Е. П. Голубева, О распределении целочисленных матриц второго порядка, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1990, том 183, 49–55

Е.П.Голубева

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

I. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ и

$$\det A = ad - bc = n \qquad (n \in \mathbb{Z}). \tag{I}$$

Вопрос о количестве целых решений этого уравнения при фиксированном n в различных областях на поверхности (I) рассматривался целым рядом авторов. Особенно подробно изучался случай $n = 1$ (см., например, [I], [2], [6], что представляет далеко не полный список работ на эту тему). При больших n и произвольной области эта задача была решена Ю.В.Линником ([3], см., также [4], где изучается случай больших размерностей, и [5]).

Таким образом, в этом круге задач может идти речь только об улучшении остаточных членов в соответствующих асимптотических формулах. Существующие оценки достаточно далеки от ожидаемых результатов. Можно предполагать, что предельной здесь является оценка, совпадающая с корнем квадратным из главного члена, в наилучших же из известных результатов, полученных спектральными методами в достаточно специфической ситуации, соответствующий показатель в остатке равен $2/3$. (см.[2], [6]).

При применении к рассматриваемой задаче методов спектральной теории автоморфных форм вместо непосредственного изучения уравнения (I) фиксируется точка $z \in H$ -верхней полуплоскости и рассматривается распределение на H точек вида $az + b/cz + d$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$. Такой подход, как уже отмечалось выше, дает более точные результаты, чем те, которые получаются без использования спектральных разложений (см. теорему ниже, в которой улучшаются результаты работы [5]).

На первый взгляд, он обладает тем недостатком, что отображение

$$\Omega \Rightarrow \mathcal{D}_z(\Omega): \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{az+b}{cz+d}; \ \Omega \subset PSL_2(\mathbb{R}),\ z \in H \tag{2}$$

не является взаимно однозначным. Точнее, прообразом каждой точки на H является замкнутая кривая на поверхности $ad - bc = 1$. (см. предложение ниже). Таким образом, если не привлекать дополнительных соображений, мы вынуждены рассматривать области, хотя и довольно общего, но все же не произвольного вида.

Основная цель настоящей работы - показать, что этот дефект в принципе является устранимым. Точнее (см. предложение), мы доказываем, что области $\Omega \subset PSL_2(\mathbb{R})$ весьма общего вида возможно восстановить по пересечению всех $\Omega_{\mathbb{Z}}$ -полных прообразов $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}(\Omega)$ при отображении (2).

Спектральный подход представляется более перспективным, особенно в применении к задаче о распределении целых точек на детерминантных поверхностях больших размерностей, где понижающий множитель в остатке, известный на настоящее время, быстро падает с ростом размерности (см. [4]). Кроме того эта схема естественно реагирует на продвижения в аналоге гипотезы Петерсона для этого случая (см. замечание к теореме ниже).

2. Всюду в дальнейшем мы придерживаемся следующих стандартных обозначений и пользуемся следующими фактами (см., например, [2]).

H – верхняя полуплоскость, Δ – оператор Лапласа-Бельтрами на H :

$$\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

$dz = dx\,dy/y^2$ – инвариантная мера на H, $F = PSL_2(\mathbb{Z}) \setminus H$ – фундаментальная область.

Оператор Δ имеет однократный непрерывный спектр, заполняющий интервал $[\frac{1}{4}, \infty)$ и дискретный спектр конечной кратности.

Собственные функции непрерывного спектра Δ совпадают с вещественно-аналитическими рядами Эйзенштейна $E(z,s)$ при $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$, которые при $\mathrm{Re}\, s > 1$ задаются соотношением

$$E(z,s) = y^s + y^s \sum_{(c,d)=1,\, c>0} \frac{1}{|cz+d|^{2s}},$$

а затем аналитически по s продолжаются на всю комплексную плоскость. Собственные числа λ_k, принадлежащие дискретному спектру Δ удовлетворяют условиям $0 = \lambda_0 = \lambda_1 \leqslant \ldots$ $(\lambda_1 > \frac{1}{4})$ Соответствующие собственные функции обозначим через u_k.

Функции u_k выберем вещественными и так, что они одновременно являются собственными функциями всех операторов Гекке

$$T(n)f(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} \sum_{b \pmod d} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

Таким образом, $T(n)u_k = \mu_k(n)u_k$,

где собственное число оператора Гекке в силу результата работы [7] оценивается как

$$\mu_K(n) \ll n^{\frac{1}{5}+\varepsilon}. \tag{3}$$

Кроме того,

$$T(n)E(z,s) = \tau_s(n)E(z,s),$$

где

$$\tau_s(n) = |n|^{s-\frac{1}{2}} \sum_{d|n,\, d>0} d^{1-2s}.$$

Очевидно,

$$\left|\tau_{\frac{1}{2}+it}(n)\right| \ll n^{\varepsilon}. \tag{4}$$

Пусть $\varkappa_K = \sqrt{\lambda_K - \frac{1}{4}}$. Справедлива следующая

ЛЕММА I (см. Быковский [8]). Пусть u_K нормированы условием

$$\|u_K\|^2 = \int_F |u_K(z)|^2 dz = 1.$$

Тогда для любого $P \geqslant 1$ равномерно по z

$$\sum_{0 \leqslant \varkappa_K \leqslant P} |u_K(z)|^2 + \int_{-P}^{P} \left|E(z,\tfrac{1}{2}+it)\right|^2 dt \ll P^2.$$

Настоящая лемма является аналогом хорошо известного "стаканчика Виноградова" (ср. [9]).

ЛЕММА 2. Пусть $\chi(z)$ - характеристическая функция области $\Omega \subset F$.

Существуют $2r$ раз непрерывно дифференцируемые функции $\chi_\delta^+(z)$ и $\chi_\delta^-(z)$ ($r>0$ - произвольное целое) на F, удовлетворяющие условиям

I) для любого $z \in F$ $0 \leqslant \chi_\delta^-(z) \leqslant \chi(z) \leqslant \chi_\delta^+(z) \leqslant 1$;

2) для всех $z \in F$, не лежащих в δ -окрестности границы Ω $\chi_\delta^-(z) = \chi_\delta^+(z) = \chi(z)$;

3) для всех $z \in F$ $\Delta^r \chi_\delta^\pm(z) \ll \delta^{-2r}$ равномерно по y, где $z = x+iy$, $\sigma_1 \leqslant y \leqslant \sigma_2$, $\sigma_1 > 0$;

4) пусть

$$\Psi^\pm(z) = \sum_{\sigma \in PSL_2(\mathbb{Z})} \chi_\delta^\pm(\sigma(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^\pm u_k(z) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^\pm(t) E(z,\tfrac{1}{2}+it)\,dt,$$

тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k^{\pm}|^2+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\varepsilon^{\pm}(t)|^2dt\leqslant 1, \tag{5}$$

$$|a_k^{\pm}|\leqslant\frac{\delta}{(\lambda_k\delta^2)^{\tau}},\quad |\varepsilon^{\pm}(t)|\leqslant\frac{\delta}{(t\delta^2)^{\tau}}, \tag{6}$$

где
$$a_k^{\pm}=\int_F \chi_\delta^{\pm}(z)\overline{u_k(z)}\,dz,$$

$$\varepsilon^{\pm}(t)=\int_F \chi_\delta^{\pm}(z)\overline{E(z,\tfrac{1}{2}+it)}\,dz.$$

ТЕОРЕМА. Пусть $R(n,\Omega)$ – число целочисленных решений уравнения
$$ad-bc=n$$
таких, что $A(z_0)\in\Omega$, где $z_0\in H$,
$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad A(z_0)=\frac{az_0+b}{cz_0+d},$$
$\Omega\subset F$ - выпуклая ограниченная область.

Тогда
$$R(n,\Omega)=\mu(\Omega)R(n)\left(1+O\left(n^{-3/20}\right)\right),$$
где
$$\mu(\Omega)=\int_\Omega dz,$$

$$R(n)=\sum_{d|n,\,d>0} d\,.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению
$$R(n,\Omega)=\sum_{\substack{A,\,\det A=n\\ A(z_0)\in\Omega}}1=\sum_{A,\,\det A=n}\chi(A(z_0)),$$
где χ - характеристическая функция области Ω. По лемме 2 (п.I))
$$\sum_{A,\,\det A=n}\chi_\delta^{-}(A(z_0))\leqslant R(n,\Omega)\leqslant\sum_{A,\,\det A=n}\chi_\delta^{+}(A(z_0)).$$

Разложим функцию $\Psi^+(z)$ (соответственно $\Psi^-(z)$) по спектру Δ:

$$\Psi^+(z)=\mu(\Omega)(1+O(\delta))+\sum_{k=1}^{\infty}a_k u_k(z)+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^+(t)E\left(z,\tfrac{1}{2}+it\right)dt.$$

(по поводу обозначений см. лемму 2).

Применим к обеим частям этого равенства оператор Гекке $T(n)$

$$T(n)\Psi^+(z)=\mu(\Omega)(1+O(\delta))\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\substack{ad=n\\ a>0}}d+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\mu_k(n)u_k(z)+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^+(t)\tau_{\frac{1}{2}+it}(n)E\left(z,\tfrac{1}{2}+it\right)dt.$$

С другой стороны

$$T(n)\Psi^+(z)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{A,\det A=n}\chi_\delta^{+}(A(z)).$$

Таким образом,

$$R(n,\Omega)\leqslant(\mu(\Omega)+O(\delta))\sum_{\substack{ad=n\\ a>0}}d+\sqrt{n}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\mu_k(n)u_k(z_0)+$$
$$+\frac{\sqrt{n}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^+(t)\tau_{\frac{1}{2}+it}(n)E\left(z_0,\tfrac{1}{2}+it\right)dt.$$

В силу оценок (3), (4) и (6) имеем

$$R(n,\Omega)\leqslant(\mu(\Omega)+O(\delta))R(n)+O\Big(n^{0,7}\Big(\sum_{k\leqslant\delta^{-(2+\varepsilon)}}|a_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k\leqslant\delta^{-(2+\varepsilon)}}|u_k(z_0)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)+$$
$$+O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)+O\Big(n^{\varepsilon+\frac{1}{2}}\Big(\int_{-\delta^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)}}^{\delta^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)}}|\varepsilon^+(t)|^2dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{-\delta^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)}}^{\delta^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)}}\left|E\left(z_0,\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^2dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big).$$

Поскольку $\varkappa_k\asymp k^{\frac{1}{2}}$ из (5) и леммы I следует

$$R(n,\Omega)\leqslant(\mu(\Omega)+O(\delta))R(n)+O\left(n^{0,7}\delta^{-1}\right).$$

Аналогично получаем оценку снизу. Выбирая $\delta=n^{-3/20}$, получаем утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если для автоморфных форм веса 0 справедлива гипотеза Петерсона: $\mu_k(n) = O(n^{\varepsilon})$, то вместо $n^{-3/20}$ понижающий множитель в остатке в формулировке теоремы становится $n^{-1/4}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}_4$ ограниченная замкнутая область, лежащая на поверхности $ad - bc = 1$, проекция которой на пространство $\mathbb{R}_3 = \{(a, b, c)\}$ – выпуклая область.

Тогда

$$\Omega = \bigcap_{z \in H} \Omega_z .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стабилизатором точки i в $PSL_2(\mathbb{R})$ является ортогональная группа PO_2^+. Стабилизатором произвольной точки $z \in H$ является группа $\Gamma_z = B^{-1} P O_2^+ B$, где B – произвольный элемент $GL_2(\mathbb{R})$, переводящий точку z в точку i. Возьмем $B = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}$. Тогда,

$$\Gamma_z = B^{-1} P O_2^+ B = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha - \sin\alpha \frac{x}{y} & \sin\alpha (x^2 + y^2) \\ -y^{-2} \sin\alpha & \cos\alpha + \sin\alpha \frac{x}{y} \end{pmatrix} \right\}, \tag{7}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, $\sin\alpha \geqslant 0$.

Пусть A – произвольный элемент $SL^+(\mathbb{R})$ такой, что $A \bar{\in} \Omega$ и

$$A \in \bigcap_{z \in H} \Omega_z . \tag{8}$$

Последнее условие эквивалентно тому, что для любых x и y найдется $\alpha = \alpha(x, y)$ такое, что $A = \omega \gamma$ где $\omega \in \Omega$, $\gamma \in \Gamma_z$, то есть, $\gamma^{-1} \in A^{-1}\Omega$. Область $A^{-1}\Omega$ замкнута, ограничена и не содержит точку $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; кроме того ее проекция на пространство $\{(a, b, c)\}$ выпукла.

Пусть в (7) $x = 0$, а $y \to \infty$. Поскольку $A^{-1}\Omega$ ограничена, $\sin\alpha \to 0$, $\cos\alpha \to 1$ и в силу замкнутоcти проекция $A^{-1}\Omega$ на пространство $\{(a, b, c)\}$ содержит точку вида $(1, b, 1)$. Пусть теперь $x = 0$, $y \to 0$. В силу аналогичных соображений проекция содержит и точку $(1, 0, 1)$. Поскольку она выпукла, то весь отрезок $(1, bt, 1), (0 \leqslant t \leqslant 1)$ принадлежит ей. Таким образом, $A^{-1}\Omega$ содержит все точки вида $\begin{pmatrix} 1 & bt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а, значит, и точку $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, вопреки нашему предположению $A \in \Omega$ и предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Из доказательства видно, что в действительности верно более сильное утверждение:

$$\Omega = \bigcap_{z=iy} \Omega_z \qquad (y>0).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие выпуклости проекции Ω на пространство $R_3 = \{(a,b,c)\}$ при приложениях, разумеется, можно заменить менее ограничительным, при котором проекция разбивается на конечное число выпуклых частей.

Литература

1. H e a t h - B r o w n D.R. The fourth power moment of the Riemann zeta-function. - Proc.London Math.Soc., 1979, vol.38, N 3, p.385-422.
2. К у з н е ц о в Н.В. Свертка коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна - Мааса. - В кн.: Автоморфные функции и теория чисел. I. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1983, т.129, с.43-84.
3. Л и н н и к Ю.В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л., 1967. 208 с.
4. С к у б е н к о Б.Ф. К распределению целочисленных матриц и вычислению объема фундаментальной области унимодулярной группы матриц. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1967, т.80, с.129-144.
5. П о д с ы п а н и н Е.В. Распределение целых точек на детерминантной поверхности. - В кн.: Исследования по теории чисел. 6. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1980, т.93, с.30-40.
6. Л е в и т а н Б.М. Асимптотические формулы для числа точек решетки в пространствах Евклида и Лобачевского. - Успехи матем.наук, 1987, т.42, в.3 (255), с.13-38.
7. M o r e n o C.J., S h a h i d i F. The L-functions $L(s, Sym^m(\tau), \pi)$. - Can.Math.Bull., 1985, Vol.28, N 4, p.405-410.
8. Б ы к о в с к и й В.А. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках. - Мат.сб., 1988, т.136 (178), № 4 (8), с.451-467.
9. Б ы к о в с к и й В.А. Арифметико-аналитические свойства бинарных положительно определенных квадратичных форм. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 6. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1985, т.144, с.5-20.