in C(\overline{G} \times L)$ как функции от (M, Q), $i = 1, 2$;

Б) если L – разомкнутая кривая класса C^5, то найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta \in (0, T/2)$ функция $u_{Q,L}(M)$ представляется на множествах $\Omega^{\pm}_{\delta} = \{M = M_\varepsilon(s) | \pm\varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ s \in (a + \delta, b - \delta)\}$ в виде (23), где ε_0 – константа, введенная при доказательстве теоремы 2, $M_\varepsilon(s)$ – точки, определяемые формулой (5), $k = \pm 1$ для множеств $\Omega^{\pm}_{\delta}$ соответственно, и для каждого из множеств $\Omega^{\pm}_{\delta}$ функцию $u^*_{Q,L}$ можно доопределить на контуре L так, что $u^*_{Q,L}(M) \in C(\overline{\Omega}^{\pm}_{\delta} \times L)$, $\partial u^*_{Q,L}(M)/\partial x_i \in C(\overline{\Omega}^{\pm}_{\delta} \times L)$ как функции от (M, Q), $i = 1, 2$.

Доказательство. А) Пусть контур L замкнутый. По теореме 2 функцию $u_{Q,L}(M)$ можно представить в виде (23) так, что $u^*_{Q,L}(M) = V_L[\nu_Q]$, где $\nu_Q \in C^1(L \times L)$ как функция от (s, s_q). Тогда при каждом $Q \in L$ $u^*_{Q,L}(M) \in H^{1,\mu}(G)$ как функция от M, и если $Q' \to Q$, то $\nu_{Q'} \to \nu_Q$ как функции от s в $H^{\mu}(L)$. Но тогда $u^*_{Q',L}(M) \to u^*_{Q,L}(M)$ в $H^{1,\mu}(G)$, откуда и следует требуемое утверждение.

Б) Пусть L – разомкнутый контур. Так же, как и при доказательстве теоремы 2, достроим контур L до замкнутого контура $\tilde{L}$. Будем считать, что контур $\tilde{L}$ состоит из точек $M(s)$, $s \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$. Возьмем $\delta \in (0, T/2)$ и рассмотрим поведение функции $u_{Q,L}$ в областях $\Omega^{\pm}_{\delta}$.

Представим функцию $u_{Q,L}$ в виде $u_{Q,L} = u_0 + u_1$, как указано в теореме 2. При этом в областях $\Omega^{\pm}_{\delta}$ функцию u_0 можно представить в виде $u_0 = w - g$, где, как и в теореме 2, $w = U_L[\psi_Q]$, функция ψ_Q определяется формулами (14), (17), $g(M) = U_{\tilde{L}}[\chi_Q]$, $\chi_Q(s) = 2F(M(s) - Q)$. По лемме 2 функцию g можно представить в виде $g(M) = 2kF(M - Q) + g^*(M)$, $M \in \Omega^{\pm}_{\delta}$, где $k = \pm 1$ при $M \in \Omega^{\pm}_{\delta}$ соответственно, $g^*(M) = V_{\tilde{L}}[\chi^*_Q]$, $\chi^*_Q(s) = 2K_1(s, s_q) \in C^{m-2}(L \times L)$. Так же, как и при доказательстве п. А), получаем $g^* \in C^1(\Omega^{\pm}_{\delta} \times L)$ как функция от (M, s_q). Тогда $u_{Q,L}(M) = -2kF(M - Q) - g^*(M) + u_2(M)$, где $u_2 = U_{\tilde{L}}[\nu_{2,Q}]$, $\nu_{2,Q}(s) = \psi_Q(s) + \nu_{1,Q}(s)$ при $M(s) \in L$, $\nu_{2,Q}(s) = \psi_Q(s)$ при $M(s) \in \tilde{L} \setminus L$, $\nu_{1,Q}$ – функция из теоремы 2. При этом $\nu_{2,Q} \in C^2[a + \delta/2, b - \delta/2] \times [a, b]$ как функция от (s, s_q), $\partial\nu_{2,Q}/\partial s_q \in L_1[\tilde{a}, \tilde{b}]$ как функция от s и $\|\partial\nu_{1,Q}/\partial s_q\|_{L_1[\tilde{a},\tilde{b}]} \le C$, где C не зависит от Q. Поэтому $u_2 \in C[\overline{\Omega}^{\pm}_{\delta} \times L]$ как функция от (M, s_q). Лемма доказана.

4. Интегральное представление решений через фундаментальные решения. Теперь рассмотрим краевую задачу (1), (2) в случае $f \in L_1(L)$. Докажем, что решение такой задачи существует и представляется в виде суперпозиции фундаментальных решений.

Теорема 3. *Пусть L – гладкая кривая рассматриваемого вида класса C^m, где $m \ge 3$ для замкнутого контура и $m \ge 5$ для разомкнутого контура, $f \in L_1(L)$ и в случае замкнутого контура выполнено условие (3). Тогда существует функция $u(M)$, имеющая на контуре L обобщенные краевые значения и обобщенные нормальные производные класса $D^{2\prime}(L)$ и являю-*

щаяся обобщенным решением задачи (1), (2), причем это решение представляется формулой

$$u(M) = \int\limits_L f(s_q) u_{Q,L}(M)\, ds_q, \quad M \in G. \tag{24}$$

Доказательство. Построим функцию $u(M)$ по формуле (24). Заметим, что из представления функции $u_{Q,L}(M)$, доказанного в теореме 2, следует, что при каждом $M \in G$ функция $u_{Q,L}(M)$ и ее производные всех порядков в точке M непрерывно зависят от Q. Поэтому функция $u(M)$ существует, бесконечно дифференцируема и гармоническая в области G.

Докажем существование на контуре L обобщенных краевых значений и обобщенных нормальных производных класса $D^{2\prime}(L)$ функции $u(M)$. Пусть D – счетно-компактное подмножество в $D^{2\prime}(L)$. Рассмотрим интегралы $I_\varepsilon(\varphi) = \int_L \varphi(s) u(M_\varepsilon(s))\, ds$ и $J_\varepsilon(\varphi) = \int_L \varphi(s)(\partial u(M_\varepsilon(s))/\partial n(s))\, ds$, $\varepsilon \neq 0$. Подставляя в эти интегралы функцию u в виде (24) и меняя в возникших двойных интегралах порядок интегрирования, можем записать: $I_\varepsilon(\varphi) = \int_L f(s_q) g_\varepsilon(s_q, \varphi)\, ds_q$, $J_\varepsilon(\varphi) = \int_L f(s_q) h_\varepsilon(s_q, \varphi)\, ds_q$, где $g_\varepsilon(s_q, \varphi) = \int_L \varphi(s) u_Q(M_\varepsilon(s)) ds$, $h_\varepsilon(s_q, \varphi) = \int_L \varphi(s)(\partial u_Q(M_\varepsilon(s))/\partial n(s))\, ds$. Из леммы 3 с учетом леммы 3 работы [1] следует существование пределов $g_0^\pm(s_q, \varphi) = \lim\limits_{\varepsilon \to \pm 0} g_\varepsilon(s_q, \varphi)$ и $h_0^\pm(s_q, \varphi) = \lim\limits_{\varepsilon \to \pm 0} h_\varepsilon(s_q, \varphi)$, понимаемых в смысле равномерной сходимости по (Q, φ) на множестве $L \times D$. При этом, поскольку $(\partial u_{Q,L}/\partial n)^\pm = \delta_{Q,L}$, выполнено равенство $h_0^\pm(s_q, \varphi) = \varphi(s_q)$ в случае разомкнутого контура и $h_0^\pm(s_q, \varphi) = \varphi(s_q) - (1/T) \int_L \varphi(s)\, ds$ в случае замкнутого контура. Но тогда существуют пределы $\lim\limits_{\varepsilon \to \pm 0} I_\varepsilon$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to \pm 0} J_\varepsilon$, понимаемые в смысле равномерной сходимости по φ на множестве D. При этом с учетом условия (3) в случае замкнутого контура справедливо равенство $\lim\limits_{\varepsilon \to \pm 0} J_\varepsilon = \int_L f(s_q) \varphi(s_q)\, ds_q$, что и означает выполнение граничного условия (2). Теорема доказана.

Заметим, что в случае замкнутого контура решение, построенное в теореме 3, удовлетворяет условиям $j_1) - j_3)$, сформулированным в теореме 1 из [1]. Действительно, из выражения (23) следует, что функция u представляется в виде $u(M) = -2V_L[f](M) + \int_L f(s_q) u^*_{Q,L}(M)\, ds_q$. Второе слагаемое есть функция от M, которую можно непрерывно продолжить на контур L. Тогда выполнено условие $j_3)$ и из леммы 5 работы 1 следует, что краевые значения $u^\pm$ существуют в классе $D^{0\prime}$ и $u^\pm \in L_1(L)$. Из последнего выражения легко доказать и выполнение условия $u \in L_1^{\mathrm{loc}}(R^2)$. Поскольку в случае внешней задачи функции $u_Q(M)$ удовлетворяют условию (4) равномерно по Q, функция u также удовлетворяет условию (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сетуха А.В.* // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 9. С. 1172–1182.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1967.
3. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М., 1995.
4. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
5. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

Военный авиационно-технический университет,
г. Москва

Поступила в редакцию
11.03.2002 г.