O. L. Safronov, The discrete spectrum in gaps of the continuous spectrum for indefinite-sign perturbations with a large coupling constant,
Algebra i Analiz, 1996, Volume 8, Issue 2, 162–194

Алгебра и анализ
Том 8 (1996), вып. 2

ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР В ЛАКУНАХ НЕПРЕРЫВНОГО ПРИ НЕЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ С БОЛЬШОЙ КОНСТАНТОЙ СВЯЗИ

© О. Л. Сафронов

Пусть $A = A^*$ и $\lambda = \overline{\lambda}$ — регулярная точка для A. Для незнакоопределенного $V = V^*$ и $\alpha > 0$ мы рассматриваем величину $N(\lambda, \alpha)$, определенную как разность количества собственных значений оператора $A - tV$, прошедших через λ справа налево и слева направо с ростом t от нуля до α. Доказана абстрактная теорема стабильности асимптотики величины N (при $\alpha \to \infty$) относительно изменений A и λ. Даны применения к дифференциальным операторам.

Введение

Основной результат работы относится к асимптотической спектральной теории возмущений самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Пусть $A = A^*$ — полуограниченный снизу оператор, спектр которого $\sigma(A)$ может содержать лакуны. Пусть $\lambda = \overline{\lambda}$ — фиксированная „точка наблюдения“, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A)$. Для возмущения V вида

$$V = W_+^* W_+ - W_-^* W_- \tag{0.1}$$

положим

$$A(\alpha) = A - \alpha V, \quad \alpha > 0.$$

Через $N(\alpha) = N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha)$ обозначим *разность* числа собственных значений оператора $A(t)$, прошедших через точку λ справа налево и слева направо при росте t от нуля до заданного α. Нас интересует главный член (в степенной шкале) асимптотики $N(\alpha)$ при $\alpha \to \infty$. Указываются условия на W_+, W_-, при которых такая асимптотика не меняется при достаточно сильных вариациях A, а также при изменении точки $\lambda = \overline{\lambda} \in \rho(A)$. Теорема такого типа была

Ключевые слова: дискретный спектр, спектральная лакуна, знакопеременное возмущение, константа связи, спектральная асимпотика.

получена в [B] для положительных $V = W_+^* W_+$. Там же были даны применения к дифференциальным операторам, в том числе к оператору Шрёдингера. Здесь мы следуем в основном подходу, предложенному в [B], но рассматриваем технически значительно более трудный случай возмущений (0.1).

Подробно постановка задачи и основной результат статьи описаны в §1, который является продолжением Введения. Здесь мы отметим следующее. Если $\lambda < \inf \sigma(A)$, то $N(\alpha)$ *совпадает с числом собственных значений оператора* $A(\alpha)$, *лежащих левее* λ. В этом случае $N(\alpha)$ монотонно растет вместе с α и совпадает (принцип Бирмана–Швингера) с функцией распределения положительного спектра некоторого (компактного) самосопряженного оператора. Сказанное позволяет при $\lambda < \inf \sigma(A)$ пользоваться для изучения асимптотики $N(\alpha)$ вариационными средствами и теорией возмущений. Полученная в работе теорема стабильности сводит вопрос для любых λ к случаю $\lambda < \inf \sigma(A)$. В применениях к дифференциальным операторам это дает возможность использовать известные результаты о спектральных асимптотиках вейлевского типа.

Если $V = W_+^* W_+$, собственные значения оператора $A(\alpha)$ проходят через любую точку наблюдения справа налево. Соответственно $N(\alpha)$ монотонно растет *для любых* $\lambda = \overline{\lambda} \in \rho(A)$ и совпадает с функцией распределения положительного спектра некоторого компактного самосопряженного оператора. Подходящий вариант принципа Бирмана–Швингера изложен в [B]; его содержание описано ниже в предложениях 2.2, 2.3. На этих обстоятельствах построено в [B] доказательство теоремы о стабильности (см. ниже теорему 1.1) для $V > 0$.

При изучении возмущений вида (0.1) прежде всего надо было выделить „правильное“ обобщение функции $N(\alpha)$. Выяснилось, что это *разность* количества собственных значений, прошедших через λ в двух направлениях. Далее, техника, использованная в [B], недостаточна для V из (0.1): вспомогательный компактный оператор несамосопряжен. Поэтому понадобились дополнительные технические средства в виде своеобразной асимптотической теории возмущений для операторных семейств специального вида. Этим вопросам посвящены §3, 4. В §2 изложены нужные нам результаты для случая $V = W_+^* W_+$; они в основном заимствованы из [B]. В §5 доказывается наша основная теорема 1.2 (теорема о стабильности).

В заключительном §6 изложены применения к дифференциальным операторам; в этом мы в существенном следуем работе [B]. Для случая оператора Шрёдингера близкие вопросы при незнакопостоянных потенциалах V рассматривались в работах [H, L]. Там, однако, изучалась другая функция — *сумма* $\widetilde{N}(\alpha)$ числа собственных значений, прошедших через λ в обоих направлениях. Для $\widetilde{N}(\alpha)$ в [H, L] получены лишь нижние асимптотические оценки. В то же время для $N(\alpha)$ мы получаем при $\alpha \to \infty$ асимптотику вейлевского типа (см. §6, п. 2).

В тексте статьи через C, c (возможно с индексами) обозначены различные оценочные постоянные. В некоторых утверждениях присутствуют двойные индексы „ $\pm$ “. При каждом из этих индексов утверждение следует читать независимо.

Автор выражает глубокую благодарность профессору М. Ш. Бирману за постановку задачи и помощь при написании работы.

§1. Предварительные сведения. Формулировка основного результата

1. Ниже $\mathfrak{X}_j$, $j = 1,2$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Через $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ обозначается пространство линейных непрерывных операторов, а через $\mathfrak{S}_\infty = \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ — пространство компактных операторов, отображающих $\mathfrak{X}_1$ в $\mathfrak{X}_2$. Если $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}$, то пишем $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X})$. Для линейного плотно определенного оператора M через $\mathcal{D}(M)$, $\operatorname{Ran} M$, $\operatorname{Ker} M$, M^*, $\rho(M)$, $\sigma(M)$ обозначаем соответственно его область определения, образ, ядро, сопряженный оператор, резольвентное множество и спектр. Пусть $T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ и $s_k(T)$, $k \in \mathbb{N}$ — *сингулярные числа* (S-числа) оператора T, т. е. последовательные собственные значения оператора $(T^*T)^{1/2}$. Введем функцию распределения s-чисел

$$n(s,T) = \operatorname{card}\{k : s_k(T) > s\}, \quad s > 0.$$

Если $T = T^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X})$, то положим $n_\pm(\cdot, T) = n(\cdot, T_\pm)$, где $2T_\pm = |T| \pm T$. Ясно, что при этом $n = n_+ + n_-$.

Отметим (см., например, [BS3]) утверждения, эквивалентные неравенствам Г. Вейля, Ки Фаня и Хорна. Пусть $T_j = T_j^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X})$, $j = 1, 2$. Тогда

$$n_\pm(s_1 + s_2, T_1 + T_2) \leqslant n_\pm(s_1, T_1) + n_\pm(s_2, T_2), \quad s_1, s_2 > 0. \tag{1.1}$$

Аналогично, для $T_j \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$, $j = 1, 2$,

$$n(s_1 + s_2, T_1 + T_2) \leqslant n(s_1, T_1) + n(s_2, T_2), \quad s_1, s_2 > 0. \tag{1.2}$$

Далее, для $T_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X}_3, \mathfrak{X}_2)$, $T_2 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_3)$

$$n(s_1 s_2, T_1 T_2) \leqslant n(s_1, T_1) + n(s_2, T_2), \quad s_1, s_2 > 0. \tag{1.3}$$

При $0 < p < \infty$ рассмотрим класс (идеал) $\Sigma_p \subset \mathfrak{S}_\infty$, характеризующийся условием

$$|T|_p^p := \sup_{s>0} s^p n(s,T) < \infty.$$

Функционал $|\cdot|_p$ определяет на Σ_p квазинорму. Через Σ_p^0 обозначим сепарабельное замкнутое подпространство в Σ_p, характеризующееся условием

$$\Sigma_p^0 := \{T \in \Sigma_p : n(s,T) = o(s^{-p}), s \to 0\}.$$

В Σ_p^0 плотно множество $\mathcal{K}$ операторов конечного ранга. На Σ_p введем функционалы

$$\left.\begin{aligned} \Delta_p(T) &= \limsup_{s\to 0} s^p n(s,T), \\ \delta_p(T) &= \liminf_{s\to 0} s^p n(s,T). \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Если $T = T^*$, то положим

$$\left.\begin{aligned} \Delta_p^{(\pm)}(T) &:= \Delta_p(T_\pm), \\ \delta_p^{(\pm)}(T) &:= \delta_p(T_\pm). \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Все шесть функционалов (1.4), (1.5) непрерывны в Σ_p (см. [BS3]). Более того, эти функционалы определены и непрерывны на фактор-пространстве Σ_p/Σ_p^0. В частности, добавление к T слагаемого класса Σ_p^0 не меняет их значений.

2. Пусть $a[\cdot,\cdot]$ — полуторалинейная полуограниченная снизу замкнутая форма в гильбертовом пространстве $\mathfrak{X}$. Ее область определения $d[a]$ предполагается плотной в $\mathfrak{X}$. Форма a порождает (единственный) самосопряженный в $\mathfrak{X}$ оператор A. Фиксируем $\gamma \in \mathbb{R}$ так, чтобы было $a_\gamma := a + \gamma \geqslant 1$, т. е.

$$a_\gamma[x,x] = a[x,x] + \gamma\|x\|^2 \geqslant \|x\|^2, \quad x \in d[a].$$

Обозначим через $H_\gamma[a]$ (полное) гильбертово пространство $d[a]$ с метрической формой

$$a_\gamma[x,x] = \|(A+\gamma I)^{1/2}x\|^2, \quad x \in d[a].$$

Пусть f — *эрмитова* форма на $d[a]$ и f_* — ее неотрицательная мажоранта:

$$|f[x,y]|^2 \leqslant f_*[x,x]f_*[y,y], \quad x,y \in d[a]. \tag{1.6}$$

Оценка (1.6) эквивалентна неравенству

$$|f[x,x]| \leqslant f_*[x,x], \quad x \in d[a]. \tag{1.7}$$

Предположим, что мажоранта f_* удовлетворяет условию

$$f_*[x,x] \leqslant \varepsilon a_\gamma[x,x] + C(\varepsilon)\|x\|^2, \quad x \in d[a], \forall \varepsilon > 0. \tag{1.8}$$

Рассмотрим полуторалинейную форму $b := a + f$ на $d[a]$. Из (1.7), (1.8) следует, что b полуограничена и замкнута на $d[a]$. Оператор, соответствующий форме b, обозначим через B. Выбором γ можно добиться, чтобы было $b_\gamma := b + \gamma \geqslant 1$. Тогда нормы в $H_\gamma[a]$ и $H_\gamma[b]$ эквивалентны или, что то же самое,

$$(A+\gamma I)^{1/2}(B+\gamma I)^{-1/2} \in \mathfrak{R}(\mathfrak{X}), \qquad (1.9)$$
$$(B+\gamma I)^{1/2}(A+\gamma I)^{-1/2} \in \mathfrak{R}(\mathfrak{X}).$$

Ниже наряду с $\mathfrak{X}$ рассматриваться „дополнительные" гильбертовы пространства $\mathfrak{G}_\pm$. При этом скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ и норма $\|\cdot\|$ для различных пространств в дальнейшем пишутся без индексов.

Пусть $W_\pm : \mathfrak{X} \to \mathfrak{G}_\pm$ — замыкаемые линейные операторы, $\mathcal{D}(W_\pm) \supset d[a]$ и

$$G_\pm(A) := W_\pm(A+\gamma I)^{-1/2} \in \Sigma_{2p}(\mathfrak{X}, \mathfrak{G}_\pm), \qquad (1.10\pm)$$

при некотором $p \in (0,\infty)$. Пусть

$$v_\pm[x,y] = (W_\pm x, W_\pm y). \qquad (1.11)$$

Тогда формы $v_\pm$ компактны в $d[a]$. Это означает, что $v_\pm$ непрерывны в $H_\gamma[a]$ и соответствующие операторы $Q_\pm$, определенные равенствами $a_\gamma[Q_\pm x, y] = v_\pm[x,y]$, $x, y \in d[a]$, компактны в $H_\gamma[a]$. В этом случае для $v_\pm$ заведомо выполнены оценки того же вида, что условие (1.8) для f_*. Поэтому формы $a_\pm(\alpha) = a \mp \alpha v_\pm$ полуограничены снизу и замкнуты на $d[a]$ при каждом $\alpha > 0$. Соответствующие им самосопряженные операторы в $\mathfrak{X}$ будем обозначать через $A_\pm(\alpha)$. Операторы $B_\pm(\alpha)$ определяются аналогично, как соответствующие формам $b_\pm(\alpha) = b \mp \alpha v_\pm$, $\alpha > 0$.

При сделанных предположениях разность резольвент операторов A и $A_\pm(\alpha)$ компактна. Поэтому в лакунах спектра $\sigma(A)$ спектр оператора $A_\pm(\alpha)$ дискретен. То же относится к операторам B и $B_\pm(\alpha)$.

3. Пусть интервал $\Lambda = (\lambda_-, \lambda_+)$ — лакуна в спектре $\sigma(A)$. Легко видеть (см. [B], §1), что собственные значения оператора $A_+(\alpha)$ (оператора $A_-(\alpha)$) двигаются внутри Λ *монотонно* справа налево (слева направо) с ростом α.

Обозначим через $N_\pm(\lambda, A, W_\pm, \alpha)$ количество собственных значений оператора $A_\pm(t)$, прошедших через точку $\lambda \in \Lambda$ при увеличении t от нуля до α. Введем следующие величины

$$\Delta_p^{(\pm)}(\lambda; A, W_\pm) := \limsup_{\alpha\to\infty} \alpha^{-p} N_\pm(\lambda, A, W_\pm, \alpha), \quad \lambda = \overline{\lambda} \in \rho(A), \qquad (1.12)$$

$$\delta_p^{(\pm)}(\lambda; A, W_\pm) := \liminf_{\alpha\to\infty} \alpha^{-p} N_\pm(\lambda, A, W_\pm, \alpha), \quad \lambda = \overline{\lambda} \in \rho(A), \qquad (1.13)$$

которые заведомо конечны в силу (1.10). При условиях (1.7), (1.8) конечны также величины $\Delta_p^{(\pm)}(\mu; B, W_\pm)$, $\delta_p^{(\pm)}(\mu; B, W_\pm)$, $\mu = \overline{\mu} \in \rho(B)$. В [B] доказана следующая теорема о стабильности величин (1.12), (1.13) при возмущениях.

Теорема 1.1 [B]. *Пусть* $b = a + f$ *и условия* (1.7), (1.8) *выполнены. Пусть* $\lambda = \overline{\lambda} \in \rho(A)$, $\mu = \overline{\mu} \in \rho(B)$. *Тогда*

а. *Если выполнено* (1.10+) *и*

$$W_+(A + \gamma I)^{-1} \in \Sigma_{2p}^0, \tag{1.14}$$

то

$$\Delta_p^{(+)}(\lambda; A, W_+) = \Delta_p^{(+)}(\mu; B, W_+),$$
$$\delta_p^{(+)}(\lambda; A, W_+) = \delta_p^{(+)}(\mu; B, W_+).$$

в. *Если выполнено* (1.10−) *и*

$$W_-(A + \gamma I)^{-1} \in \Sigma_{2p}^0, \tag{1.15}$$

то

$$\Delta_p^{(-)}(\lambda; A, W_-) = \Delta_p^{(-)}(\mu; B, W_-) = 0. \tag{1.16}$$

Дополнительные разъяснения по поводу материала этого пункта содержатся в §2.

4. Здесь формулируется основной результат работы. Он относится к *незнакоопределенным* возмущениям.

Пусть форма a и оператор A — те же, что и выше, $v_\pm$ определены в (1.11) и выполнено (1.10). Форма

$$v = v_+ - v_- \tag{1.17}$$

компактна в $d[a]$. Введем в $\mathfrak{X}$ семейство полуограниченных снизу замкнутых на $d[a]$ форм $a(\alpha)$,

$$a(\alpha) = a - \alpha v, \quad \alpha > 0. \tag{1.18}$$

Соответствующий форме (1.18) самосопряженный оператор в $\mathfrak{X}$ обозначим через $A(\alpha)$. Поскольку разность резольвент операторов A и $A(\alpha)$ компактна, спектр оператора $A(\alpha)$ в лакунах $\sigma(A)$ дискретен. Пусть интервал $\Lambda = (\lambda_-, \lambda_+)$ — *лакуна* в спектре $\sigma(A)$, т. е. $\Lambda \subset \rho(A)$, $\lambda_\pm \in \sigma(A)$ (если $\lambda_+ = \inf \sigma(A)$, то $\lambda_- = -\infty$). Фиксируем „точку наблюдения“ λ

$$\lambda_- < \lambda < \lambda_+.$$

Пусть при некотором $\alpha_0 > 0$ число λ является собственным значением для $A(\alpha_0)$ кратности k. Тогда в некоторой окрестности точки α_0 определены вещественно аналитические функции $\lambda_j(\alpha)$, $j = \overline{1, k}$, значения которых являются собственными числами оператора $A(\alpha)$. Мы считаем, что количество повторений какого-либо из собственных значений в наборе $\{\lambda_j(\alpha)\}_{j=1}^{k}$ совпадает с кратностью этого числа. Кроме того,

$$\lambda_j(\alpha_0) = \lambda, \quad j = \overline{1,k}. \tag{1.19}$$

Распорядимся выбором окрестности точки α_0. Ясно, что среди λ_j нет постоянных. Иначе из (1.19) и единственности аналитического продолжения функций λ_j следовало бы, что $\lambda \in \sigma(A)$. Таким образом, нули производных $d\lambda_j/d\alpha$ изолированы, и окрестность точки α_0 можно выбрать так, чтобы было

$$\frac{d\lambda_j}{d\alpha}(\alpha) \neq 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \alpha_0, \quad j = \overline{1,k}.$$

Пусть k_+ из функций λ_j убывают, а k_- — возрастают (немонотонные функции не учитываются) в указанной окрестности. Тогда условимся говорить, что с ростом константы связи вблизи α_0 через λ проходит k_+ собственных значений справа налево и k_- — слева направо.

Обозначим через $N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha)$ *разность количества собственных значений оператора* $A(t)$*, прошедших через точку* $\lambda \in \Lambda$ *справа налево и слева направо при увеличении* t *от нуля до* α *(исключая* α*)*. Иначе говоря, просуммируем разности $k_+ - k_-$ по всем $t \in (0, \alpha)$, для которых $\lambda \in \sigma(A(t))$. Легко видеть, что такие t изолированы, и поэтому число их на интервале $(0, \alpha)$ конечно. Полученная сумма есть $N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha)$. Величина $N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha)$ непрерывна слева по α при каждом фиксированном $\lambda \in \Lambda$.

Если $v > 0 (v < 0)$, то собственные значения оператора $A(\alpha)$ убывают (возрастают) с ростом α. В таком случае $|N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha)|$ совпадает с числом собственых значений оператора $A(t)$, прошедших через λ при увеличении t от нуля до α.

Пусть форма $b = a + f$ — та же, что и в п. 2. В силу (1.9) условия (1.10±) влекут за собой включения

$$G_\pm(B) = W_\pm(B + \gamma I)^{-1/2} \in \Sigma_{2p}(\mathfrak{X}, \mathfrak{G}_\pm). \tag{1.20±}$$

Поэтому сказанное выше про $a(\alpha)$ приложимо и к семейству форм

$$b(\alpha) = b - \alpha v, \quad \alpha > 0. \tag{1.21}$$

В частности, форма $b(\alpha)$ порождает в $\mathfrak{X}$ самосопряженный оператор $B(\alpha)$, и для $\mu = \overline{\mu} \in \rho(B)$ определена величина $N(\mu, B, W_+, W_-, \alpha)$.

Условия (1.10) гарантируют (см. ниже §5, п. 1) конечность следующих величин

$$\Delta_p(\lambda; A, W_+, W_-) = \limsup_{\alpha\to\infty} \alpha^{-p} N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha), \tag{1.22}$$

$$\delta_p(\lambda; A, W_+, W_-) = \liminf_{\alpha\to\infty} \alpha^{-p} N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha). \tag{1.23}$$

В силу (1.20) конечны также величины

$$\Delta_p(\mu; B, W_+, W_-), \quad \delta_p(\mu; B, W_+, W_-), \quad \mu = \overline{\mu} \in \rho(B).$$

Наш основной результат — следующая теорема о стабильности величин (1.22), (1.23).

Теорема 1.2. *Пусть* $b = a + f$ *и выполнены условия* (1.7), (1.8). *Пусть форма* v *в соотношениях* (1.18), (1.21) *определена в* (1.17), *а* $v_\pm$ *— в* (1.11), *и пусть выполнено* (1.10). *Предположим также, что выполнены условия* (1.14) *и* (1.15). *Тогда для любых* $\lambda = \overline{\lambda} \in \rho(A)$ *и* $\mu = \overline{\mu} \in \rho(B)$

$$\Delta_p(\lambda; A, W_+, W_-) = \Delta_p(\mu; B, W_+, W_-), \tag{1.24}$$

$$\delta_p(\lambda; A, W_+, W_-) = \delta_p(\mu; B, W_+, W_-). \tag{1.25}$$

При $\lambda < \inf \sigma(A)$ величина $N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha)$ совпадает с количеством собственных значений оператора $A(\alpha)$, лежащих левее λ, и для ее вычисления можно применять вариационный принцип. Оценки и асимптотики величины $N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha)$ при $\lambda < \inf \sigma(A)$ подробно исследовались, например, для полигармонического оператора и его обобщений (см., например, [BS3]). Теорема 1.2 (как и теорема 1.1) сводит вычисление функционалов (1.22), (1.23) к случаю полубесконечной лакуны и позволяет рассматривать более простые операторы. Это дает возможность применять уже готовые асимптотические результаты.

Ясно, что теорема 1.2 является прямым обобщением теоремы 1.1 на случай незнакоопределенных возмущений. Ее доказательство, однако, значительно сложнее и требует технической подготовки. Соответствующий вспомогательный материал приведен в §2–4, а завершается доказательство в §5.

§2. Случай знакоопределенных возмущений

В этом параграфе приводятся нужные нам результаты работы [B]. Формулировки утверждений даны в удобном для нас варианте. Кроме того, устанавливается предложение 2.1, которое обобщает теорему 1.1 из [B].

1. Пусть форма f удовлетворяет (1.7), (1.8), формы a, b и операторы A, B — те же, что в §1. Следующая версия резольвентного тождества приведена в [B]. Положим

$$M_\lambda = (A-\lambda I)^{-1} - (B-\lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A) \cap \rho(B).$$

Тогда

$$\begin{aligned}(M_\lambda h, h) &= f[(B-\lambda I)^{-1}h, (A-\overline{\lambda} I)^{-1}h] \\ &= f[(A-\lambda I)^{-1}h, (B-\overline{\lambda} I)^{-1}h], \quad h \in \mathfrak{X}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Пусть $W_\pm$ — те же, что в §1, п. 2 и выполнено (1.10±). При $\lambda \in \rho(A)$ рассмотрим операторы

$$X_\lambda(A) := G_+(A)(A+\gamma I)(A-\lambda I)^{-1}G_-(A)^*,$$
$$X_\lambda^\pm(A) := G_\pm(A)(A+\gamma I)(A-\lambda I)^{-1}G_\pm(A)^*.$$

В силу (1.10) они принадлежат классу Σ_p. При $\lambda = \overline{\lambda}$ операторы $X_\lambda^\pm(A)$ самосопряжены в $\mathfrak{G}_\pm$. Если Λ — лакуна в спектре $\sigma(A)$, то $X_\lambda^\pm(A)$ — неубывающая функция от $\lambda \in \Lambda$. Операторы $X_\lambda(A)$, $X_\lambda^\pm(A)$ допускают эквивалентное определение

$$X_\lambda(A)g = W_+(A-\lambda I)^{-1}W_-^*g, \quad g \in \mathcal{D}(W_-^*), \tag{2.2}$$
$$X_\lambda^\pm(A)g = W_\pm(A-\lambda I)^{-1}W_\pm^*g, \quad g \in \mathcal{D}(W_\pm^*). \tag{2.3±}$$

Аналогично определяются операторы $X_\mu(B)$, $X_\mu^\pm(B)$ при $\mu \in \rho(B)$. В следующем утверждении речь идет о возмущении оператора $X_\lambda(A)$ при изменении точки λ и оператора A. Аналогичный результат установлен в [B] для случая $\mathfrak{G}_+ = \mathfrak{G}_-$, $W_+ = W_-$.

Предложение 2.1. *Пусть $b = a + f$ и выполнены условия* (1.7), (1.8), (1.10), (1.15). *Тогда при $\lambda = \overline{\lambda} \in \rho(A)$, $\mu = \overline{\mu} \in \rho(B)$ выполнено*

$$Z := X_\lambda(A) - X_\mu(B) \in \Sigma_p^0(\mathfrak{G}_-, \mathfrak{G}_+). \tag{2.4}$$

Доказательство. Схема рассуждений та же, что при доказательстве теоремы 1.1 из работы [B]. Добавляя, если нужно $(-\lambda)I$ к A и B, можно добиться, чтобы было $\lambda = 0$. Далее, можно добавить к f форму оператора $(-\mu)I$, что позволяет считать $\mu = 0$. Пусть $Z = S|Z|$, где $|Z| := (Z^*Z)^{1/2}$ и $S : \mathfrak{G}_- \to \mathfrak{G}_+$ — частично-изометрический оператор с областью изометричности $\overline{\operatorname{Ran}|Z|}$. Исходя из (2.2) при $\lambda = 0$ и аналогичного представления для $X_0(B)$, мы получаем из (2.1)

$$(Zg, h) = f[A^{-1}W_-^*g, B^{-1}W_+^*h], \quad g \in \mathcal{D}(W_-^*), \ h \in \mathcal{D}(W_+^*). \tag{2.5}$$

Легко понять, что равенство (2.5) продолжимо по непрерывности на все $\mathfrak{G}_- \times \mathfrak{G}_+$ в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}(Zg, h) = f[(A+\gamma I)^{1/2}A^{-1}(G_-(A)^*g, (B+\gamma I)^{1/2}B^{-1}(G_+(B))^*h],\\ g \in \mathfrak{G}_-, \quad h \in \mathfrak{G}_+.\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Поскольку $(|Z|g, g) = (Zg, Sg)$, из (2.6) следует, что $(|Z|g, g) = f[x, y]$, где $x = (A+\gamma I)^{1/2}A^{-1}(G_-(A))^*g$, $y = (B+\gamma I)^{1/2}B^{-1}(G_+(B))^*Sg$. Отсюда и (1.6) получаем

$$(|Z|g, g) \leqslant (f_*[x, x]f_*[y, y])^{1/2} \leqslant \varepsilon^{-1/2}f_*[x, x] + \varepsilon^{1/2}f_*[y, y], \quad \varepsilon > 0.$$

Теперь из (1.8), (1.9) имеем

$$\begin{aligned} &f_*[y, y] \leqslant Cb_\gamma[y, y],\\ &(|Z|g, g) \leqslant \varepsilon^{1/2}(a_\gamma[x, x] + Cb_\gamma[y, y]) + \varepsilon^{-1/2}C(\varepsilon)\|x\|^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Оценим формы в правой части. Очевидно,

$$a_\gamma[x, x] \leqslant C\|G_-(A)^*g\|^2, \tag{2.8}$$

$$b_\gamma[x, x] \leqslant C\|G_+(B)^*g\|^2, \tag{2.9}$$

$$\|x\|^2 \leqslant C\|(W_-(A+\gamma I)^{-1})^*g\|^2. \tag{2.10}$$

Рассмотрим $a_\gamma[x, x]$, $b_\gamma[y, y]$ как квадратичные формы относительно g. Из (1.10−), (1.20+), (2.8), (2.9) видно, что обе формы соответствуют операторам класса Σ_p. Из (1.15), (2.10) также получаем, что форма $\|x\|^2$ соответствует оператору класса Σ_p^0. Поскольку $\varepsilon > 0$ в (2.7) произвольно мало, $|Z| \in \Sigma_p^0(\mathfrak{G}_-)$, а поэтому выполнено (2.4). •

2. Пусть операторы $A_\pm(\alpha)$ — те же, что в §1. Как известно, описание дискретного спектра $A_\pm(\alpha)$ может быть сведено к исследованию спектра компактного оператора $X_\lambda^\pm(A)$. Мы заимствуем из [B] соответствующую версию этого приема.

Предложение 2.2. *Пусть* $\lambda = \overline{\lambda} \in \rho(A)$. *Следующие два утверждения эквивалентны:*

1) *точка* λ *является собственным значением кратности* k *для оператора* $A_\pm(\alpha)$;

2) точка $\pm\alpha^{-1}$ является собственным значением кратности k для оператора $X_\lambda^\pm(A)$.

Из предложения 2.2 вытекает

Предложение 2.3. *Пусть* $\lambda = \overline{\lambda} \in \rho(A)$. *Тогда*

$$N_\pm(\lambda, A, W_\pm, \alpha) = n_\pm(\alpha^{-1}, X_\lambda^\pm(A)), \quad \alpha > 0. \tag{2.11$\pm$}$$

Аналогичное соотношение имеет место при замене оператора A на B и точки λ на точку $\mu = \overline{\mu} \in \rho(B)$.

Пусть (1.10$\pm$) выполнено. Тогда $X_\lambda^\pm(A) \in \Sigma_p$ при $\lambda = \overline{\lambda} \in \rho(A)$ и с учетом (1.20$\pm$), $X_\mu^\pm(B) \in \Sigma_p$ при $\mu = \overline{\mu} \in \rho(B)$. Теперь (2.11) гарантирует конечность величин (1.12), (1.13), поскольку

$$\begin{aligned} \Delta_p^{(\pm)}(\lambda; A, W_\pm) &= \Delta_p^{(\pm)}(X_\lambda^\pm(A)), \\ \delta_p^{(\pm)}(\lambda; A, W_\pm) &= \delta_p^{(\pm)}(X_\lambda^\pm(A)). \end{aligned} \tag{2.12$\pm$}$$

Так же устанавливается конечность величин $\Delta_p^{(\pm)}(\mu; B, W_\pm)$, $\delta_p^{(\pm)}(\mu; B, W_\pm)$, $\mu = \overline{\mu} \in \rho(B)$.

В заключение уточним характер убывания собственных значений оператора $A_+(\alpha)$ с ростом α.

Предложение 2.4. *Пусть* Λ — *лакуна в спектре* $\sigma(A)$ *и* $\lambda \in \Lambda$ — *собственное значение оператора* $A_+(\alpha_0)$ *кратности* k. *Пусть значения аналитических функций* $\lambda_j(\alpha)$, $j = \overline{1,k}$, *являются собственными числами оператора* $A_+(\alpha)$ *в некоторой окрестности* α_0 *и* $\lambda_j(\alpha_0) = \lambda$, $j = \overline{1,k}$. *Тогда функции* λ_j *строго убывают в этой окрестности.*

Доказательство. Пусть одна из функций λ_j убывает в указанной окрестности не строго, т. е. найдется интервал $(\alpha_1, \alpha_2) \subset \mathbb{R}_+$, на котором она принимает некоторое постоянное значение $\lambda_0 \in \Lambda$. Тогда, в силу предложения 2.2, $(\alpha_1, \alpha_2) \subset \sigma(X_{\lambda_0}^+(A))$. Это противоречит компактности $X_{\lambda_0}^+(A)$. •

Аналогичное утверждение имеет место в случае оператора $A_-(\alpha)$.

§3. Оператор-функции (отображения) классов $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{S}_p^0$

В этом параграфе приводятся необходимые для наших целей обобщения классов Σ_p и Σ_p^0. Эти обобщения связаны с заменой „индивидуальных“ операторов отображениями вида

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2). \tag{3.1}$$

1. Для $0 < p < \infty$ введем класс $\mathcal{S}_p(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ отображений (3.1), для которых конечна величина

$$\sup_{s>0} s^p n(s, \varepsilon\mathcal{T}(s^{-1})), \quad \varepsilon > 0, \tag{3.2}$$

при каждом $\varepsilon > 0$. Ясно, что $\mathcal{S}_p$ — линейное множество (пространство). Возможность введения в $\mathcal{S}_p$ квазинормы обсуждать не будем. Введем аналоги функционалов (1.4), (1.5) для пространства $\mathcal{S}_p$. Для новых функционалов сохраним прежние обозначения. При $\mathcal{T} \in \mathcal{S}_p(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ положим

$$\left.\begin{aligned} \Delta_p(\mathcal{T}) &:= \limsup_{s\to 0} s^p n(s, \mathcal{T}(s^{-1})), \\ \delta_p(\mathcal{T}) &:= \liminf_{s\to 0} s^p n(s, \mathcal{T}(s^{-1})). \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Если $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}$ и

$$\mathcal{T}(\alpha) = \mathcal{T}(\alpha)^*, \quad \forall \alpha > 0, \tag{3.4}$$

то положим

$$\left.\begin{aligned} \Delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T}) &= \Delta_p(\mathcal{T}_\pm), \\ \delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T}) &= \delta_p(\mathcal{T}_\pm), \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

где $2\mathcal{T}_\pm(\cdot) := |\mathcal{T}(\cdot)| \pm \mathcal{T}(\cdot)$. Условие

$$\Delta_p(\varepsilon\mathcal{T}) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

выделяет в $\mathcal{S}_p$ *подпространство*, которое будем обозначать через $\mathcal{S}_p^0$.

2. Обсудим простейшие свойства функционалов (3.3), (3.5). При условии (3.4) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\Delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T}) \leqslant \Delta_p(\mathcal{T}), \\ &\Delta_p(\mathcal{T}) \leqslant \Delta_p^{(+)}(\mathcal{T}) + \Delta_p^{(-)}(\mathcal{T}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Приведем три предложения о поведении функционалов (3.3), (3.5) при алгебраических операциях с отображениями (3.1).

Предложение 3.1. *Пусть для* $\mathcal{T}_j \in \mathcal{S}_p(\mathfrak{X})$, $j = 1, 2$, *выполнено* (3.4). *Тогда при любом* $\varepsilon \in (0,1)$ *имеют место неравенства*

$$\Delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) \leqslant \Delta_p^{(\pm)}(\varepsilon^{-1}\mathcal{T}_1) + \Delta_p^{(\pm)}((1-\varepsilon)^{-1}\mathcal{T}_2), \tag{3.7±}$$

$$\delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) \leqslant \Delta_p^{(\pm)}(\varepsilon^{-1}\mathcal{T}_1) + \delta_p^{(\pm)}((1-\varepsilon)^{-1}\mathcal{T}_2). \tag{3.8}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством (1.1), полагая в нем $T_1 = \mathcal{T}_1(s^{-1})$, $T_2 = \mathcal{T}_2(s^{-1})$, $s_1 = \varepsilon s$, $s_2 = (1-\varepsilon)s$ при $s > 0$. Имеем

$$n_\pm(s, \mathcal{T}_1(s^{-1}) + \mathcal{T}_2(s^{-1})) \leqslant n_\pm(s, \varepsilon^{-1}\mathcal{T}_1(s^{-1})) + n_\pm(s, (1-\varepsilon)^{-1}\mathcal{T}_2(s^{-1})).$$

Умножая на s^p и переходя к верхним пределам при $s \to 0$, получаем (3.7). Аналогично получается (3.8). •

Тем же путем устанавливается

Предложение 3.2. *Для* $\mathcal{T}_j \in \mathcal{S}_p(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$, $j = 1, 2$, *при любом* $\varepsilon \in (0,1)$ *справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} \Delta_p(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) &\leqslant \Delta_p(\varepsilon^{-1}\mathcal{T}_1) + \Delta_p((1-\varepsilon)^{-1}\mathcal{T}_2), \\ \delta_p(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) &\leqslant \Delta_p(\varepsilon^{-1}\mathcal{T}_1) + \delta_p((1-\varepsilon)^{-1}\mathcal{T}_2). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Теперь рассмотрим произведение отображений вида (3.1).

Предложение 3.3. *Пусть* $\mathcal{T}_1 \in \mathcal{S}_p(\mathfrak{X}_3, \mathfrak{X}_2)$, $\mathcal{T}_2 \in \mathcal{S}_p(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_3)$ *и* $\mathcal{T}(\alpha) = \alpha\mathcal{T}_1(\alpha)\mathcal{T}_2(\alpha)$, $\alpha > 0$. *Тогда* $\mathcal{T} \in \mathcal{S}_p(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ *и*

$$\Delta_p(\mathcal{T}) \leqslant \Delta_p(\varepsilon\mathcal{T}_1) + \Delta_p(\varepsilon^{-1}\mathcal{T}_2), \quad \forall\varepsilon > 0. \tag{3.10}$$

Доказательство. Воспользуемся (1.3), полагая $T_1 = s^{-1}\mathcal{T}_1(s^{-1})$, $T_2 = \mathcal{T}(s^{-1})$, $s_1 = \varepsilon^{-1}$, $s_2 = \varepsilon s$ при $s > 0$. Тогда

$$n(s, \mathcal{T}(s^{-1})) \leqslant n(s, \varepsilon\mathcal{T}_1(s^{-1})) + n(s, \varepsilon^{-1}\mathcal{T}_2(s^{-1})). \tag{3.11}$$

Умножая на s^p и переходя при $s \to 0$ к верхним пределам, получим (3.10). Заменяя в (3.11) $\mathcal{T}$ на $\varepsilon\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_j$ на $\varepsilon^{1/2}y_j$, $j = \overline{1,2}$, придем к конечности величины (3.2). Таким образом, $\mathcal{T} \in \mathcal{S}_p$. •

В завершение этого пункта рассмотрим поведение величин (3.3), (3.5) при аддитивных возмущениях класса $\mathcal{S}_p^0$. Полной аналогии со случаем функционалов (1.4), (1.5) здесь достичь нельзя, поскольку функционалы (3.3), (3.5) не обладают однородностью при умножении $\mathcal{T}$ на постоянные. Это приходится компенсировать дополнительным условием на $\mathcal{T}$.

Предложение 3.4. *Пусть отображения* $\mathcal{T} \in \mathcal{S}_p(\mathfrak{X})$, $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{S}_p^0(\mathfrak{X})$ *удовлетворяет условию* (3.4). *Тогда*

а. *Если* $\lim\limits_{t\to 1} \Delta_p^{(\pm)}(t\mathcal{T}) = \Delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T})$, *то* $\Delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T}+\mathcal{T}_0) = \Delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T})$.

в. *Если* $\lim\limits_{t\to 1} \delta_p^{(\pm)}(t\mathcal{T}) = \delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T})$, *то* $\delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T}+\mathcal{T}_0) = \delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T})$.

Доказательство. Для определенности установим пункт а; пункт в устанавливается аналогично. Положим в (3.7) $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$. С учетом условия

$$\Delta_p(\varepsilon^{-1}\mathcal{T}_0) = 0, \tag{3.12}$$

имеем

$$\Delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T}+\mathcal{T}_0) \leqslant \Delta_p^{(\pm)}((1-\varepsilon)^{-1}\mathcal{T}), \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\Delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T}+\mathcal{T}_0) \leqslant \Delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T}).$$

Покажем, что верна обратная оценка. Возьмем в (3.7) $\mathcal{T}_1 = (\varepsilon-1)\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_2 = (1-\varepsilon)(\mathcal{T}+\mathcal{T}_0)$, $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда с помощью (3.12) (с заменой ε на $\varepsilon/(1-\varepsilon)$) получим

$$\Delta_p^{(\pm)}((1-\varepsilon)\mathcal{T}) \leqslant \Delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T}+\mathcal{T}_0),$$

и при $\varepsilon \to 0$

$$\Delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T}) \leqslant \Delta_p^{(\pm)}(\mathcal{T}+\mathcal{T}_0). \quad \bullet$$

Аналогично доказывается следующее утверждение для функционалов Δ_p, δ_p.

Предложение 3.5. *Пусть* $\mathcal{T} \in \mathcal{S}_p(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$, $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{S}_p^0(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$. *Тогда*

а. *Если* $\lim\limits_{t\to 1} \Delta_p(t\mathcal{T}) = \Delta_p(\mathcal{T})$, *то* $\Delta_p(\mathcal{T}+\mathcal{T}_0) = \Delta_p(\mathcal{T})$.

в. *Если* $\lim\limits_{t\to 1} \delta_p(t\mathcal{T}) = \delta_p(\mathcal{T})$, *то* $\delta_p(\mathcal{T}+\mathcal{T}_0) = \delta_p(\mathcal{T})$.

3. Приведем достаточные условия принадлежности отображения (3.1) классу $\mathcal{S}_p^0$. Начнем с условия в терминах операторных неравенств.

Предложение 3.6. *Пусть для* $\mathcal{T}_1 \in \mathcal{S}_p(\mathfrak{X})$ *и* $\mathcal{T}_2 \in \mathcal{S}_p^0(\mathfrak{X})$ *выполнены условия вида* (3.4) *и* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \Delta_p(\varepsilon\mathcal{T}_1) = 0$. *Предположим, что для отображения* $\mathcal{T}$, *удовлетворяющего* (3.4), *выполнены нервенства (при обоих индексах „±")*

$$\pm\mathcal{T}(\alpha) \leqslant \varepsilon\mathcal{T}_1(\alpha) + C(\varepsilon)\mathcal{T}_2(\alpha), \quad \forall\alpha > 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{3.13}$$

Тогда $\mathcal{T} \in \mathcal{S}_p^0(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Положим $\mathcal{T}_\varepsilon := \varepsilon\mathcal{T}_1 + C(\varepsilon)\mathcal{T}_2$, $\varepsilon > 0$. Очевидно $\mathcal{T}_\varepsilon \in \mathcal{S}_p$, а тогда и $\mathcal{T} \in \mathcal{S}_p$. Из (3.13) имеем

$$n_\pm(s, \eta\mathcal{T}(s^{-1})) \leqslant n_+(s, \eta\mathcal{T}_\varepsilon(s^{-1}))$$

при любых s, ε, $\eta > 0$. Отсюда получаем

$$\Delta_p^{(\pm)}(\eta\mathcal{T}) \leqslant \Delta_p^{(+)}(\eta\mathcal{T}_\varepsilon), \quad \forall\varepsilon, \eta > 0.$$

Воспользуемся теперь неравенством (3.7+), заменяя в нем $\mathcal{T}_1 \mapsto \eta\varepsilon\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2 \mapsto \eta C(\varepsilon)\mathcal{T}_2$, $\varepsilon \mapsto \varepsilon^{1/2}$. Тогда

$$\Delta_p^{(+)}(\eta\mathcal{T}_\varepsilon) \leqslant \Delta_p^{(+)}(\eta\varepsilon^{1/2}\mathcal{T}_1) + \Delta_p^{(+)}(\eta(1-\varepsilon^{1/2})^{-1}C(\varepsilon)\mathcal{T}_2), \quad \forall\varepsilon, \eta > 0.$$

Таким образом,

$$\Delta_p^{(\pm)}(\eta\mathcal{T}) \leqslant \Delta_p^{(+)}(\eta\varepsilon^{1/2}\mathcal{T}_1), \quad \forall\varepsilon, \eta > 0,$$

и при $\varepsilon \to 0$, получаем, что $\Delta_p^{(\pm)}(\eta\mathcal{T}) = 0$, $\forall\eta > 0$. Остается использовать (3.6). •

Пусть теперь $T_1 \in \mathfrak{S}_\infty$, а $\mathcal{T}_2$ — отображение вида (3.1). Укажем достаточные условия, при которых отображение

$$\mathcal{T}(\alpha) = \alpha T_1 \mathcal{T}_2(\alpha), \quad \alpha > 0, \tag{3.14}$$

принадлежит классу $\mathcal{S}_p^0$.

Предложение 3.7. *Пусть* $T_1 \in \Sigma_p(\mathfrak{X}_3, \mathfrak{X}_2)$, $\mathcal{T}_2 \in \mathcal{S}_p^0(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_3)$ *и* $\mathcal{T}$ *— отображение* (3.14). *Тогда* $\mathcal{T} \in \mathcal{S}_p^0(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$.

Доказательство. Условие $\mathcal{T} \in \mathcal{S}_p$ прямо вытекает из предложения 3.3. Далее, произведем в неравенстве (3.10) замену $T_1 \mapsto \eta^{1/2}T_1$, $\mathcal{T}_2 \mapsto \eta^{1/2}\mathcal{T}_2$. Имеем

$$\Delta_p(\eta\mathcal{T}) \leqslant \Delta_p(\varepsilon\eta^{1/2}T_1) + \Delta_p(\varepsilon^{-1}\eta^{1/2}\mathcal{T}_2), \quad \varepsilon, \eta > 0.$$

Отсюда вытекает оценка $\Delta_p(\eta\mathcal{T}) \leqslant \eta^{p/2}\varepsilon^p\Delta_p(T_1)$, и при $\varepsilon \to 0$ $\Delta_p(\eta\mathcal{T}) = 0$, $\forall\eta > 0$. •

Предложение 3.8. *Пусть* $T_1 \in \Sigma_p^0(\mathfrak{X}_3, \mathfrak{X}_2)$, $\mathcal{T}_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_3)$ *и* $\mathcal{T}$ *определено в* (3.14). *Пусть также* $n(s, \mathcal{T}_2(s^{-1})) = o(s^{-p})$ *при* $s \to 0$ *и* $\sup_{s>0} s^p n(s, \mathcal{T}_2(s^{-1})) < \infty$. *Тогда*

$$\mathcal{T} \in \mathcal{S}_p^0(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2). \tag{3.15}$$

Доказательство. Воспользуемся (1.3), взяв $T_1 = \varepsilon T_1$, $T_2 = s^{-1}\mathcal{T}_2(s^{-1})$, $s_1 = s$, $s_2 = 1$, при ε, $s > 0$. Тогда для всех $\varepsilon > 0$

$$n(s, \varepsilon\mathcal{T}(s^{-1})) \leqslant n(s, \varepsilon T_1) + n(s, \mathcal{T}_2(s^{-1})).$$

Отсюда вытекает (3.15). •

Из предложений 3.7, 3.8 выводится следующий результат.

Предложение 3.9. *Пусть* $\mathcal{T}_j$ *— отображения вида* (3.1), $T_j \in \Sigma_p$, $j = 1, 2$. *Предположим, что* $\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2 \in \mathcal{S}_p^0$, $T_1 - T_2 \in \Sigma_p^0$. *Пусть также* $n(s, \mathcal{T}_1(s^{-1})) = o(s^{-p})$ *при* $s \to 0$ *и* $\sup_{s>0} s^p n(s, \mathcal{T}_1(s^{-1})) < \infty$. *Тогда отображение*

$$\mathbb{R}_+ \ni \alpha \mapsto \alpha^2(T_1\mathcal{T}_1(\alpha)T_1^* - T_2\mathcal{T}_2(\alpha)T_2^*) \in \mathfrak{S}_\infty$$

принадлежит классу $\mathcal{S}_p^0$.

Доказательство. Сингулярные числа операторов T и T^* совпадают. Поэтому условия вида $T \in \Sigma_p^0$, $\mathcal{T} \in \mathcal{S}_p^0$ и т. п. сохраняются при сопряжении. Кроме того, сопряжением в (3.14) получаем, что в предложениях 3.7, 3.8 сомножители T_1 и $\mathcal{T}_2$ можно поменять местами. Далее, для любого $\alpha > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
&\alpha^2(T_1\mathcal{T}_1(\alpha)T_1^* - T_2\mathcal{T}_2(\alpha)T_2^*)\\
&\quad = \alpha^2(T_1 - T_2)\mathcal{T}_1(\alpha)T_1^* + \alpha^2 T_2\mathcal{T}_1(\alpha)(T_1 - T_2)^* + \alpha^2 T_2(\mathcal{T}_1(\alpha) - \mathcal{T}_2(\alpha))T_2^*\\
&\quad =: \mathcal{F}_1(\alpha) + \mathcal{F}_2(\alpha) + \mathcal{F}_3(\alpha).
\end{aligned}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в отдельности. Произведем в предложении 3.7 замену $T_1 \mapsto T_2$, $\mathcal{T}_2(\alpha) \mapsto \alpha\mathcal{T}_1(\alpha)(T_1 - T_2)^* =: \mathcal{F}_4(\alpha)$. Тогда $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{S}_p^0$, коль скоро $\mathcal{F}_4 \in \mathcal{S}_p^0$. Последнее включение получается из предложения 3.8 при перемене порядка сомножителей в $\mathcal{F}_4$. Подобным же образом устанавливается, что $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{S}_p^0$. Включение $\mathcal{F}_3 \in \mathcal{S}_p^0$ получается применением предложения 3.7 дважды: сначала с одним, а затем с другим порядком сомножителей в (3.14). •

Подчеркнем, что в условиях предложения 3.9 не требуется, чтобы было $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2 \in \mathcal{S}_p$. То же относится к $\mathcal{T}_2$ в условиях предложения 3.8.

4. До сих пор мы имели дело с отображениями (3.1), заданными на $\mathbb{R}_+$. В дальнейшем нам потребуется рассматривать отображения

$$\mathcal{T} : \mathcal{Y} \to \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2), \tag{3.16}$$

где $\mathcal{Y}$ — фиксированное плотное в $\mathbb{R}_+$ множество. *Все предыдущие рассмотрения сохранят свою силу при таком изменении.* При ссылках мы будем предполагать, что в предложениях 3.1–3.9 проведена замена $\mathbb{R}_+$ на $\mathcal{Y}$. Ниже роль $\mathcal{Y}$ будет играть полуось $\mathbb{R}_+$, из которой выброшена некоторая последовательность $\alpha_k \to \infty$. В обозначениях классов $\mathcal{S}_p(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$, $\mathcal{S}_p^0(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ зависимость от $\mathcal{Y}$ указываться не будет.

§4. О некоторых специальных оператор-функциях

Пусть A, B, $A_-(\alpha)$, $B_-(\alpha)$ — те же, что и в §1,2. Фиксируем $\lambda = \overline{\lambda} \in \rho(A)$, $\mu = \overline{\mu} \in \rho(B)$. В этом параграфе рассматриваются отображения (3.16), где $\mathcal{Y}$ фиксировано и удовлетворяет условиям $\overline{\mathcal{Y}} = \mathbb{R}_+$,

$$\mathcal{Y} \subset \{\, \alpha > 0 : \lambda \in \rho(A_-(\alpha)), \mu \in \rho(B_-(\alpha)) \,\}.$$

Дальнейшая конкретизация $\mathcal{Y}$ будет сделана в §5.

1. Наряду с операторами $X_\lambda^\pm(A)$, $X_\mu^\pm(B)$ (см. §2) можно ввести операторы $X_\lambda^\pm(A_-(\alpha))$, $X_\mu^\pm(B_-(\alpha))$, $\alpha \in \mathcal{Y}$. Они ограничены и самосопряжены в $\mathfrak{G}_\pm$; из (1.10±) следует, что $X_\lambda^\pm(A_-(\alpha)) \in \Sigma_p$, $X_\mu^\pm(B_-(\alpha)) \in \Sigma_p$.

Наша ближайшая задача — исследовать отображение

$$\mathcal{T}_- : \mathcal{Y} \ni \alpha \mapsto X_\lambda^-(A_-(\alpha)) - X_\mu^-(B_-(\alpha)) \in \Sigma_p. \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Пусть* $b = a + f$ *и выполнены условия* (1.7), (1.8), (1.10−), (1.15). *Пусть* $\mathcal{T}_-$ *определено в* (4.1). *Тогда*

$$\mathcal{T}_- \in \mathcal{S}_p^0(\mathfrak{G}_-). \tag{4.2}$$

Отложим доказательство теоремы 4.1 до следующего пункта, а здесь установим три предварительных утверждения.

Предложение 4.2. *Пусть условия* (1.10−), (1.15) *выполнены. Тогда*

$$n(\alpha^{-1}, X_\lambda^-(A_-(\alpha)) = N_-(\lambda, A, W_-, 2\alpha) = o(\alpha^p), \quad \alpha \in \mathcal{Y}, \ \alpha \to \infty. \tag{4.3}$$

Доказательство. Фиксируем $\alpha \in \mathcal{Y}$. Рассмотрим $A_-(\alpha)$ в качестве невозмущенного оператора, а возмущение введем с помощью формы $\mp\beta v_-$, $\beta > 0$. Параметр β при этом играет роль константы связи. Тогда возмущенный оператор есть $A_-(\alpha \mp \beta)$. Из предложения 2.2 вытекает равенство

$$\dim \operatorname{Ker}(X_\lambda^-(A_-(\alpha)) \mp \beta^{-1} I) = \dim \operatorname{Ker}(A_-(\alpha \mp \beta) - \lambda I).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &n(\alpha^{-1}, X_\lambda^-(A_-(\alpha))) \\ &\quad = n_+(\alpha^{-1}, X_\lambda^-(A_-(\alpha))) + n_-(\alpha^{-1}, X_\lambda^-(A_-(\alpha))) \\ &\quad = \sum_{0<\beta<\alpha} \dim \operatorname{Ker}(A_-(\alpha - \beta) - \lambda I) + \sum_{0<\beta<\alpha} \dim \operatorname{Ker}(A_-(\alpha + \beta) - \lambda I) \\ &\quad = \sum_{0<t<2\alpha} \dim \operatorname{Ker}(A(t) - \lambda I) = N_-(\lambda, A, W, 2\alpha). \end{aligned}$$

Остается учесть (1.16). •

Рассмотрим отображения

$$\mathcal{F}_0 : \mathcal{Y} \ni \alpha \mapsto W_-(A_-(\alpha) - \lambda I)^{-1} \in \Sigma_{2p}, \tag{4.4}$$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{F}_0(\alpha)\mathcal{F}_0(\alpha)^*, \quad \alpha \in \mathcal{Y}. \tag{4.5}$$

Выведем для $\mathcal{F}$ аналог включения (1.15).

Предложение 4.3. *Пусть $\mathcal{F}$ определено в* (4.4), (4.5) *и условия* (1.10−), (1.15) *выполнены. Тогда*

$$\mathcal{F} \in \mathcal{S}_p^0(\mathfrak{G}_-). \tag{4.6}$$

Доказательство. Получим для $\mathcal{F}_0(\alpha)^*$ более удобное представление. Не уменьшая общности, будем считать $\lambda = 0$. Положим $M(\alpha) := A^{-1} - A_-(\alpha)^{-1}$. Тогда $(M(\alpha)x, y) = \alpha v_-[A_-(\alpha)^{-1}x, A^{-1}y] = \alpha(W_-A_-(\alpha)^{-1}x, W_-A^{-1}y)$. Взяв $x = W_-^* g$, $g \in \mathcal{D}(W_-^*)$, получим

$$(M(\alpha)W_-^* g, y) = \alpha(X_0^-(A_-(\alpha))g, W_-A^{-1}y), \quad g \in \mathcal{D}(W_-^*), \; y \in \mathfrak{X}.$$

Это равенство эквивалентно следующему

$$(W_-A_-(\alpha)^{-1})^* = (W_-A^{-1})^*(I - \alpha X_0^-(A_-(\alpha))), \quad \alpha \in \mathcal{Y}. \tag{4.7}$$

Из (4.5) $n(s,\varepsilon^2\mathcal{F}(\alpha)) = n(s^{1/2},\varepsilon\mathcal{F}_0(\alpha))$, ε, $s>0$, $\alpha\in\mathcal{Y}$. Оценим правую часть. Для этого воспользуемся (1.2), взяв в нем $2s_1 = 2s_2 = s^{1/2}$, $T_1 = \varepsilon(W_-A^{-1})^*$ и $T_2 = -\alpha\varepsilon(W_-A^{-1})^*X_0^-(A_-(\alpha))$. Тогда из (4.7) получим

$$n(s,\varepsilon^2\mathcal{F}(\alpha)) \leqslant n(2^{-1}s^{1/2},\varepsilon W_-A^{-1}) + n(2^{-1}s^{1/2},\alpha\varepsilon(W_-A^{-1})^*X_0^-(A_-(\alpha))),\quad s,\varepsilon>0,\quad \alpha\in\mathcal{Y}.$$

Оценим второе слагаемое в правой части. Воспользуемся (1.3), положив в нем $s_1 = 2^{-1}s^{1/2}$, $s_2 = 1$, $T_1 = \varepsilon(W_-A^{-1})^*$ и $T_2 = \alpha X_0^-(A_-(\alpha))$. Получим

$$\begin{aligned} &n(2^{-1}s^{1/2},\alpha\varepsilon(W_-A^{-1})^*X_0^-(A_-(\alpha)))\\ &\qquad\leqslant n(2^{-1}s^{1/2},\varepsilon W_-A^{-1}) + n(\alpha^{-1},X_0^-(A_-(\alpha))),\quad s,\varepsilon>0,\ \alpha\in\mathcal{Y}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$n(s,\varepsilon^2\mathcal{F}(\alpha)) \leqslant 2n(2^{-1}s^{1/2},\varepsilon W_-A^{-1}) + n(\alpha^{-1},X_0^-(A_-(\alpha))),\quad s,\varepsilon>0,\quad \alpha\in\mathcal{Y}.$$

Возьмем $s=\alpha^{-1}$. Теперь (4.6) вытекает из (1.15) и (4.3). •

В следующем утверждении рассматриваются отображения

$$\mathcal{P}_1 : \mathcal{Y}\ni\alpha\mapsto (I-\alpha X_\lambda^-(A_-(\alpha)))G_-(A)\in\Sigma_{2p}, \tag{4.8}$$
$$\mathcal{P}_2 : \mathcal{Y}\ni\alpha\mapsto (I-\alpha X_\mu^-(B_-(\alpha)))G_-(B)\in\Sigma_{2p}, \tag{4.9}$$
$$\Pi_1(\alpha) := \mathcal{P}_1(\alpha)\mathcal{P}_1(\alpha)^*,\quad \alpha\in\mathcal{Y}, \tag{4.10}$$
$$\Pi_2(\alpha) := \mathcal{P}_2(\alpha)\mathcal{P}_2(\alpha)^*,\quad \alpha\in\mathcal{Y}. \tag{4.11}$$

Предложение 4.4. *Пусть* Π_1 *определено в* (4.8), (4.10), Π_2 — *в* (4.9), (4.11), *и пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Тогда* $\Pi_j\in S_p$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta_p(\varepsilon\Pi_j) = 0,\quad j=1,2. \tag{4.12}$$

Доказательство. Проверим (4.12) при $j=1$; случай $j=2$ рассматривается так же. Воспользуемся неравенством (1.2) при $T_1 = G_-(A)$, $T_2 = -\alpha X_\lambda^-(A_-(\alpha))G_-(A)$, $s_1 = s_2 = 2^{-1}s$, $s>0$, $\alpha\in\mathcal{Y}$. Получим

$$\begin{aligned} n(s^2,\Pi_1(\alpha)) &= n(s,\mathcal{P}_1(\alpha))\\ &\leqslant n(2^{-1}s,G_-(A)) + n(2^{-1}s,\alpha X_\lambda^-(A_-(\alpha))G_-(A)),\quad s>0,\ \alpha\in\mathcal{Y}.\end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое в правой части. Для этого положим в (1.3) $T_1 = \alpha X_\lambda^-(A_-(\alpha))$, $T_2 = G_-(A)$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2^{-1}s$ при s, $\alpha > 0$. В итоге получим

$$n(s^2, \Pi_1(\alpha)) \leqslant n(\alpha^{-1}, X_\lambda^-(A_-(\alpha))) + 2n(s/2, G_-(A)), \quad s > 0, \ \alpha \in \mathcal{Y}. \tag{4.13}$$

Положим в (4.13) $s^2 = (\varepsilon\alpha)^{-1}$ и умножим на α^{-p}. Теперь, если мы перейдем к верхней границе по $\alpha > 0$, то получим, что $\Pi_1 \in \mathcal{S}_p$, а если возьмем верхний предел, то придем к оценке

$$\Delta_p(\varepsilon\Pi_1) \leqslant 2^{2p+1}\varepsilon^p \Delta_{2p}(G_-(A)).$$

Отсюда следует (4.12) при $j = 1$. •

2. Доказательство теоремы 4.1. Без ограничения общности будем считать $\lambda = \mu = 0$. Исходя из представления (2.3–) для $X_0^-(A_-(\alpha))$, $X_0^-(B_-(\alpha))$, мы получаем (ср. с (2.1))

$$(\mathcal{T}_-(\alpha)g, g) = f[A_-(\alpha)^{-1}W_-^* g, B_-(\alpha)^{-1}W_-^* g], \quad g \in \mathcal{D}(W_-^*), \ \alpha \in \mathcal{Y}.$$

Положим $x = A_-(\alpha)^{-1}W_-^* g$, $y = B_-(\alpha)^{-1}W_-^* g$. Тогда

$$|(\mathcal{T}_-(\alpha)g, g)| \leqslant (f_*[x,x] f_*[y,y])^{1/2} \leqslant \varepsilon^{-1/2} f_*[x,x] + \varepsilon^{1/2} f_*[y,y], \quad \varepsilon > 0.$$

Для оценки $f_*[x,x]$ используем (1.8). Кроме того, форма f_* ограничена в $H_\gamma[a]$, а поэтому

$$f_*[y,y] \leqslant C b_\gamma[y,y].$$

Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$

$$|(\mathcal{T}_-(\alpha)g, g)| \leqslant \varepsilon^{1/2}(a_\gamma[x,x] + C b_\gamma[y,y]) + \varepsilon^{-1/2} C(\varepsilon)\|x\|^2. \tag{4.14}$$

Оценим формы в правой части. В силу (4.7)

$$\begin{aligned} a_\gamma[x,x] &= \|(A+\gamma I)^{1/2}(W_- A^{-1})^*(I - \alpha X_0^-(A_-(\alpha)))g\|^2 \\ &\leqslant C_1 \|G(A)^*(I - \alpha X_0^-(A_-(\alpha)))g\|^2 \\ &= C_1(\Pi_1(\alpha)g, g). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Аналогично

$$b_\gamma[y,y] \leqslant C_2(\Pi_2(\alpha)g, g). \tag{4.16}$$

В то же время

$$\|x\|^2 = \|A_-(\alpha)^{-1}W_-^*g\|^2 = (\mathcal{F}(\alpha)g, g). \tag{4.17}$$

Из (4.14)–(4.17) при любом $\varepsilon > 0$ получаем

$$\pm\mathcal{T}_-(\alpha) \leqslant \varepsilon^{1/2}(C_1\Pi_1(\alpha) + C_2\Pi_2(\alpha)) + \varepsilon^{-1/2}C(\varepsilon)\mathcal{F}(\alpha).$$

В силу предложения 4.3 $\mathcal{F} \in \mathcal{S}_p^0$. Кроме того, в силу предложения 4.4 для отображения $\Pi := C_1\Pi_1 + C_2\Pi_2$ выполнено $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Delta_p(\varepsilon\Pi) = 0$. Теперь (4.2) вытекает из предложения 3.6. •

3. Пусть, кроме условий теоремы 4.1, выполнено (1.10+) и (1.14). Рассмотрим отображение

$$\mathcal{T}_+ : \mathcal{Y} \ni \alpha \mapsto X_\lambda^+(A_-(\alpha)) - X_\mu^+(B_-(\alpha)) \in \Sigma_p. \tag{4.18}$$

При его исследовании будем опираться на следующее утверждение.

Предложение 4.5. *Пусть* $\alpha \in \mathcal{Y}$. *Тогда*

$$\begin{aligned} &X_\lambda^+(A_-(\alpha)) \\ &\quad= X_\lambda^+(A) - \alpha X_\lambda(A)X_\lambda(A)^* + \alpha^2 X_\lambda(A)X_\lambda^-(A_-(\alpha))X_\lambda(A)^*, \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} &X_\mu^+(B_-(\alpha)) \\ &\quad= X_\mu^+(B) - \alpha X_\mu(B)X_\mu(B)^* + \alpha^2 X_\mu(B)X_\mu^-(B_-(\alpha))X_\mu(B)^*. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Доказательство. Достаточно установить (4.19). Для простоты письма будем считать $\lambda = 0$. Положим $F(\alpha) := X_0^+(A) - X_0^+(A_-(\alpha))$. Воспользуемся (2.1), заменяя B на $A_-(\alpha)$, f на αv_-, h на W_+^*g, $g \in \mathcal{D}(W_+^*)$. Тогда в соответствии с (2.2), (2.3+) при $\lambda = 0$ и аналогичным выражением для $X_0(A_-(\alpha))$, $X_0^+(A_-(\alpha))$, получим

$$\begin{aligned} (F(\alpha)g, g) &= \alpha v_-[A^{-1}W_+^*g, A_-(\alpha)^{-1}W_+^*g] \\ &= \alpha(X_0(A)^*g, (X_0(A_-(\alpha)))^*g), \quad g \in \mathcal{D}(W_+^*). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$F(\alpha) = \alpha X_0(A_-(\alpha))X_0(A)^*, \quad \alpha \in \mathcal{Y}. \tag{4.21}$$

Аналогично, для $\Phi(\alpha) := X_0(A) - X_0(A_-(\alpha))$

$$\begin{aligned} (\Phi(\alpha)(g, h) &= \alpha v_-[A_-(\alpha)^{-1}W_-^*g, A^{-1}W_+^*h] \\ &= \alpha(X_0^-(A_-(\alpha))g, X_0(A)^*h), \quad g \in \mathcal{D}(W_-^*),\ h \in \mathcal{D}(W_+^*), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\Phi(\alpha) = \alpha X_0(A)X_0^-(A_-(\alpha)), \quad \alpha \in \mathcal{Y}.$$

Подставляя теперь $X_0(A_-(\alpha)) = X_0(A) - \Phi(\alpha)$ в (4.21), получим (4.19). •

С помощью предложения 4.5 установим следующий результат.

Предложение 4.6. *Пусть* $b = a + f$. *Предположим, что выполнены условия* (1.7), (1.8), (1.10), (1.14) *и* (1.15). *Пусть* $\mathcal{T}_+$ *определено в* (4.18). *Тогда*

$$\mathcal{T}_+ \in \mathcal{S}_p^0(\mathfrak{G}_+). \tag{4.22}$$

Доказательство. Сравним (4.19) и (4.20). В силу теоремы 1.1 из [B1] первые слагаемые в этих равенствах отличаются на оператор класса Σ_p^0. Кроме того,

$$\begin{aligned} R &:= X_\lambda(A)X_\lambda(A)^* - X_\mu(B)X_\mu(B)^* \\ &= (X_\lambda(A) - X_\mu(B))X_\lambda(A)^* + X_\mu(B)(X_\mu(A) - X_\mu(B))^* \in \Sigma_{p/2}^0 \end{aligned}$$

в силу (2.4). Поэтому $n(\alpha^{-1}, \alpha\varepsilon R) = o(\alpha^p)$ при $\alpha \to \infty$, $\forall \varepsilon > 0$. Остается показать, что отображение

$$\mathcal{Y} \ni \alpha \mapsto \alpha^2 X_\lambda(A)X_\lambda^-(A_-(\alpha))X_\lambda(A)^* - \alpha^2 X_\mu(B)X_\mu^-(B_-(\alpha))X_\mu(B)^*$$

принадлежит $\mathcal{S}_p^0(\mathfrak{G}_+)$. С учетом (2.4), (4.2) и (4.3) это вытекает из предложения 3.9. •

4. В условиях предложения 4.6 рассмотрим отображения

$$\mathcal{L}_\lambda : \mathcal{Y} \ni \alpha \mapsto X_\lambda^+(A_-(\alpha)) \in \Sigma_p, \tag{4.23}$$
$$\mathcal{M}_\mu : \mathcal{Y} \ni \alpha \mapsto X_\mu^+(B_-(\alpha)) \in \Sigma_p. \tag{4.24}$$

Следующий результат играет важную роль в наших построениях.

Теорема 4.7. *Пусть* $b = a + f$ *и выполнены условия* (1.7), (1.8), (1.10), (1.14) *и* (1.15). *Пусть* $\mathcal{L}_\lambda$ *и* $\mathcal{M}_\mu$ *определены соответственно в* (4.23), (4.24). *Тогда*

$$\Delta_p^{(+)}(\mathcal{L}_\lambda) = \Delta_p^{(+)}(\mathcal{M}_\mu), \tag{4.25}$$
$$\delta_p^{(+)}(\mathcal{L}_\lambda) = \delta_p^{(+)}(\mathcal{M}_\mu), \tag{4.26}$$
$$\Delta_p^{(-)}(\mathcal{L}_\lambda) = \Delta_p^{(-)}(\mathcal{M}_\mu) = 0. \tag{4.27}$$

Доказательство. Установим сначала (4.25)-(4.27) при $\lambda = -\gamma$. Воспользуемся предложением 3.4, взяв в нем $\mathcal{T} = \mathcal{L}_{-\gamma}$ и $\mathcal{T}_0 = \mathcal{M}_\mu - \mathcal{L}_{-\gamma}$. Условие $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{S}_p^0$ вытекает из предложения 4.6. Кроме того, нужно проверить, что $\mathcal{L}_{-\gamma} \in \mathcal{S}_p$ и

$$\lim_{t\to 1} \Delta_p^{(\pm)}(t\mathcal{L}_{-\gamma}) = \Delta_p^{(\pm)}(\mathcal{L}_{-\gamma}), \tag{4.28±}$$
$$\lim_{t\to 1} \delta_p^{(+)}(t\mathcal{L}_{-\gamma}) = \delta_p^{(+)}(\mathcal{L}_\gamma). \tag{4.29}$$

Очевидно,

$$X^{+}_{-\gamma}(A_-(\alpha)) > 0, \quad \alpha \in \mathcal{Y}. \tag{4.30}$$

Далее, рассмотрим самосопряженный оператор в $\mathfrak{X}$, порожденный формой $a + \alpha(v_- - tv_+)$, $\alpha > 0$, $t > 0$. Легко видеть, что количество собственных значений этого оператора, лежащих левее $-\gamma$, равно $n_+(\alpha^{-1}, t\mathcal{L}_{-\gamma}(\alpha))$. Иными словами, $n_+(\alpha^{-1}, t\mathcal{L}_{-\gamma}(\alpha))$ совпадает с максимальной размерностью подпространств $L \subset d[a]$, для которых

$$a_\gamma[x,x] < \alpha(tv_+[x,x] - v_-[x,x]), \quad 0 \neq x \in L. \tag{4.31}$$

Пусть $Q_\pm$ — самосопряженные операторы в $H_\gamma[a]$, соответствующие формам $v_\pm$. Максимальная размерность L, удовлетворяющих (4.31), совпадает с количеством собственных значений оператора $tQ_+ - Q_-$, больших α^{-1}. Из (1.10$\pm$) следует, что $Q_\pm \in \Sigma_p(H_\gamma[a])$. Таким образом, $\mathcal{L}_{-\gamma} \in \mathcal{S}_p$, и

$$\Delta_p^{(+)}(t\mathcal{L}_{-\gamma}) = \Delta_p^{(+)}(tQ_+ - Q_-),$$
$$\delta_p^{(+)}(t\mathcal{L}_{-\gamma}) = \delta_p^{(+)}(tQ_+ - Q_-).$$

Теперь (4.28+), (4.29) вытекает из непрерывности функционалов $\Delta_p^{(+)}$, $\delta_p^{(+)}$ на Σ_p, а (4.28$-$) — из условия (4.30). Этим установлены (4.25)-(4.27) при $\lambda = -\gamma$. Возьмем теперь $f = 0$, $\mu = \lambda$ и применим только что доказанные равенства. Получим, что левые части в (4.25)-(4.27) не зависят от $\lambda = \overline{\lambda} \in \rho(A)$. Этим завершается доказатеьлство теоремы 3.7. •

§5. Доказательство основной теоремы (теоремы 1.2)

1. Пусть оператор $A(\alpha)$ — тот же, что и в §1. Опишем прием, позволяющий свести исследование дискретного спектра $A(\alpha)$ к исследованию спектра компактных операторов, обсуждавшихся в §2,4. Основу здесь составляет следующее утверждение.

Предложение 5.1.

а. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $\lambda \in \rho(A(\alpha)) \cap \rho(A_-(\alpha)) \cap \Lambda$. *Тогда*

$$N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha) = n_+(s, X_\lambda^+(A_-(\alpha))) - n_-(s, X_\lambda^-(A)), \quad s\alpha = 1. \tag{5.1}$$

в. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $\lambda \in \rho(A(\alpha)) \cap \rho(A_+(\alpha)) \cap \Lambda$. *Тогда*

$$N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha) = n_+(s, X_\lambda^+(A)) - n_-(s, X_\lambda^-(A_+(\alpha))), \quad s\alpha = 1.$$

Доказательство предложения 5.1 отложим до п. 3.4.

Из предложения 5.1 вытекает двусторонняя оценка

$$-n_-(s, X_\lambda^-(A)) \leqslant N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha) \leqslant n_+(s, X_\lambda^+(A)),$$
$$\alpha > 0, \quad s\alpha = 1, \quad \lambda \in \rho(A(\alpha)) \cap \rho(A_+(\alpha)) \cap \rho(A_-(\alpha)) \cap \Lambda,$$

которая верна для всех $\alpha > 0$, исключая некоторую последовательность $\alpha_k \to \infty$, $k \to \infty$. С учетом непрерывности N по α, слева, получаем оценку, справедливую для всех $\alpha > 0$:

$$-n_-(\alpha^{-1} + 0, X_\lambda^-(A)) \leqslant N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha) \leqslant n_+(\alpha^{-1} + 0, X_\lambda^+(A)). \tag{5.2}$$

В силу (1.10±), $X_\lambda^\pm(A) \in \Sigma_p$; поэтому (5.2) гарантирует конечность величин (1.22), (1.23). Сказанное выше относится и к оператору $B(\alpha)$. В частности, справедлив аналог (5.1):

$$N(\mu, B, W_+, W_-, \alpha) = n_+(s, X_\mu^+(B_-(\alpha))) - n_-(s, X_\mu^-(B)),$$
$$\alpha > 0, \quad s\alpha = 1, \quad \mu = \overline{\mu} \in \rho(B(\alpha)) \cap \rho(B_-(\alpha)) \cap \rho(B),$$

и (в силу (1.20)) конечны величины

$$\Delta_p(\mu; B, W_+, W_-), \quad \delta_p(\mu; B, W_+, W_-), \quad \mu \in \rho(B).$$

2. Доказательство теоремы 1.2. Примем, что $\mathcal{Y} = \{\alpha > 0 : \lambda \in \rho(A(\alpha)) \cap \rho(A_-(\alpha)), \mu \in \rho(B(\alpha)) \cap \rho(B_-(\alpha))\}$. Множество $\mathcal{Y}$ получается из $\mathbb{R}_+$ удалением четырех уходящих на бесконечность последовательностей. Поскольку функция $N(\alpha) = N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha)$ непрерывна по α слева, то для любого $\alpha_0 > 0$

$$\sup_{\alpha > \alpha_0} \alpha^{-p} N(\alpha) = \sup_{\alpha > \alpha_0, \alpha \in \mathcal{Y}} \alpha^{-p} N(\alpha),$$
$$\inf_{\alpha > \alpha_0} \alpha^{-p} N(\alpha) = \inf_{\alpha > \alpha_0, \alpha \in \mathcal{Y}} \alpha^{-p} N(\alpha).$$

Отсюда вытекает, что функционалы (1.22), (1.23) достаточно вычислять при $\alpha \in \mathcal{Y}$, $\alpha \to \infty$. С другой стороны, на $\mathcal{Y}$ справедливо равенство (5.1). Таким образом, с учетом (1.16), (2.12−) получаем

$$\Delta_p(\lambda; A, W_+, W_-) = \Delta_p^{(+)}(\mathcal{L}_\lambda),$$
$$\delta_p(\lambda; A, W_+, W_-) = \delta_p^{(+)}(\mathcal{L}_\lambda).$$

Аналогично

$$\Delta_p(\mu; B, W_+, W_-) = \Delta_p^{(+)}(\mathcal{M}_\mu),$$
$$\delta_p(\mu; B, W_+, W_-) = \delta_p^{(+)}(\mathcal{M}_\mu).$$

Теперь (1.24), (1.25) есть прямое следствие равенств (4.25), (4.26) соответственно. •

3. Оставшаяся часть параграфа содержит **доказательство предложения 5.1.** Докажем пункт а; пункт в доказывается аналогично. Нам потребуется следующее предложение.

Предложение 5.2. *Пусть интервал* $\Lambda = (\lambda_-, \lambda_+)$ *— лакуна в спектре* $\sigma(A)$ *и для чисел* α_1, α_2, λ, λ' *выполнены условия*:

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \infty, \qquad \lambda_- < \lambda < \lambda' < \lambda_+; \\ \lambda' \in \rho(A(\beta)), \quad \beta \in [\alpha_1, \alpha_2]; \\ \lambda \in \rho(A(\alpha_j)), \quad j = 1, 2. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Обозначим $r(\beta) = \operatorname{card}\{\sigma(A(\beta)) \cap (\lambda, \lambda')\}$ (*с учетом кратности*). *Тогда*

$$r(\alpha_2) - r(\alpha_1) = N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha_1) - N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha_2). \tag{5.4}$$

Доказательство. Величина $r(\alpha_2) - r(\alpha_1)$ равна разности пришедших в интервал (λ, λ') и ушедших из него собственных значений оператора $A(\beta)$ при росте β от α_1 до α_2. С другой стороны, из (5.3) следует, что при этом через точку λ' ни одно собственное значение оператора $A(\beta)$ не проходит. Таким образом, остается контролировать прохождение собственных значений через точку λ. Это и приводит к (5.4). •

Оператор $A(\alpha)$ зависит от формы v. Мы будем сейчас указывать эту зависимость явно и писать $A(\alpha, v)$. Введем семейство эрмитовых форм

$$v_t = tv_+ - v_-, \quad t \in [0, 1].$$

Легко видеть, что при каждом $\alpha > 0$ и $t \in [0,1]$ форма $a - \alpha v_t$ полуограничена снизу и замкнута на $d[a]$. Соответствующий этой форме оператор естественно обозначать через $A(\alpha, v_t)$. Вместо обозначения $N(\lambda, A, t^{1/2}, W_+, W_-, \alpha)$ для разности количества собственных значений оператора $A(\beta, v_t)$, прошедших через точку $\lambda \in \Lambda$ справа налево и слева направо при увеличении β от нуля до $\alpha > 0$, мы будем использовать более краткое обозначение $N(t, \alpha)$. Приведем еще одно предварительное утверждение.

Предложение 5.3. *Пусть* $\alpha > 0$ *— фиксировано и* $t \in [0,1]$. *Предположим, что* $\lambda \in \rho(A(\alpha, v_t))$. *Тогда найдется* $\varepsilon > 0$ *такое, что*

$$N(t+s,\alpha) = N(t,\alpha), \quad |s| < \varepsilon, \ t+s \in [0,1]. \tag{5.5}$$

Доказательство. Проследим за изменением величины $N(t,\beta)$ на различных участках отрезка $[0,\alpha]$. Рассмотрим сначала какой-либо промежуток $l = [\beta_1, \beta_2] \subset [0,\alpha]$, удовлетворяющий условию

$$\lambda \in \rho(A(\beta, v_t)), \quad \beta \in l. \tag{5.6}$$

Тогда величина $N(t,\beta)$ (t — фиксировано) постоянна на l. Нетрудно показать, что (5.6) сохранится при достаточно малом изменении параметра $t \mapsto t+s$, $|s| < \varepsilon$. Очевидно, величина $N(t+s,\beta)$ тоже постоянна при $\beta \in l$. Следовательно,

$$N(t+s,\beta_2) - N(t+s,\beta_1) = 0, \quad |s| < \varepsilon. \tag{5.7}$$

Рассмотрим теперь поведение $N(t,\beta)$ вблизи какого-либо $\beta = \beta_0 > 0$, для которого

$$\lambda \in \sigma(A(\beta_0, v_t)). \tag{5.8}$$

Выберем $\lambda' \in \Lambda$ так, чтобы было $\lambda' > \lambda$ и

$$\lambda' \in \rho(A(\beta_0, v_t)).$$

По соображениям непрерывности найдутся α_1, α_2 такие, что $0 < \alpha_1 < \beta_0 < \alpha_2 < \infty$ и

$$\lambda' \in \rho(A(\beta, v_t)), \quad \beta \in [\alpha_1, \alpha_2]. \tag{5.9}$$

Кроме того, поскольку точки $\beta_0 > 0$, для которых выполнено (5.8), изолированы, можно считать, что

$$\lambda \in \rho(A(\alpha_j, v_t)), \quad j = 1, 2. \tag{5.10}$$

Обозначим $r(\beta,t) = \mathrm{card}\{\sigma(A(\beta,v_t)) \cap (\lambda,\lambda')\}$. Тогда в силу (5.9), (5.10) из предложения 5.2 получаем

$$N(t,\alpha_2) - N(t,\alpha_1) = r(\alpha_1,t) - r(\alpha_2,t). \tag{5.11}$$

В силу непрерывной зависимости собственных значений операторов $A(\alpha_j, v_t)$, $j = 1,2$, от t, величины $r(\alpha_j,t)$, $j = 1,2$, не изменятся при малом изменении параметра $t \mapsto t+s$, $|s| < \varepsilon$. Следовательно, не изменится при $t \mapsto t+s$ и разность в левой части (5.11).

Величина $N(t,\alpha)$ есть сумма разностей (5.11) по тем точкам $\beta_0 \in [0,\alpha]$, для которых выполнено (5.8). (Промежутки $l = [\beta_1, \beta_2]$, для которых выполнено (5.6), не дают вклада в силу (5.7)). Поскольку число таких β_0 конечно, найдется $\varepsilon > 0$, при котором справедливо (5.5). •

4. Из предложения 5.3 следует, что величина $N(t,\alpha)$ непрерывна (постоянна) по t при фиксированном $\alpha > 0$ во всех точках отрезка $[0,1]$, для которых $\lambda \in \rho(A(\alpha, v_t))$.Поэтому точками разрыва (скачка) $N(t,\alpha)$ могут быть лишь те значения t, для которых $\lambda \in \sigma(A(\alpha, v_t))$ (число таких $t \in [0,1]$ конечно). Установим величину скачка $N(t,\alpha)$ при переходе через точку разрыва.

Предложение 5.4. *Пусть $\alpha > 0$ — фиксировано и $\tau \in (0,1)$. Предположим, что $\lambda \in \Lambda$ — собственное значение оператора $A(\alpha, v_\tau)$ кратности k. Тогда*

$$N(\tau+0,\alpha) - N(\tau-0,\alpha) = k. \tag{5.12}$$

Доказательство. Выберем $\lambda' \in \Lambda$ так, чтобы было $\lambda' > \lambda$ и

$$\lambda' \in \rho(A(\alpha, v_\tau)). \tag{5.13}$$

В силу (5.13) и непрерывной зависимости собственных значений оператора $A(\beta, v_\tau)$ от β найдется α' такое, что $0 < \alpha' < \alpha$ и

$$\lambda' \in \rho(A(\beta, v_\tau)), \quad \beta \in [\alpha', \alpha]. \tag{5.14}$$

Очевидно, α' можно выбрать так, чтобы было

$$\lambda \in \rho(A(\alpha', v_\tau)). \tag{5.15}$$

Тогда в силу предложения 5.3 величина $N(t,\alpha')$ постоянна при всех t достаточно близких к τ. Остается показать, что функция $\psi(t) := N(t,\alpha) - N(t,\alpha')$ имеет в точке τ скачек, равный k. Пусть $r(\beta,t) = \mathrm{card}\{\sigma(A(\beta, v_t)) \cap (\lambda, \lambda')\}$. По соображениям непрерывности (5.14), (5.15) сохранятся при малом изменении τ. Вблизи τ при $t \neq \tau$ также выполнено

$$\lambda \in \rho(A(\alpha, v_t)).$$

Сказанное позволяет применить предложение 5.2 вблизи τ при $t \neq \tau$ и получить равенство

$$N(t,\alpha) - N(t,\alpha') = r(\alpha', t) - r(\alpha, t).$$

Легко видеть, что $r(\alpha', t)$ постоянна в некоторой окрестности τ. С другой стороны, применяя предложение 2.4 к оператору $A(\alpha, v_t)$ относительно параметра t, получим, что собственные значения оператора $A(\alpha, v_t)$ движутся строго монотонно справа налево с ростом t. При $t = \tau$ через λ проходит ровно k собственных значений оператора $A(\alpha, v_t)$. Следовательно, $r(\alpha, t)$ при переходе t через τ скачком меняется на величину $-k$. Таким образом, $\psi(\tau+0) - \psi(\tau-0) = k$, что приводит к (5.12). •

Завершим доказательство предложения 5.1. Рассмотрим $A(\alpha, -v_-)$ как невозмущенный оператор, а возмущение введем с помощью формы $\alpha t v_+$. Тогда возмущенный оператор есть $A(\alpha, v_t)$. Предложение 2.2 дает равенство

$$\dim \operatorname{Ker}(A(\alpha, v_t) - \lambda I) = \dim \operatorname{Ker}(X_\lambda^+(A_-(\alpha)) - \beta I),$$
$$\alpha > 0, \ \ t \in (0,1], \ \ \alpha\beta t = 1, \ \ \lambda \in \rho(A_-(\alpha)).$$

Теперь из предложений 5.3, 5.4 и из (2.11+) вытекает:

$$N(1,\alpha) - N(0,\alpha) = \sum_{t \in (0,1)} \dim \operatorname{Ker}(A(\alpha, v_t) - \lambda I) = n_+(\alpha^{-1} X_\lambda^+(A_-(\alpha))).$$

Остается учесть, что

$$N(1,\alpha) = N(\lambda, A, W_+, W_-, \alpha),$$

и

$$N(0,\alpha) = -N_-(\lambda, A, W_-, \alpha) = -n_-(\alpha^{-1}, X_\lambda^-(A)). \quad \bullet$$

§6. Применения к дифференциальным операторам

В этом параграфе приведены применения теоремы 1.2 к исследованию спектра дифференциальных операторов. Мы следуем подходу статьи [В], где используется более простая теорема 1.1. Все условия на формы a, f в формулировках утверждений взяты из [В]. Мы заимствуем из [В] также все предположения о форме v, кроме условий, приводящих к ее знакоопределенности. Дело сводится к асимптотике числа собственных значений оператора $A(\alpha)$, лежащих левее какой-либо точки $\lambda < \inf \sigma(A)$. В рассматриваемых ниже случаях эта асимптотика фактически известна.

1. Ниже интегралы без указания области интегрирования распространены по $\mathbb{R}^d$, $D_j = \frac{\partial}{\partial X_j}$, $D = \nabla = (D_1, \ldots, D_d)$, $B_r = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < r\}$, $\omega_d = \operatorname{vol} B_1$. Через Φ обозначается преобразование Фурье на $\mathbb{R}^d$ и $\widehat{u} = \Phi u$. Далее, $H^s(\Omega)$,

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — классы Соболева порядка $s > 0$; $\overset{o}{H}{}^s(\Omega)$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в $H^s(\Omega)$. Пусть $\mathbb{Q} = [0,1]^d$. Кубы $\mathbb{Q}_n := \mathbb{Q} + n$, $n \in \mathbb{Z}^d$, образуют разбиение $\mathbb{R}^d$. С этим разбиением свяжем классы $l_p(\mathbb{Z}^d; L_q(\mathbb{Q}))$, $0 < p$, $q \leqslant \infty$, функций на $\mathbb{R}^d$, для которых последовательность $L_q(\mathbb{Q}_n)$-норм принадлежит пространству $l_p(\mathbb{Z}^d)$. Скалярное произведение в $\mathbb{C}^d$ обозначается через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}_\pm = L_2(\mathbb{R}^d)$, $d[a] = H^s(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{N}$,

$$a[u,u] = \int |\xi|^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi, \quad \widehat{u} = \Phi u. \tag{6.1}$$

Таким образом, A — полигармонический оператор, т. е. $A = (-\Delta)^s$. В качестве f можно взять произвольную эрмитову форму, удовлетворяющую условию (1.7) с мажорантой f_*, определенной равенством

$$f_*[u,u] = C \int (|\xi|^{2^\sigma} + 1) |\widehat{u}|^2 d\xi, \quad 0 \leqslant \sigma < s, \ C > 0. \tag{6.2}$$

Например, можно взять

$$f[u,u] = \sum_{|\beta| \leqslant m} \int f_\beta(x) |D^\beta u|^2 dx, \quad f_\beta \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \ m \leqslant \sigma. \tag{6.3}$$

Далее, пусть V — измеримая функция,

$$v[u,u] = \int V(x) |u|^2 dx. \tag{6.4}$$

Пусть также $W_\pm$ — оператор умножения на функцию $V_\pm^{1/2}$, где $2V_\pm = (|V| \pm V)$. Тогда выполнено (1.17) с v_+ и v_-, определенными в (1.11). На функцию V нужно наложить условия, гарантирующие (1.10), (1.14) и (1.15). При этом в качестве p следует взять стандартный квазиклассический показатель $\varkappa$, т. е. положить

$$p = d/2s =: \varkappa. \tag{6.5}$$

Предположим, что

$$\left.\begin{aligned} &V \in L_\varkappa(\mathbb{R}^d) && \text{при } \varkappa > 1,\\ &V \in l_1(\mathbb{Z}^d; L_q(\mathbb{Q})), \ q > 1, && \text{при } \varkappa = 1,\\ &V \in l_\varkappa(\mathbb{Z}^d; L_1(\mathbb{Q})) && \text{при } \varkappa < 1, \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

и $[V]_\varkappa$ — (квази)норма в соответствующем классе (6.6). Тогда (см. [B], §2)

$$|W_\pm (A + I)^{-1/2}|_{2\varkappa} \leqslant C[V]_\varkappa^{1/2}, \tag{6.7}$$

и (1.14), (1.15) также выполнены с $p = \varkappa$. Мы можем теперь применить теорему 1.2, полагая $\gamma = 1$.

Теорема 6.1. *Пусть* a, v *определены в* (6.1), (6.4), *и предположим, что выполнено* (6.6). *Пусть эрмитова форма* f *удовлетворяет* (1.7) *по отношению к мажоранте* (6.2), $b = a + f$ *и* $\varkappa$ *определено в* (6.5). *Тогда для любого* $\mu = \overline{\mu} \in \rho(B)$

$$\Delta_\varkappa(\mu; B, W_+, W_-) = \delta_\varkappa(\mu; B, W_+, W_-) = (2\pi)^{-d}\omega_d \int V_+^\varkappa dx. \tag{6.8}$$

Доказательство. Асимптотическое равенство (6.8) хорошо известно при $\mu = -1$ и $B = A = (-\Delta)^s$ (см. [BS4] и указанную там литературу). В полном объеме (6.8) получается при помощи теоремы 1.2. •

3. Отметим (ср. с [B]) два следствия теоремы 6.1. Пусть f — форма вида (6.3) с $m = 0$, т. е.

$$f[u,u] = \int f_0(x)|u|^2 dx. \tag{6.9}$$

Потребуем, чтобы было

$$f_0 \in l_\infty(\mathbb{Z}^d; L_r(\mathbb{Q})), \quad r > \varkappa \text{ при } \varkappa \geqslant 1, \; r = 1 \text{ при } \varkappa < 1. \tag{6.10}$$

Ясно, что (6.10) слабее условия $f_0 \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ в (6.3). Однако оценка (1.7) выполнена для формы (6.9) и мажоранты (6.2) при достаточно малом $s - \sigma$. Таким образом, из теоремы 6.1 вытекает

Теорема 6.2. *Пусть форма* f *определена в* (6.9), (6.10), *и выполнены остальные условия теоремы* 6.1. *Тогда справедлива асимптотическая формула* (6.8).

Рассмотрим пример формы f, отличной от (6.3). Ограничимся случаем $s = 1$. Пусть Γ — гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$, $d > 1$, и пусть

$$f[u,u] = \int_\Gamma \varphi|u|^2 d\Gamma, \quad \varphi \in L_\infty(\Gamma).$$

Тогда (1.7) выполнено по отношению к мажоранте (6.2) при любом $\sigma > 1/2$. Поэтому асимптотика (6.8) справедлива при условии (6.6) с $\varkappa = d/2$. В этом примере B — это оператор $-\Delta$ в $\mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ с граничным условием

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_+} + \frac{\partial u}{\partial \nu_-} + \varphi u\right)\right|_\Gamma = 0,$$

где $\partial/\partial\nu_\pm$ — дифференцирования по направлению внешней нормали к границе полупространств, прилегающих к Γ.

4. Рассмотрим периодический эллиптический дифференциальный оператор A второго порядка. Пусть g — матрица-функция с вещественными измеримыми элементами

$$\left.\begin{aligned} c_0|\xi|^2 \leqslant \langle g(x)\xi, \xi\rangle \leqslant C_1|\xi|^2, \quad c_0 > 0,\ \xi \in \mathbb{R}^d,\\ g(x+n) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ n \in \mathbb{Z}^d. \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

Положим

$$a[u,u] = \int \langle g(x)\nabla u, \nabla u\rangle dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d) = d[a]. \tag{6.12}$$

Если матрица g гладкая, то $\mathcal{D}(A) = H^2(\mathbb{R}^d)$ и $Au = -\operatorname{div}(g\nabla u)$. В общем случае это дифференциальное выражение следует понимать в смысле распределений.

Пусть формы f, v определены соответственно в (6.9), (6.4) и подчинены условиям (6.10), (6.6) с $\varkappa = d/2$ (функция f_0 периодической не предполагается). Пусть $W_\pm$ — такие же, как в п. 1. Тогда условия (1.10), (1.14), (1.15) выполнены с $p = \varkappa$ (см. [B]), и мы получаем следующий результат.

Теорема 6.3. *Пусть формы* a, f, v *определены равенствами* (6.12), (6.9), (6.4), *выполнены условия* (6.6), (6.10), (6.11) *и* $b = a + f$. *Тогда для* $\mu = \overline{\mu} \in \rho(B)$, $\varkappa = d/2$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-\varkappa} N(\mu, B, W_+, W_-, \alpha) = (2\pi)^{-d}\omega_d \int V_+^{\varkappa}(\det g)^{-1/2} dx. \tag{6.13}$$

Доказательство. Достаточно проверить (6.13) для $B = A$, $\mu = -1$. В случае $V \geqslant 0$ нужная асимптотика получена в [B]. Случай знакопеременного V фактически не требует изменений в рассуждениях. •

5. В теоремах 6.1–6.3 $W_\pm$ — операторы умножения на функцию. Это ограничение не является обязательным. Кроме того, в применениях можно не пользоваться явными выражениями для $W_\pm$, работая непосредственно с формой v. Продемонстрируем эту возможность, следуя [B], где рассматривался случай положительной формы v. Пусть $\mathfrak{X} = L_2(\mathbb{R}^d)$ и формы a, f — те же, что и в теореме 6.1, $s > 1$ — целое и

$$v[u,u] = \int \langle V(x)\nabla u, \nabla u\rangle dx, \tag{6.14}$$

где $V = \{V_{jk}\}_1^d$ — вещественная симметричная матрица. В отличие от (6.5) показатель $\varkappa$ в этом пункте определяется равенством

$$2\varkappa(s-1) = d. \tag{6.15}$$

С единственной целью упростить ссылки, примем $\varkappa > 1$. Соответственно (ср. с(6.6)) будем считать $V \in L_\varkappa(\mathbb{R}^d)$. Очевидно, V можно представить (многими способами) в виде $V(x) = V^{(+)}(x) - V^{(-)}(x)$, где $V^{(\pm)} \in L_\varkappa(\mathbb{R}^d)$ и матрицы $V^{(\pm)}$ равномерно положительно определены в любом шаре. В (1.17) в качестве $v_\pm$ примем формы

$$v_\pm[u,u] = \int \langle V^{(\pm)}(x)\nabla u, \nabla u\rangle dx.$$

Пусть $\mathfrak{G}_\pm = H^s(\mathbb{R}^d)$ $(= d[a])$ и $Q_\pm$ — самосопряженные операторы в $H_1[a]$, порожденные формами $v_\pm$. Положим $W_\pm x = Q_\pm^{1/2} x$, $x \in d[a] = \mathcal{D}(W_\pm)$. В силу условий на $V^{(\pm)}$ операторы $W_\pm$ замыкаемы. Далее, (1.11) выполнено и

$$|W_\pm(A+I)^{-1/2}|_{2\varkappa}^2 = |Q_\pm|_\varkappa.$$

Спектр $Q_\pm$ совпадает со спектром отношения форм

$$v_\pm[u,u]/\|(A+I)^{1/2}u\|^2, \quad u \in H^s(\mathbb{R}^d),$$

что ведет (см. [B], §2, п. 4) к оценке вида (6.7). Квадраты s-чисел операторов $W_\pm(A+I)^{-1}$ совпадают с собственными значениями отношений форм

$$v_\pm[u,u]/\|(A+I)u\|^2, \quad u \in H^{2s}(\mathbb{R}^d).$$

Оценки спектра этих отношений приводят (см. [B]) к (1.14), (1.15) при $p = \varkappa$. Таким образом, применима теорема 1.2, и для $\mu = \overline{\mu} \in \rho(B)$ получается асимптотика

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-\varkappa} N(\mu, B, W_+, W_-, \alpha) = \Theta, \tag{6.16}$$

где показатель $\varkappa > 1$ определен в (6.15) и

$$\Theta = (2\pi)^{-d}\operatorname{vol}\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d} : \langle V(x)\xi, \xi\rangle > |\xi|^{2s}\}.$$

В самом деле, (6.16) достаточно доказать при $B = A$ и $\mu = -1$. Положим $Q = Q_+ - Q_-$. Спектр Q совпадает со спектром отношения форм

$$v[u,u]/\|(A+I)^{1/2}u\|^2, \quad u \in H^s(\mathbb{R}^d).$$

При $B = A$ и $\mu = -1$ равенство (6.16) эквивалентно условию

$$\Delta_\varkappa^{(+)}(Q) = \delta_\varkappa^{(+)}(Q) = \Theta. \tag{6.17}$$

Справедлива оценка (она содержится в теореме 5.12 из [BS2])

$$|Q|_{\varkappa} \leqslant C\|V\|_{L_{\varkappa}(\mathbb{R}^d)},$$

в силу которой достаточно установить (6.17) при $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Пусть $\operatorname{supp} V \subset B_r$, $r > 0$. Обозначим через Q_r, $\widetilde{Q}_r$ операторы, порожденные формой (6.14) соответственно в $\overset{o}{H}{}^s(B_r)$, $H^s(B_r)$. Из вариационных соображений следует, что

$$n_+(s, Q_r) \leqslant n_+(s, Q) \neq n_+(s, \widetilde{Q}_r).$$

Асимптотическое равенство (6.17) с заменой Q на Q_r или $\widetilde{Q}_r$ выполнено (см. [BS1]). Поэтому (6.17) справедливо и для Q.

Список литературы

[B] Birman M. Sh., *Discret spectrum in the gaps of a continuous one for perturbations with large coupling constant*, Estimates and Asymptotics for Discrete Spectra of Integral and Differential Equations, Adv. Soviet Math., 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 57–73.

[BS1] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов,* I, Тр. Моск. мат. о-ва **27** (1972, сс. 3–52).

[BS2] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории*, Десятая Математическая школа (Кацивели/Нальчик, 1972), Ин-т мат. АН УССР, Киев, 1974, сс. 5–189.

[BS3] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Ленингр. ун-т, Л., 1980; Англ. пер., *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.

[BS4] Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *Estimates for the number of the negative eigenvalues of the Schrödinger operator and its generalizations*, Estimates and Asymptotics for Discrete Spectra of Integral and Differential Equations, Adv. Soviet Math., 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 1–55.

[H] Hempel R., *Eigenvalues in gaps and decoupling by Neumann boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl. **169** (1992), no. 1, 229–259.

[L] Levendorskiĭ S. Z., *Lower bounds for the number of eigenvalue branches for the Schrödinger operator $H - \lambda W$ in a gap of H: the case of indefinite W*, Report no. 297, Univ. Augsburg, 1994.

Поступило 28 июля 1995 г.