



Общероссийский математический портал

Е. К. Макаров, И. В. Марченко, Н. В. Семерикова, Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с интегрируемыми на полуоси возмущениями,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 2, 215–224

<https://www.mathnet.ru/de11227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

15 мая 2025 г., 19:35:14



ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ ДЛЯ СТАРШЕГО ПОКАЗАТЕЛЯ
ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ
С ИНТЕГРИРУЕМЫМИ НА ПОЛУОСИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© 2005 г. Е. К. Макаров, И. В. Марченко, Н. В. Семерикова

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей коэффициентов A такой, что $\|A(t)\| \leq M < +\infty$ при всех $t \geq 0$, и показателями $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$. Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

с кусочно-непрерывной матрицей возмущений Q , удовлетворяющей условию интегральной ограниченности [1, с. 252], т.е. неравенству $\int_t^{t+1} \|Q(\tau)\| d\tau \leq C_Q < +\infty$ при всех $t \geq 0$, где C_Q – некоторая константа, зависящая от Q . Для показателей системы (2) будем использовать обозначения $\lambda_1(A + Q) \leq \dots \leq \lambda_n(A + Q)$.

Одной из важных задач современной теории характеристических показателей является задача построения достижимых верхних оценок для старшего показателя возмущенной системы (2), т.е. величин $\sup_Q \lambda_n(A + Q)$, где возмущение Q предполагается принадлежащим какому-либо классу малости.

Оценка сверху для старшего показателя системы (2) с малыми возмущениями – так называемый центральный показатель $\Omega(A)$ системы (1) – была построена в [2] (см. также [1, с. 114]). Достижимость этой оценки доказана В.М. Миллионщиковым в [3] с помощью его, ставшего уже классическим, метода поворотов [3, 4, см. также 5, с. 90]. Старший сигма-показатель $\nabla_\sigma(A)$, являющийся достижимой оценкой сверху для старшего показателя системы (2) с σ -возмущениями, т.е. возмущениями, удовлетворяющими при всех $t \geq 0$ неравенству $\|Q(t)\| \leq N_Q e^{-\sigma t}$ с фиксированным $\sigma > 0$ и некоторой постоянной N_Q , зависящей от Q , вычислен в [6], где установлено равенство $\nabla_\sigma(A) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \xi_m(\sigma)$, в котором последовательность $\xi_m(\sigma)$ при $m > 1$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $\xi_m(\sigma) = \max_{k < m} (\ln \|X(m, k)\| + \xi_k(\sigma) - \sigma k)$, $m, k \in \mathbb{N}$, с начальным условием $\xi_1(\sigma) = 0$. В [7] рассмотрен класс всех экспоненциально убывающих возмущений и вычислен экспоненциальный показатель $\nabla_0(A)$, оценивающий показатели систем с такими возмущениями. Промежуточные случаи, когда возмущение затухает на бесконечности, но скорость его убывания медленнее, чем экспоненциальная, рассмотрены в [8, 9]. В работе [10] для старшего показателя системы (2) с абсолютно интегрируемыми на полуоси $[0, +\infty[$ возмущениями, которые определяются условием $\int_0^\infty \|Q(t)\| dt < +\infty$, установлена достижимая оценка $\lambda_n(A + Q) \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \xi_m$, где последовательность ξ_m при $m > 1$, $m \in \mathbb{N}$, определяется рекуррентным соотношением $\xi_m = \max_{k < m} (\ln \|X(m, k)\| + \xi_k - \ln k)$, $k \in \mathbb{N}$, с начальным условием $\xi_1 = 0$. Точные границы подвижности показателей Ляпунова при малых в среднем возмущениях найдены в [11]. В [12] доказана достижимость верхнего центрального показателя для систем с возмущениями, стремящимися к нулю на бесконечности.

В настоящей работе получены достижимые оценки сверху для старшего показателя системы (2) с возмущениями, суммируемыми на полуоси с монотонным положительным весом, а также с возмущениями, суммируемыми со степенью. Указанные оценки по своей структуре

аналогичны тем, которые построены в [6, 8–10], но в настоящей работе с целью получения более компактных формул для них принято мультипликативное представление, т.е. в их записи используются величины $\eta_k = \exp \xi_k$.

Замечание 1. При рассмотрении постоянно действующих возмущений, малость которых определяется различными интегральными условиями, естественно принимать во внимание не только те из них, которым соответствует ограниченная матрица Q , но и те, для которых она неограничена при $t \geq 0$. Чтобы при этом не выйти за пределы класса систем, у которых каждое решение имеет конечный показатель, на матрицу возмущений наложено условие интегральной ограниченности. Напротив, матрица коэффициентов исходной системы предполагается ограниченной, поскольку [1, с. 253] всегда существует замена времени, приводящая систему с интегрально ограниченными коэффициентами к системе, коэффициенты которой ограничены в обычном смысле. В случае системы (2) такая замена оказывается существенно зависящей от выбора матрицы возмущений Q , поэтому в настоящей работе она не используется.

Пусть $X(t, \tau)$ и $Y(t, \tau)$ – матрицы Коши систем (1) и (2) соответственно. Обозначим $X_k = X(k+1, k)$, $Y_k = Y(k+1, k)$, где $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Лемма 1. *Каково бы ни было $k \in \mathbb{N}_0$, для матрицы Коши системы (2) имеет место представление $Y_k = X_k(E + V_k)$, причем справедливы неравенства $\|V_k\| \leq b \int_k^{k+1} \|Q(\tau)\| d\tau \leq bC_Q$, где $b := e^{2M+C_Q}$.*

Доказательство. Применяя формулу Коши, матрицу $Y(t, s)$ можно представить в виде $Y(t, s) = X(t, s)(E + \int_s^t X(s, \tau)Q(\tau)Y(\tau, s) d\tau)$. Положив $V_k = \int_k^{k+1} X(k, \tau)Q(\tau)Y(\tau, k) d\tau$, будем иметь требуемое равенство $Y_k = X_k(E + V_k)$. Оценим теперь величину $\|V_k\|$. Согласно [13, с. 14], для матрицы Коши системы (2) при любых $t > s \geq 0$ справедлива оценка $\|Y(t, s)\| \leq \exp(\int_s^t \|A(\tau) + Q(\tau)\| d\tau)$. Отсюда при $1 \geq t-s > 0$, учитывая свойства матриц A и Q , получаем неравенства $\|Y(t, s)\| \leq \exp(\int_s^t (\|A(\tau)\| + \|Q(\tau)\|) d\tau) \leq e^{M+C_Q}$ и $\|X(s, t)\| \leq e^M$. Таким образом, имеем оценку

$$\|V_k\| \leq \int_k^{k+1} \|X(k, \tau)\| \|Q(\tau)\| \|Y(\tau, k)\| d\tau \leq \int_k^{k+1} e^M \|Q(\tau)\| e^{M+C_Q} d\tau = b \int_k^{k+1} \|Q(\tau)\| d\tau \leq bC_Q.$$

Лемма 1 доказана.

Обозначим $\langle m \rangle = \{0, 1, \dots, m-1\}$, где $m \in \mathbb{N}$. Пусть d – произвольное подмножество множества $\langle m \rangle$. Пронумеруем элементы множества d в порядке возрастания $d_1 < d_2 < \dots < d_{|d|} =: H(d)$, где $|d|$ – число элементов множества d , тогда $d = \{d_1, d_2, \dots, H(d)\}$. Пусть $B_i, U_i, i \in \langle m \rangle$, – некоторые последовательности вещественных квадратных матриц одного порядка. Каждому $d \subset \langle m \rangle$ поставим в соответствие матрицу $S_d^m(B, U) = \prod_{i=0}^{m-1} B_i W_i(d)$, где $W_i(d) = U_i$, если $i \in d$, и $W_i(d) = E$, если $i \notin d$. Здесь и далее будем считать, что символ \prod обозначает произведение, упорядоченное по убыванию номеров.

Лемма 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Для любых двух последовательностей квадратных матриц одного порядка $B_i, U_i, i \in \langle m \rangle$, справедливо равенство $\sum_{d \subset \langle m \rangle} S_d^m(B, U) = \prod_{i=0}^{m-1} B_i(E + U_i)$.*

Доказательство. Возьмем произвольное $m \in \mathbb{N}$ и разобьем множество $2^{\langle m+1 \rangle}$ всех подмножеств множества $\langle m+1 \rangle$ на два непересекающихся класса $G(m)$ и $\bar{G}(m)$. К $G(m)$ отнесем все элементы множества $2^{\langle m+1 \rangle}$, не содержащие m , к $\bar{G}(m)$ – все остальные элементы множества $2^{\langle m+1 \rangle}$.

Так как любое $d \in G(m)$ состоит из элементов множества $\langle m+1 \rangle \setminus \{m\} = \langle m \rangle$, то $d \subset \langle m \rangle$. С другой стороны, для любого $d \subset \langle m \rangle$ выполняется $d \subset \langle m+1 \rangle$ и $m \notin d$, т.е. $d \in G(m)$. Таким образом, $G(m) = 2^{\langle m \rangle}$.

Для любого элемента $d \in \bar{G}(m)$ имеем $d^* := d \setminus \{m\} \subset \langle m \rangle$, поэтому справедливо равенство $d = d^* \cup \{m\}$, где $d^* \in 2^{\langle m \rangle}$. Обратно, для любого $d^* \subset \langle m \rangle$ выполнено $d := d^* \cup \{m\} \subset \langle m+1 \rangle$, т.е. $d \in 2^{\langle m+1 \rangle}$ и $d \in \bar{G}(m)$. Таким образом, $\bar{G}(m) = \{d \cup \{m\} : d \in 2^{\langle m \rangle}\}$ и справедлива

формула

$$2^{\langle m+1 \rangle} = 2^{\langle m \rangle} \sqcup \{d \cup \{m\} : d \in 2^{\langle m \rangle}\} = G(m) \sqcup \bar{G}(m). \tag{3}$$

Теперь докажем требуемое равенство методом математической индукции. При $m = 1$ имеем соотношения $\sum_{d \subset \langle 1 \rangle} S_d^1(B, U) = B_0 E + B_0 U_0 = B_0(E + U_0) = \prod_{i=0}^0 B_i(E + U_i)$. Пусть утверждение леммы имеет место при $m = k$. Проверим его выполнение при $m = k + 1$. В силу формулы (3) справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sum_{d \subset \langle k+1 \rangle} S_d^{k+1}(B, U) &= \sum_{d \in G(k)} S_d^{k+1}(B, U) + \sum_{d \in \bar{G}(k)} S_d^{k+1}(B, U) = \\ &= B_k E \sum_{d \subset \langle k \rangle} \prod_{i=0}^{k-1} B_i W_i(d) + B_k U_k \sum_{d \subset \langle k \rangle} \prod_{i=0}^{k-1} B_i W_i(d) = \\ &= B_k(E + U_k) \sum_{d \subset \langle k \rangle} \prod_{i=0}^{k-1} B_i W_i(d) = B_k(E + U_k) \sum_{d \subset \langle k \rangle} S_d^k(B, U). \end{aligned}$$

Учитывая предположение индукции, получаем

$$\sum_{d \subset \langle k+1 \rangle} S_d^{k+1}(B, U) = B_k(E + U_k) \prod_{i=0}^{k-1} B_i(E + U_i) = \prod_{i=0}^k B_i(E + U_i).$$

Доказательство леммы 2 завершено.

Следствие 1. Для любой последовательности положительных чисел $u_i, i \in \langle m \rangle$, справедливы соотношения $\sum_{d \subset \langle m \rangle} \prod_{i \in d} u_i = \prod_{i=0}^{m-1} (1 + u_i) \leq \exp \sum_{i=0}^{m-1} u_i$, где предполагается, что $\prod_{i \in \emptyset} u_i = 1$.

Доказательство. При $B_i = 1, U_i = u_i, i \in \langle m \rangle$, по лемме 2 получаем указанное равенство. В силу соотношения $1 + u \leq e^u$, справедливого для любого $u \in \mathbb{R}$, при $u_i > 0, i \in \langle m \rangle$, выполняется неравенство $0 < 1 + u_i \leq e^{u_i}$, из которого вытекает требуемое. Следствие 1 доказано.

Пусть зафиксировано некоторое возмущение Q , удовлетворяющее сделанным выше предположениям. Определим множители $V_i, i \in \mathbb{N}_0$, соответствующие этому возмущению в силу леммы 1, и рассмотрим матрицы $S_d^m := S_d^m(X, V), m \in \mathbb{N}$. Поскольку $X_{k+s} \cdots X_{k+1} X_k = X(k+s+1, k)$ при любых $k, s \in \mathbb{N}_0$, перемножая все X_k , такие, что $k \geq H(d), k < d_1$ или $d_{i+1} > k \geq d_i, i = 1, \dots, |d|$, т.е. те X_k , между которыми нет промежуточных множителей V_k , для S_d^m получаем представление $S_d^m = X(m, H(d)) V_{H(d)} \cdots X(d_2, d_1) V_{d_1} X(d_1, 0)$. Отсюда вытекает оценка

$$\|S_d^m\| \leq \|X(m, H(d))\| \|V_{H(d)}\| \cdots \|X(d_2, d_1)\| \|V_{d_1}\| \|X(d_1, 0)\| =: Z_d(m). \tag{4}$$

Возьмем теперь произвольную последовательность положительных чисел $h_i, i \in \mathbb{N}_0$, и построим последовательность матриц $\tilde{V}_i = h_i V_i, i \in \mathbb{N}_0$. Тогда в силу положительной однородности нормы будем иметь неравенства $\|S_d^m(X, \tilde{V})\| \leq Z_d(m) \prod_{i \in d} h_i =: Z_d^h(m)$. Величины $Z_d^h(m)$ играют основную роль в проводимых ниже оценках.

Теорема 1. Пусть заданы положительные числа $h_i, i \in \mathbb{N}_0$, и $K(m), m \in \mathbb{N}$, такие, что выполнено неравенство $\sum_{i=0}^{m-1} h_i^{-1} \leq K(m)$. Тогда для матрицы Коши системы (2) имеет место оценка $\|Y(m, 0)\| \leq e^{K(m)} I_m^h$, где $I_m^h := \max_{d \subset \langle m \rangle} Z_d^h(m), m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. При всяком $m \in \mathbb{N}$ матрицу Коши системы (2) можно представить в виде $Y(m, 0) = Y_{m-1} \cdots Y_1 Y_0$. Используя леммы 1 и 2, отсюда получаем соотношения

$$Y(m, 0) = \prod_{i=0}^{m-1} X_i(E + V_i) = \sum_{d \subset \langle m \rangle} S_d^m.$$

Согласно (4), имеем оценку

$$\|Y(m, 0)\| \leq \sum_{d \subset \langle m \rangle} \|S_d^m\| \leq \sum_{d \subset \langle m \rangle} Z_d(m). \quad (5)$$

Пусть числа $K(m)$ и $h_i > 0$, $i \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяют условию теоремы. Так как $Z_d^h(m) = Z_d(m) \prod_{i \in d} h_i$, то при всех $m \in \mathbb{N}$ выполнены соотношения $\|Y(m, 0)\| \leq \sum_{d \subset \langle m \rangle} Z_d(m) = \sum_{d \subset \langle m \rangle} (Z_d^h(m) \prod_{i \in d} h_i^{-1}) \leq \max_{d \subset \langle m \rangle} Z_d^h(m) \sum_{d \subset \langle m \rangle} \prod_{i \in d} h_i^{-1}$. Отсюда в силу следствия 1 имеем $\|Y(m, 0)\| \leq \max_{d \subset \langle m \rangle} Z_d^h(m) \exp \sum_{i=0}^{m-1} h_i^{-1} \leq e^{K(m)} \max_{d \subset \langle m \rangle} Z_d^h(m)$. Теорема 1 доказана.

Следствие 2. Если ряд $\sum_{i=0}^{\infty} h_i^{-1}$ сходится, то для матрицы Коши системы (2) справедлива оценка $\|Y(m, 0)\| \leq e^K I_m^h$, где $K = \sum_{i=0}^{\infty} h_i^{-1}$.

Установим связь полученных результатов с методом верхних функций.

Следствие 3. Пусть заданы функции $R: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ и $a: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для матрицы Коши системы (1) справедлива оценка $\ln \|X(t, s)\| \leq R(t) - R(s) + a(s)$. Пусть также заданы некоторые кусочно-непрерывные и интегрально ограниченные возмущения Q . Тогда при всех $m \in \mathbb{N}_0$ для матрицы Коши системы (2) выполняется неравенство $\|Y(m, 0)\| \leq e^{\tilde{K}(m)} e^{R(m)}$, где $\tilde{K}(m) = a(0) - R(0) + \sum_{i=0}^{m-1} \|V_i\| \exp a(i)$, а числа $\|V_k\|$ определяются согласно лемме 1.

Доказательство. Используя (4) и оценку для нормы матрицы Коши системы (1), указанную в условии следствия, получаем оценку $Z_d(m) \leq \exp(R(m) - R(H(d)) + a(H(d)) + R(H(d)) + \dots + R(d_2) - R(d_1) + a(d_1) + R(d_1) - R(0) + a(0)) \prod_{i \in d} \|V_i\|$. Отсюда после взаимного уничтожения членов с противоположными знаками в показателе экспоненты будем иметь соотношения $Z_d(m) \leq \exp(R(m) - R(0) + a(0)) \exp(\sum_{i \in d} a(i)) \prod_{i \in d} \|V_i\| = \exp(R(m) - R(0) + a(0)) \prod_{i \in d} (\|V_i\| \exp a(i))$. В силу (5) справедливы неравенства $\|Y(m, 0)\| \leq \sum_{d \subset \langle m \rangle} Z_d(m) \leq \exp(R(m) - R(0) + a(0)) \sum_{d \subset \langle m \rangle} \prod_{i \in d} (\|V_i\| \exp a(i))$, из которых требуемая оценка получается в результате применения следствия 1. Следствие 3 доказано.

Чтобы получить формулу для рекуррентного вычисления максимума $\max_{d \subset \langle m \rangle} Z_d^h(m)$, введем в рассмотрение величину $\Gamma_d^\beta(m) = \gamma_0 \|X(m, H(d))\| \beta(H(d)) \dots \|X(d_2, d_1)\| \beta(d_1) \|X(d_1, 0)\|$, где $\beta: \mathbb{N}_0 \rightarrow [0, +\infty[$ и $\gamma_0 > 0$.

Лемма 3. Последовательность чисел $\eta_m = \max_{d \subset \langle m \rangle} \Gamma_d^\beta(m)$, $m \in \mathbb{N}$, при $m > 1$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $\eta_m = \max_{k < m} (\|X(m, k)\| \beta(k) \eta_k)$, где $k \in \mathbb{N}$, с начальным условием $\eta_1 = \gamma_0 \|X(1, 0)\| \max\{1, \beta(0)\}$.

Доказательство. Пусть множество $D(k) \subset \langle k \rangle$ реализует $\max_{d \subset \langle k \rangle} \Gamma_d^\beta(k)$, т.е. $\Gamma_{D(k)}^\beta(k) = \eta_k$ при всяком $k \in \mathbb{N}$. Тогда имеем соотношения

$$\|X(m, k)\| \beta(k) \eta_k = \|X(m, k)\| \beta(k) \Gamma_{D(k)}^\beta(k) = \Gamma_{D'}^\beta(m) \leq \max_{d \subset \langle m \rangle} \Gamma_d^\beta(m) = \eta_m, \quad (6)$$

где $D' = D(k) \cup \{k\}$, $0 < k < m$. Это означает, что $\eta_m \geq \max_{k < m} (\|X(m, k)\| \beta(k) \eta_k)$.

С другой стороны, справедливы равенства $\eta_m = \Gamma_{D(m)}^\beta(m) = \|X(m, j)\| \beta(j) \Gamma_{D^*}^\beta(j)$, где $j = H(D(m))$ – наибольший элемент множества $D(m)$, $D^* = D(m) \setminus \{j\}$. Учитывая, что $D^* \subset \langle j \rangle$, имеем неравенство $\Gamma_{D^*}^\beta(j) \leq \max_{d \subset \langle j \rangle} \Gamma_d^\beta(j) = \eta_j$. Предположим, что $\Gamma_{D^*}^\beta(j) < \eta_j$. Тогда, используя оценку (6), приходим к противоречию

$$\eta_m = \|X(m, j)\| \beta(j) \Gamma_{D^*}^\beta(j) < \|X(m, j)\| \beta(j) \eta_j \leq \eta_m.$$

Таким образом, $\Gamma_{D^*}^\beta(j) = \eta_j$ и, следовательно, $\eta_m = \|X(m, j)\| \beta(j) \eta_j$. Так как

$$\eta_m \geq \max_{k < m} (\|X(m, k)\| \beta(k) \eta_k)$$

и $0 < j < m$, это означает, что $\eta_m = \max_{k < m} (\|X(m, k)\| \beta(k) \eta_k)$.

Наконец, если $m = 1$, то по определению η_m имеем равенства

$$\eta_1 = \max_{d \subset (1)} \Gamma_d^\beta(1) = \max\{\gamma_0 \|X(1, 0)\| \beta(0), \gamma_0 \|X(1, 0)\|\} = \gamma_0 \|X(1, 0)\| \max\{1, \beta(0)\}.$$

Лемма 3 доказана.

Замечание 2. Множество $D(k)$ в доказанной лемме 3 может быть неединственным. В этом случае в качестве $D(k)$ следует взять любое из множеств, реализующих указанный максимум.

Следствие 4. Последовательность чисел $I_m^h = \max_{d \subset (m)} Z_d^h(m)$, $m \in \mathbb{N}$, при $m > 1$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $I_m^h = \max_{k < m} (\|X(m, k)\| h_k \|V_k\| I_k^h)$, где $k \in \mathbb{N}$, с начальным условием $I_1^h = \|X(1, 0)\| \max\{1, h_0 \|V_0\|\}$.

Доказательство. Так как величина $Z_d^h(m)$ совпадает с $\Gamma_d^\beta(m)$ при $\beta(k) = h_k \|V_k\|$ и $\gamma_0 = 1$, то, согласно лемме 3, числовая последовательность $I_m^h = \max_{d \subset (m)} Z_d^h(m)$ удовлетворяет указанному рекуррентному соотношению при $I_1^h = \|X(1, 0)\| \max\{1, h_0 \|V_0\|\}$. Следствие 4 доказано.

Лемма 4. Если ряд $\sum_{k=0}^\infty a_k$ с неотрицательными членами сходится, то при любом $m_0 \in \mathbb{N}_0$ выполняется равенство $\lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \sum_{k=m_0}^m ka_k = 0$.

Доказательство. Выберем произвольные $\varepsilon > 0$ и $m_0 \in \mathbb{N}_0$. Так как ряд $\sum_{k=0}^\infty a_k$ сходится и все a_k , $k \in \mathbb{N}_0$, неотрицательные, то, согласно признаку Коши сходимости ряда, для этого ε найдется такое $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $n_\varepsilon > m_0$, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$, таких, что $m > n \geq n_\varepsilon$, справедливо неравенство $\sum_{k=n}^m a_k < \varepsilon$. Тогда $\sum_{k=m_0}^m ka_k = \sum_{k=m_0}^{n_\varepsilon-1} ka_k + \sum_{k=n_\varepsilon}^m ka_k < \sum_{k=m_0}^{n_\varepsilon-1} ka_k + m\varepsilon$. Разделив полученное неравенство на m и перейдя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим $\lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \sum_{k=m_0}^m ka_k \leq \varepsilon$. В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ имеем требуемое. Лемма 4 доказана.

Теорема 2. Пусть заданы возмущения Q и положительная функция β , определенная на множестве \mathbb{N}_0 , такая, что справедливо равенство $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \beta^{-1}(k) \|V_k\| = 0$, в котором матрицы V_k определяются согласно лемме 1. Тогда для старшего показателя системы (2) выполняется оценка $\lambda_n(A + Q) \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$, где последовательность η_m , $m \in \mathbb{N}$, определяется равенством $\eta_m = \max_{d \subset (m)} \Gamma_d^\beta(m)$, причем величина $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$ не зависит от выбора $\gamma_0 > 0$.

Доказательство. Пусть $P = \{k \in \mathbb{N}_0 : V_k \neq 0\}$. Построим последовательность h_k следующим образом. Если $k \in P$, то положим $h_k = \beta(k) \|V_k\|^{-1}$. Если же $k \notin P$, то $h_k > 0$ выберем такими, чтобы выполнялось неравенство $L := \sum_{k \notin P} h_k^{-1} < +\infty$. Тогда $\sum_{k=0}^{m-1} h_k^{-1} \leq \sum_{k=0}^{m-1} \beta^{-1}(k) \|V_k\| + L =: K(m) < +\infty$ и по теореме 1 справедлива оценка $\|Y(m, 0)\| \leq e^{K(m)} I_m^h$. Возьмем произвольное $\gamma_0 > 0$ и по заданной функции β образуем величину $\Gamma_d^\beta(m)$. В соответствии со сделанным выбором h_k выполняются неравенства $\beta(k) \geq h_k \|V_k\|$, $k \in \mathbb{N}_0$, так как $\beta(k) = h_k \|V_k\|$ при $k \in P$ и $\beta(k) \geq 0 = h_k \|V_k\|$ при $k \notin P$. Поэтому, согласно (4), при любом $d \subset (m)$ имеют место соотношения

$$Z_d^h(m) \leq \|X(m, H(d))\| \beta(H(d)) \cdots \|X(d_2, d_1)\| \beta(d_1) \|X(d_1, 0)\| = \gamma_0^{-1} \Gamma_d^\beta(m),$$

из которых вытекает неравенство $I_m^h = \max_{d \subset (m)} Z_d^h(m) \leq \gamma_0^{-1} \max_{d \subset (m)} \Gamma_d^\beta(m) = \gamma_0^{-1} \eta_m$. Таким образом, получаем оценку $\|Y(m, 0)\| \leq e^{K(m)} I_m^h \leq \gamma_0^{-1} e^{K(m)} \eta_m$. Согласно [1, с. 537; 13, с. 47, 51], имеют место равенства $\lambda_n(A + Q) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|Y(t, 0)\| = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \|Y(m, 0)\|$ и, следовательно, справедлива оценка $\lambda_n(A + Q) \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} K(m) + \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$, так как $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} K(m) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \beta^{-1}(k) \|V_k\| = 0$ по условию теоремы. Величина

$\gamma_0^{-1}\Gamma_d^\beta(m)$ не зависит от γ_0 по построению. Это означает, что и величина $\gamma_0^{-1}\eta_m$ тоже не зависит от $\gamma_0 > 0$. Но $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln(\gamma_0^{-1}\eta_m)$, и поэтому при всех $\gamma_0 > 0$ предел $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$ имеет одно и то же значение. Теорема 2 доказана.

Следствие 5. В условиях теоремы 2 для старшего показателя возмущенной системы (2) имеет место неравенство $\lambda_n(A+Q) \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$, в котором последовательность η_m при $m > 1$ определяется рекуррентным соотношением $\eta_m = \max_{k < m} (\|X(m, k)\| \beta(k) \eta_k)$, $k, m \in \mathbb{N}$, с произвольным начальным условием $\eta_1 > 0$, причем величина $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$ не зависит от выбора $\eta_1 > 0$.

Доказательство. По лемме 3 последовательность $\eta_m = \max_{d \subset \langle m \rangle} \Gamma_d^\beta(m)$ при $m > 1$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\eta_m = \max_{k < m} (\|X(m, k)\| \beta(k) \eta_k), \quad k, m \in \mathbb{N},$$

с начальным условием $\eta_1 = \gamma_0 \|X(1, 0)\| \max\{1, \beta(0)\}$. Поскольку $\gamma_0 > 0$ произвольно и $\|X(1, 0)\| \max\{1, \beta(0)\} > 0$, то $\eta_1 > 0$ также может быть выбрано произвольным образом без изменения величины $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$. Отсюда и из теоремы 2 имеем требуемое. Следствие 5 доказано.

Следствие 6. Если возмущения Q удовлетворяют условию $\int_0^\infty \|Q(t)\| dt < +\infty$, то $\lambda_n(A+Q) \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$, где последовательность η_m при $m > 1$ определяется рекуррентным соотношением $\eta_m = \max_{k < m} (\|X(m, k)\| k^{-1} \eta_k)$, $k \in \mathbb{N}$, с произвольным начальным условием $\eta_1 > 0$.

Доказательство. Зафиксируем матрицу Q , удовлетворяющую условию следствия. Положительная функция β такая, что $\beta(0) = 1$ и $\beta(k) = k^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию теоремы 2. Действительно, согласно лемме 1, для суммы $S(m) := \sum_{k=0}^{m-1} \beta^{-1}(k) \|V_k\| = \|V_0\| + \sum_{k=1}^{m-1} k \|V_k\|$ справедлива оценка $S(m) \leq bC_Q + b \sum_{k=1}^{m-1} k \int_k^{k+1} \|Q(t)\| dt$. Так как $\sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} \|Q(t)\| dt = \int_0^\infty \|Q(t)\| dt < \infty$, то в силу леммы 4 имеет место стремление $m^{-1} S(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда, согласно следствию 5, получаем требуемое. Следствие 6 доказано.

Замечание 3. Оценка, доказанная в следствии 6, другими методами впервые получена в работе [10]. Там же доказана и ее достижимость.

Следствие 7. Если возмущения Q для всякого $t \geq 0$ удовлетворяют условию $\|Q(t)\| \leq N_Q e^{-\sigma t}$ с некоторой постоянной N_Q , зависящей от Q , и фиксированным $\sigma > 0$, то при любом $\varepsilon > 0$ справедлива оценка $\lambda_n(A+Q) \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$, где последовательность η_m при $m > 1$ определена рекуррентным соотношением $\eta_m = \max_{k < m} (\|X(m, k)\| e^{-(\sigma-\varepsilon)k} \eta_k)$, $k, m \in \mathbb{N}$, с произвольным начальным условием $\eta_1 > 0$.

Доказательство. Зафиксируем матрицу возмущений Q , удовлетворяющую условию следствия. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Положительная функция $\beta(k) = e^{-(\sigma-\varepsilon)k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяет условию теоремы 2. Действительно, согласно лемме 1, для суммы

$$S(m) := \sum_{k=0}^{m-1} \beta^{-1}(k) \|V_k\| = \sum_{k=0}^\infty e^{(\sigma-\varepsilon)k} \|V_k\|$$

справедлива оценка $S(m) \leq b \sum_{k=0}^\infty e^{(\sigma-\varepsilon)k} \int_k^{k+1} \|Q(t)\| dt$. Так как при любом $t \in [k, k+1]$ выполняются соотношения $\|Q(t)\| \leq N_Q e^{-\sigma t} \leq N_Q e^{-\sigma k}$, то $S(m) \leq b N_Q \sum_{k=0}^\infty e^{-\varepsilon k} = b N_Q (1 - e^{-\varepsilon})^{-1}$. Отсюда следует равенство $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \beta^{-1}(k) \|V_k\| = 0$. Тогда в силу следствия 5 имеем требуемое неравенство. Следствие 7 доказано.

Замечание 4. Следствие 7 другими методами впервые доказано в работе [6].

Следствие 8. При всех $\sigma > 0$ для старшего σ -показателя системы (2) справедливо равенство $\nabla_\sigma = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \max_{d \subset (m)} \Gamma_d^\beta(m)$, где $\beta(k) = e^{-\sigma k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, а $\gamma_0 > 0$ произвольно.

Доказательство. Согласно работе [6], справедливо равенство $\nabla_\sigma = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \xi_m$, где последовательность ξ_m при $m > 1$ задается формулой $\xi_m = \max_{k < m} (\ln \|X(m, k)\| + \xi_k - \sigma k)$, $k, m \in \mathbb{N}$, с начальным условием $\xi_1 = 0$. В силу этого для последовательности $\exp \xi_m$ выполнены соотношения $\exp \xi_m = \exp \max_{k < m} (\ln \|X(m, k)\| + \xi_k - \sigma k) = \max_{k < m} (\|X(m, k)\| \exp \xi_k \exp(-\sigma k))$, $\exp \xi_1 = 1$. По лемме 3 последовательность $\eta_m = \max_{d \subset (m)} \Gamma_d^\beta(m)$ с $\beta(k) = e^{-\sigma k}$, $k, m \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяет рекуррентной формуле $\eta_m = \max_{k < m} (\|X(m, k)\| e^{-\sigma k} \eta_k)$ с начальным условием $\eta_1 = \gamma_0 \|X(1, 0)\|$, и поэтому при $\gamma_0 = \|X(1, 0)\|^{-1}$ она совпадает с последовательностью $\exp \xi_m$, $m \in \mathbb{N}$. Так как величина $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \max_{d \subset (m)} \Gamma_d^\beta(m)$ не зависит от выбора γ_0 , то при любом $\gamma_0 > 0$ имеют место равенства $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \xi_m = \nabla_\sigma$. Следствие 8 доказано.

Применим теперь теорему 2 в случае возмущений, суммируемых на полуоси с монотонным положительным весом, а также возмущений, суммируемых со степенью. Предполагая матрицу коэффициентов невозмущенной системы (1) фиксированной, для произвольного класса возмущений \mathfrak{M} введем обозначение $\Lambda(\mathfrak{M}) := \sup\{\lambda_n(A + Q) : Q \in \mathfrak{M}\}$. В дальнейшем нам понадобится класс возмущений $\mathfrak{B}_\sigma[\theta]$, где $\sigma > 0$ и θ – некоторая положительная кусочно-непрерывная функция, состоящий из кусочно-непрерывных матриц Q , удовлетворяющих неравенству $\|Q(t)\| \leq N_Q \theta^{-\sigma}(t)$ с константой N_Q , зависящей от Q .

Замечание 5. Если функция θ монотонно возрастает и стремится к $+\infty$ при $t \rightarrow \infty$, то из результатов работы [9] вытекает, что имеет место равенство $\Lambda(\mathfrak{B}_\sigma[\theta]) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m(\sigma)$, где последовательность $\eta_m(\sigma)$ определяется рекуррентным соотношением $\eta_1(\sigma) = 1$, $\eta_m(\sigma) = \max_{k < m} (\|X(m, k)\| \theta^{-\sigma}(k) \eta_k)$, $m > 1$, $k, m \in \mathbb{N}$, причем величина $\Lambda(\mathfrak{B}_\sigma[\theta])$ непрерывна как функция параметра $\sigma > 0$.

Пусть класс $\mathfrak{I}[\varphi]$, где φ – положительная функция, определенная на промежутке $[0, +\infty[$, составляют кусочно-непрерывные матрицы Q такие, что $\int_0^\infty \varphi(t) \|Q(t)\| dt < +\infty$.

Если число $a = \inf\{\varphi(t) : t \geq 0\}$ положительно, то для всякого $Q \in \mathfrak{I}[\varphi]$ при любом $t \geq 0$ справедливы соотношения

$$\int_t^{t+1} \|Q(\tau)\| d\tau \leq a^{-1} \int_t^{t+1} \varphi(\tau) \|Q(\tau)\| d\tau \leq a^{-1} \int_0^\infty \varphi(t) \|Q(t)\| dt < +\infty,$$

означающие, что матрица Q интегрально ограничена.

Теорема 3. Если кусочно-непрерывная функция φ монотонно возрастает на $[0, +\infty[$, то справедливо равенство $\Lambda(\mathfrak{I}[\varphi]) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$, где последовательность η_m при $m > 1$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $\eta_m = \max_{k < m} (\|X(m, k)\| k^{-1} \varphi^{-1}(k) \eta_k)$, $k, m \in \mathbb{N}$, с произвольным $\eta_1 > 0$.

Доказательство. Докажем неравенство $\Lambda(\mathfrak{I}[\varphi]) \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$. Зафиксируем матрицу Q , удовлетворяющую условиям теоремы, и определим положительную функцию β равенствами $\beta(0) = 1$ и $\beta(k) = k^{-1} \varphi^{-1}(k)$ при $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим сумму

$$S(m) := \sum_{k=0}^{m-1} \beta^{-1}(k) \|V_k\| = \|V_0\| + \sum_{k=1}^{m-1} k \varphi(k) \|V_k\|.$$

Так как функция φ возрастающая, то при всех $t \geq 0$ справедливы неравенства $\varphi(t) \geq \varphi(0) > 0$,

поэтому матрица Q интегрально ограничена. Тогда, согласно лемме 1, имеем

$$S(m) \leq bC_Q + b \sum_{k=1}^{m-1} k \varphi(k) \int_k^{k+1} \|Q(t)\| dt = bC_Q + b \sum_{k=1}^{m-1} k \int_k^{k+1} \varphi(k) \|Q(t)\| dt.$$

При $t \in [k, k+1]$ выполнено неравенство $\varphi(k) \leq \varphi(t)$, поэтому справедливо соотношение $S(m) \leq bC_Q + b \sum_{k=1}^{m-1} k \int_k^{k+1} \varphi(t) \|Q(t)\| dt$. Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} \varphi(t) \|Q(t)\| dt = \int_0^{\infty} \varphi(t) \|Q(t)\| dt < +\infty,$$

то в силу леммы 4 имеем равенство $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} S(m) = 0$, откуда, согласно следствию 5, вытекает требуемое неравенство.

Докажем теперь обратное неравенство $\Lambda(\mathcal{I}[\varphi]) \geq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$. Возьмем $\theta(t) = t\varphi(t)$ при $t > 1$, $\theta(t) = \varphi(1)$ при $0 \leq t \leq 1$ и рассмотрим однопараметрическое семейство классов возмущений $\mathfrak{B}_\sigma[\theta]$, $\sigma > 0$. Так как $\theta(t) \uparrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то применимы результаты работы [9], указанные в замечании 5.

Для любой матрицы $Q \in \mathfrak{B}_\sigma[\theta]$ при всяком $\sigma > 1$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varphi(t) \|Q(t)\| dt &\leq N_Q \varphi^{-\sigma}(1) \int_0^1 \varphi(t) dt + N_Q \int_1^{\infty} \varphi(t) (t\varphi(t))^{-\sigma} dt \leq \\ &\leq N_Q \varphi^{1-\sigma}(1) + N_Q \int_1^{\infty} \varphi^{1-\sigma}(t) t^{-\sigma} dt \leq N_Q \varphi^{1-\sigma}(1) \left(1 + \int_1^{\infty} t^{-\sigma} dt\right) = N_Q \varphi^{1-\sigma}(1) \sigma(\sigma-1)^{-1} < +\infty, \end{aligned}$$

т.е. при любом $\sigma > 1$ выполнено включение $\mathfrak{B}_\sigma[\theta] \subset \mathcal{I}[\varphi]$, из которого вытекает неравенство $\Lambda(\mathfrak{B}_\sigma[\theta]) \leq \Lambda(\mathcal{I}[\varphi])$. Переходя в нем к пределу при $\sigma \rightarrow 1+0$, в силу замечания 5 получаем оценку $\Lambda(\mathcal{I}[\varphi]) \geq \Lambda(\mathfrak{B}_1[\theta]) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$ при $\eta_1 = 1$. Поскольку, согласно следствию 5, величина $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$ не зависит от выбора $\eta_1 > 0$, доказанная оценка справедлива при любых $\eta_1 > 0$. Теорема 3 доказана.

Обозначим через \mathcal{I}^p , $p > 1$, множество кусочно-непрерывных матриц Q , для которых выполнено неравенство $\int_0^{\infty} \|Q(t)\|^p dt < +\infty$. Для таких Q при всех $t \geq 0$ имеем оценку

$$\int_t^{t+1} \|Q(s)\| ds \leq \left(\int_t^{t+1} \|Q(s)\|^p ds \right)^{1/p} \left(\int_t^{t+1} ds \right)^{1/q} \leq \left(\int_0^{\infty} \|Q(s)\|^p ds \right)^{1/p} \leq \infty,$$

где, как обычно, $1/p + 1/q = 1$, означающую, что всякое $Q \in \mathcal{I}^p$ является интегрально ограниченным.

Теорема 4. При всех $p > 1$ справедливо равенство $\Lambda(\mathcal{I}^p) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$, в котором последовательность η_m при $m > 1$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $\eta_m = \max_{k < m} (\|X(m, k)\| k^{-1/p} \eta_k)$, $k, m \in \mathbb{N}$, с произвольным начальным условием $\eta_1 > 0$.

Доказательство. Докажем неравенство $\Lambda(\mathcal{I}^p) \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$. Зафиксируем матрицу возмущений Q , удовлетворяющую условиям теоремы. Положительная функция $\beta(k)$ такая,

что $\beta(0) = 1$ и $\beta(k) = k^{-1/p}$ для $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию теоремы 2. Действительно, согласно лемме 1, имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{m-1} \beta^{-1}(k) \|V_k\| = \|V_0\| + \sum_{k=1}^{m-1} k^{1/p} \|V_k\| \leq bC_Q + b \sum_{k=1}^{m-1} k^{1/p} \int_k^{k+1} \|Q(\tau)\| d\tau.$$

Так как функция $\tau^{1/p}$ при $p > 1$ возрастает, то на каждом из отрезков $[k, k + 1]$ выполняется неравенство $\tau^{1/p} > k^{1/p}$, откуда

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^{1/p} \|V_k\| \leq b \sum_{k=1}^{m-1} \int_k^{k+1} \tau^{1/p} \|Q(\tau)\| d\tau = b \int_1^m \tau^{1/p} \|Q(\tau)\| d\tau.$$

Поскольку $\int_0^\infty \|Q(t)\|^p dt < \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $t_\varepsilon > 0$ такое, что справедливо неравенство $\int_{t_\varepsilon}^\infty \|Q(t)\|^p dt < \varepsilon$. Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} k^{1/p} \|V_k\| &\leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} b \left(C_Q + \int_1^m \tau^{1/p} \|Q(\tau)\| d\tau \right) = \\ &= \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} b \left(C_Q + \int_1^{t_\varepsilon} \tau^{1/p} \|Q(\tau)\| d\tau + \int_{t_\varepsilon}^m \tau^{1/p} \|Q(\tau)\| d\tau \right). \end{aligned}$$

Применяя ко второму интегралу неравенство Гёльдера, получаем неравенства

$$\int_{t_\varepsilon}^m \tau^{1/p} \|Q(\tau)\| d\tau \leq \left(\int_{t_\varepsilon}^m \tau^{q/p} d\tau \right)^{1/q} \left(\int_{t_\varepsilon}^m \|Q(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p} \leq m \left(\int_{t_\varepsilon}^\infty \|Q(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p} \leq m\varepsilon^{1/p}.$$

Таким образом, имеем оценку

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} k^{1/p} \|V_k\| \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} bm^{-1} \left(C_Q + \int_1^{t_\varepsilon} \tau^{1/p} \|Q(\tau)\| d\tau + m\varepsilon^{1/p} \right) \leq b\varepsilon^{1/p},$$

из которой в силу произвольности выбора ε вытекает равенство $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} k^{1/p} \|V_k\| = 0$.

Отсюда, согласно следствию 5, получаем требуемое.

Докажем теперь обратное неравенство. Возьмем $\theta(t) = t^{1/p}$ при $t > 1$, $\theta(t) = 1$ при $0 \leq t \leq 1$ и рассмотрим однопараметрическое семейство классов возмущений $\mathfrak{B}_\sigma[\theta]$, $\sigma > 0$. Так как $\theta(t) \uparrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то применимы результаты работы [9], указанные в замечании 5.

Для возмущений из класса $\mathfrak{B}_\sigma[\theta]$ при указанном θ и любом $\sigma > 1$ выполнены соотношения

$$\int_0^\infty \|Q(t)\|^p dt = \int_0^1 \|Q(t)\|^p dt + \int_1^\infty \|Q(t)\|^p dt \leq N_Q^p \left(1 + \int_1^\infty t^{-\sigma} dt \right) = N_Q^p \sigma (\sigma - 1)^{-1} < +\infty.$$

Отсюда следует включение $\mathfrak{B}_\sigma[\theta] \subset \mathcal{I}^p$, в силу которого выполняется неравенство $\Lambda(\mathcal{I}^p) \geq \Lambda(\mathfrak{B}_\sigma[\theta])$. Согласно замечанию 5, функция $\Lambda(\mathfrak{B}_\sigma[\theta])$ является непрерывной функцией от σ , поэтому, переходя в данном неравенстве к пределу при $\sigma \rightarrow 1 + 0$, будем иметь $\Lambda(\mathcal{I}^p) \geq \Lambda(\mathfrak{B}_1[\theta]) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$ при $\eta_1 = 1$. Поскольку, согласно следствию 5, величина

$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \eta_m$ не зависит от выбора $\eta_1 > 0$, доказанная оценка справедлива при любых $\eta_1 > 0$. Теорема 4 доказана.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований “Математические структуры”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
2. Виноград Р.Э. // Мат. сб. 1957. Т. 42. № 2. С. 207–222.
3. Миллионщиков В.М. // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10. № 1. С. 99–104.
4. Миллионщиков В.М. // Мат. заметки. 1968. Т. 4. Вып. 2. С. 173–180.
5. Изобов Н.А. // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1974. Т. 12. С. 71–146.
6. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1186–1192.
7. Изобов Н.А. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 1. С. 5–8.
8. Барабанов Е.А. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 2. С. 357.
9. Барабанов Е.А. Точные границы крайних показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциальных и степенных возмущениях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск, 1984.
10. Барабанов Е.А., Вишневецкая О.Г. // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41. № 5. С. 29–34.
11. Сергеев И.Н. // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1986. Вып. 11. С. 32–73.
12. Сергеев И.Н. // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 3. С. 438–448.
13. Адрианова Л.Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. С.-Петербург, 1992.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию
30.04.2004 г.