



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Слижевский, Новые оценки среднего времени фиксации для популяций постоянного объема, *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.*, 2011, том 11, выпуск 4, 94–106

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

16 января 2025 г., 21:32:19



А. К. Слижевский

НОВЫЕ ОЦЕНКИ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ФИКСАЦИИ ДЛЯ ПОПУЛЯЦИЙ ПОСТОЯННОГО ОБЪЕМА

Рассмотрена популяция, состоящая из N частиц, каждой из которых приписан некоторый тип. Все частицы в целочисленные моменты времени гибнут и порождают случайное число частиц того же типа, что и родитель. При этом популяция сохраняет размер N , а случайные векторы, задающие численность потомства от каждой частицы, имеют распределения, независимые относительно любых перестановок координат. Доказана справедливость верхней оценки, основанной на разложении функции $v(k)$ по формуле Тейлора с точностью до 5-го момента. Приведены условия, при которых новая оценка улучшает ранее известную.

Ключевые слова: цепи Маркова, эволюция популяций, ближайший общий предок, время фиксации, имитационное моделирование.

Введение

В популяционной динамике и анализе эволюции популяций, основанных на изменениях ДНК, активно используются марковские модели. Одним из популярных классов моделей такого рода является класс гаплоидных моделей фиксированного размера N (см. [1–4]) без мутаций. Это модели с дискретным временем, в которых изначально имеется некоторое количество частиц, относящихся к одному из возможных типов. Далее каждая из них гибнет, порождая при этом случайное количество потомков. Закон размножения и гибели таков, что суммарная численность популяции не изменяется. Условие «гаплоидный» означает, что каждый потомок имеет не более одного родителя. Отсутствие мутаций состоит в том, что частицы производят только себе подобных.

В работах [1; 2], а также в [5] изучается модель, в которой каждый предок вносит свой аддитивный вклад в потомство, а итоговое распределение инвариантно относительно перестановок частиц родителей. В принципе, все это сильно перекликается с условием ветвления: каждая частица порождает свой независимый ветвящийся процесс, но с жестким условием фиксированной общей численности потомства.

Приведем формальное описание модели *популяции постоянной численности*. Объем популяции всегда равен N и каждая из частиц может принадлежать одному из N типов. Состав популяции изменяется в целочисленные моменты времени. Пусть в произвольный фиксированный момент времени популяция описывается вектором $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_N)$, где $k_j \in \{0, \dots, N\}$ — количество частиц j -го типа, и $|\mathbf{k}| := k_1 + \dots + k_N = N$. Здесь и далее равенство с двоеточием обозначает определение символов или выражений, стоящих со стороны двоеточия. Обозначим через K_1, \dots, K_N множества индексов, содержащие номера частиц, имеющих $1, \dots, N$ тип. Отметим, что K_1, \dots, K_N имеют k_1, \dots, k_N элементов и попарно не пересекаются. Тогда в следующий момент времени популяция будет

описываться случайным вектором

$$\left(\sum_{j \in K_1} \xi_j^{(N)}, \dots, \sum_{j \in K_N} \xi_j^{(N)} \right),$$

где $\xi_j^{(N)}$ — численность потомства j -й частицы, и

$$\xi_1^{(N)} + \dots + \xi_N^{(N)} = N, \quad (1)$$

т. е. компоненты $\xi_j^{(N)}$ зависимы между собой и в популяции по-прежнему насчитывается N частиц. Будем считать, что $\sum_{j \in K_s} \xi_j^{(N)} = 0$ при $K_s = \emptyset$.

Случайные векторы численности потомства $(\xi_1^{(N)}, \dots, \xi_N^{(N)})$ имеют распределения, неизменные относительно любых перестановок координат, т. е. закон размножения и гибели частиц не зависит от их типа. В частности, одномерные распределения случайных величин $\xi_j^{(N)}$ совпадают и не зависят от j . На каждом шаге эволюции популяции векторы численности потомства независимы и одинаково распределены.

Важной характеристикой в биологии является *время фиксации* популяции τ — случайный момент времени, когда популяция, начинающаяся с нескольких групп разнородных частиц (возможно все различны), впервые становится однородной, т. е. все частицы становятся однотипными [3]. Здесь мы имеем дело с неразложимыми (без сообщающихся подклассов существенных состояний) марковскими цепями с двумя типами состояний — несущественными и поглощающими. Такие марковские цепи с вероятностью 1 попадают в одно из поглощающих состояний, соответствующих однотипности всей популяции.

Изучим зависимость математического ожидания времени фиксации τ от параметров модели постоянной численности. Ранее в работах [5–7] были получены оценки математического ожидания времени фиксации. Мы усилим эти результаты. В общем случае их трудно сравнить с предшествующими. Для демонстрации эффективности новых результатов вычисления будут проведены в частном случае для модели из [7], обобщающей модель из [6]. Эта модель соответствует полиномиальному распределению вектора $(\xi_1^{(N)}, \dots, \xi_N^{(N)})$. Качественно она описывается следующим образом. Каждая частица, погибая, оставляет после себя $s > 1$ потомков того же типа. Из получившихся sN новых частиц равновозможно, вне зависимости от типа, отбирается N штук, которые образуют новое поколение, а остальные $(s - 1)N$ частиц мгновенно погибают. Назовем эту схему *s-моделью*.

1. Основные результаты

Обозначим совокупность всех векторов \mathbf{k} , таких что $|\mathbf{k}| = N$, через \mathbf{K} , а подмножества векторов, у которых $\max_{i=1, \dots, N} k_i = M$, через \mathbf{K}_M . Аналогично для векторов с максимальной компонентой, удовлетворяющей какому-то неравенству, в нижний индекс добавляем это неравенство. В частности, совокупности векторов с условиями $\max_{i=1, \dots, N} k_i > M$ или $\max_{i=1, \dots, N} k_i \leq M$ обозначаются $\mathbf{K}_{>M}$ и $\mathbf{K}_{\leq M}$ соответственно.

Нас интересует случайная величина τ — время фиксации популяции (т. е. вытеснения одним типом частиц всех остальных или первого попадания в множество поглоща-

ющих состояний \mathbf{K}_N). Мы оцениваем ее математическое ожидание в терминах моментов распределения $\xi_1 = \xi_1^{(N)}$. Отметим, что в силу условия (1) $\mathbb{E}\xi_j^{(N)} = 1$. Обозначим $\mathbb{E}(\xi_1 - 1)^{i_1}(\xi_2 - 1)^{i_2} \dots (\xi_l - 1)^{i_l} =: \mu_{i_1 i_2 \dots i_l}$. В частности, $\mathbb{E}(\xi_1 - 1)^5 =: \mu_5$, $\mathbb{E}(\xi_1 - 1)^2 \times (\xi_2 - 1)^2 =: \mu_{22}$. Пусть $\sigma^2 := \text{Var } \xi_1$ и $\mu_3 := \mathbb{E}(\xi_1 - 1)^3$. Дисперсия и третий центральный момент ξ_1 могут изменяться в пределах от 0 до $N - 1$ и от 1 до $N^2 - 1$ соответственно.

Наряду со случайной величиной τ будет рассматриваться величина $\tau_{>N-k_0}$, равная числу поколений, по прошествии которого популяция впервые содержит более чем $N - k_0$ частиц какого-то из типов, т. е. цепь Маркова впервые попадает в $\mathbf{K}_{>N-k_0}$. Легко видеть, что $\tau = \tau_{>N-1}$.

В [5] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для популяции постоянной численности фиксируем произвольное целое $k_0 \in [1, N/2]$ такое, что*

$$c_1^{-1} = c_1^{-1}(N, k_0) := \frac{N}{N-1} \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{\mu_3}{6k_0} \cdot \frac{(N-2k_0)^2}{(N-2)(N-k_0)} \right) > 0.$$

Пусть $\mathbf{k} \in \mathbf{K}_{\leq N-k_0}$ — вектор, задающий конфигурацию типов частиц в начальный момент времени. Тогда для математического ожидания случайной величины $\tau_{>N-k_0}$, когда впервые популяция состоит более чем из $N - k_0$ частиц какого-то одного типа, справедливо неравенство:

$$\mathbb{E}_{\mathbf{k}} \tau_{>N-k_0} \leq c_1 v(\mathbf{k}), \quad (2)$$

где $v(\mathbf{k}) := (N-1)N \ln N - \sum_{j=1}^N (N-k_j) \ln(N-k_j)$.

Теорема 1 дает хорошие и, как следует из вычислительных экспериментов, предположительно асимптотически точные оценки при больших k_0 , точнее для $\mathbf{k} \in \mathbf{K}_{\leq N-s}$, если $\frac{\mu_3}{\sigma^2 s} \rightarrow 0$, $s = o(N)$ при $N \rightarrow \infty$, то c_1 превращается в $\frac{2}{\sigma^2}$, что вряд ли можно улучшить.

Для $\mathbf{k} \in \mathbf{K}_{>N-s}$ при небольших s оценки в теореме 1 достаточно грубые. Результаты численных экспериментов наводят на мысль, что слагаемое, содержащее μ_3 , должно либо отсутствовать, либо быть существенно меньше.

Доказательство теоремы 1 существенно использует разложение $v(\mathbf{k})$ по формуле Тейлора с точностью до 3-го порядка. Для $\mathbf{k} \in \mathbf{K}_{\leq N-k_0}$ с k_0 достаточно большими мы воспользуемся схемой и результатами из [5], приводящими к оценке (2), а при $\mathbf{k} \in \mathbf{K}_{>N-k_0}$ воспользуемся разложением Тейлора для $v(\mathbf{k})$ до 5-го порядка. Достоинством разложения с 3 моментами является возможность свести оценки к случаю двух типов частиц. Для разложения 5-го порядка это сделать не получается, но когда количество частиц одного типа приближается к объему популяции, то существенный вклад в оценку вносит лишь одно слагаемое, что и позволяет получить новые оценки.

Обозначим

$$c_2^{-1} = c_2^{-1}(N, k'_0, k_0) := \max_{k'_0 \leq k^* \leq k_0} \left\{ \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\mu_3}{6k^*} (1 + \Delta_3) + \frac{\mu_4}{12k^{*2}} (1 + \Delta_4) + \frac{\mu_{22}(k^* - 1)}{4k^{*2}} (1 + \Delta_{22}) - \frac{\mu_5}{20k^{*3}} (1 + \Delta_5) - \frac{\mu_{32}(k^* - 1)}{2k^{*3}} (1 + \Delta_{32}) \right\},$$

где $\Delta_3, \Delta_4, \Delta_{22}, \Delta_5, \Delta_{32}$ определены в формулах (15)–(17), (19) и (20) и равномерно по k'_0 и k_0 сходятся к 0 при $N \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Для популяции постоянной численности фиксируем произвольные целые $k_0 \in [3, N/2]$, $k'_0 \in [1, k_0 - 1]$. Пусть $\mathbf{k} \in \mathbf{K}_{\leq N-k'_0}$ — вектор, задающий конфигурацию типов частиц в начальный момент времени. Тогда для математического ожидания случайной величины $\tau_{>N-k'_0}$ (момента времени, когда популяция впервые состоит более чем из $N - k'_0$ частиц одного из типов) справедливо неравенство

$$\mathbb{E}_{\mathbf{k}} \tau_{>N-k'_0} \leq c^* v(\mathbf{k}),$$

где $v(\mathbf{k}) = (N-1)N \ln N - \sum_{j=1}^N (N-k_j) \ln(N-k_j)$, $(c^*)^{-1} = \max\{c_1^{-1}, c_2^{-1}\}$.

Если говорить о сравнении теорем 1 и 2, то возможна даже ситуация $c_1(k_0) > 0$, $c_1(k'_0) < 0$ (т.е. утверждение теоремы 2 для k'_0 не имеет смысла). При этом $c_2(k'_0)$ будет определено и больше 0. Далее мы покажем, что при выполнении условия (23) теорема 2 улучшает оценку (2) при подстановке в нее k'_0 вместо k_0 , и приведем серию примеров, где это условие выполнено.

2. Вспомогательные утверждения

Обозначим $S_{K_s} := \sum_{j \in K_s} \xi_j$, $\tilde{S}_{K_s} := \sum_{j \in K_s} \xi_j N^{-1}$, $\tilde{k} := kN^{-1}$, $\bar{\xi}_j := \xi_j - 1$, $\bar{S}_{K_s} := \sum_{j \in K_s} \bar{\xi}_j$. Рассмотрим функцию

$$f(x) := -(N-x) \ln(N-x), \quad 0 \leq x \leq N.$$

Запишем формулу Тейлора с остаточным членом, включающим в себя шестую производную функции f , в форме Лагранжа. Поскольку остаточный член неположителен, оценим его сверху нулем:

$$\begin{aligned} f(x+y) - f(x) &= f'(x)y + \frac{f''(x)y^2}{2!} + \frac{f'''(x)y^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)y^4}{4!} + \frac{f^{(5)}(x)y^5}{5!} + \\ &+ \frac{f^{(6)}(x+\theta y)y^6}{6!} \leq (1 + \ln(N-x))y - \frac{y^2}{2(N-x)} - \frac{y^3}{6(N-x)^2} - \\ &\quad - \frac{y^4}{12(N-x)^3} - \frac{y^5}{20(N-x)^4}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\theta \in (0, 1)$.

Пусть P — оператор на марковской цепи, который описывает динамику изменения численности популяции и определяется соотношением

$$Pv(k_1, \dots, k_N) := \mathbb{E}v\left(\sum_{j \in K_1} \xi_j, \dots, \sum_{j \in K_N} \xi_j\right),$$

где мощности множеств K_1, \dots, K_N равны k_1, \dots, k_N .

Оценим $Pv(\mathbf{k}) - v(\mathbf{k})$ с помощью неравенства (3):

$$\begin{aligned} Pv(\mathbf{k}) - v(\mathbf{k}) &= \mathbb{E} \sum_{s=1}^N \left(f\left(k_s + \sum_{j \in K_s} \bar{\xi}_j\right) - f(k_s) \right) \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^N (1 + \ln(N - k_s)) \mathbb{E} \sum_{j \in K_s} \bar{\xi}_j - \sum_{s=1}^N \frac{1}{2(N - k_s)} \mathbb{E} \left(\sum_{j \in K_s} \bar{\xi}_j \right)^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{s=1}^N \frac{1}{6(N-k_s)^2} \mathbb{E} \left(\sum_{j \in K_s} \bar{\xi}_j \right)^3 - \sum_{s=1}^N \frac{1}{12(N-k_s)^3} \mathbb{E} \left(\sum_{j \in K_s} \bar{\xi}_j \right)^4 - \\
& - \sum_{s=1}^N \frac{1}{20(N-k_s)^4} \mathbb{E} \left(\sum_{j \in K_s} \bar{\xi}_j \right)^5 =: I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \quad (4)
\end{aligned}$$

где $I_j = I_j(\mathbf{k})$.

В леммах 1, 2 и 3 приводятся соотношения, позволяющие выразить $I_j, j = 1, \dots, 5$ через моменты случайной величины $\bar{\xi}_1$.

Лемма 1. Если случайные векторы (ξ_1, \dots, ξ_N) с целыми $\xi_j \geq 0, j = 1, \dots, N$, имеют распределения, неизменные относительно любых перестановок координат, и $\xi_1 + \dots + \xi_N = N$, то

$$\mathbb{E} \bar{\xi}_1 = 0, \quad (5)$$

$$\mathbb{E} \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 = -\frac{1}{N-1} \mathbb{E} \bar{\xi}_j^2, \quad (6)$$

$$\mathbb{E} \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2 = -\frac{1}{N-1} \mathbb{E} \bar{\xi}_j^3, \quad (7)$$

$$\mathbb{E} \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3 = \frac{2}{(N-1)(N-2)} \mathbb{E} \bar{\xi}_j^3. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (5) следует из одинаковой распределенности $\bar{\xi}_j$ и того, что $\sum_{j=1}^N \bar{\xi}_j = 0$.

Умножим равенство $\sum_{j=1}^N \bar{\xi}_j = 0$ на $\bar{\xi}_1$ и возьмем математическое ожидание:

$$0 = \mathbb{E} \bar{\xi}_1 \sum_{j=1}^N \bar{\xi}_j = \mathbb{E} \bar{\xi}_1^2 + (N-1) \mathbb{E} \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2,$$

откуда следует соотношение (6). Равенство (7) выводится аналогично, путем умножения на $\bar{\xi}_1^2$.

Наконец, умножим тождество $\sum_{j=1}^N \bar{\xi}_j = 0$ на $\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2$ и возьмем математическое ожидание:

$$0 = 2 \mathbb{E} \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2 + (N-2) \mathbb{E} \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3,$$

откуда с помощью соотношения (7) выводим формулу (8). \square

Лемма 2. При выполнении условий леммы 1

$$\mu_4 = -(N-1)\mu_{31}, \quad \mu_{31} + \mu_{22} = -(N-2)\mu_{211}, \quad 3\mu_{211} = -(N-3)\mu_{1111}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения леммы выводятся путем домножения равенства $\sum_{j=1}^N \bar{\xi}_j = 0$ на $\bar{\xi}_1^3, \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2$ и $\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3$ соответственно и вычисления математического ожидания левой и правой частей полученных соотношений. \square

Система уравнений из леммы 2 имеет две степени свободы, и все смешанные моменты можно выразить через μ_4 и μ_{22} . Получаем:

$$\mu_{31} = -\frac{\mu_4}{N-1}, \quad \mu_{211} = \frac{\mu_4}{(N-1)(N-2)} - \frac{\mu_{22}}{N-2}, \quad (9)$$

$$\mu_{1111} = \frac{3\mu_{22}}{(N-2)(N-3)} - \frac{3\mu_4}{(N-1)(N-2)(N-3)}. \quad (10)$$

Лемма 3. При выполнении условий леммы 1

$$\begin{aligned}\mu_5 &= -(N-1)\mu_{41}, \quad \mu_{41} + \mu_{32} = -(N-2)\mu_{311}, \quad \mu_{311} + 2\mu_{221} = -(N-3)\mu_{2111}, \\ 2\mu_{32} &= -(N-2)\mu_{221}, \quad 4\mu_{2111} = -(N-4)\mu_{11111}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения этой леммы выводятся аналогично лемме 2 после умножения равенства $\sum_{j=1}^N \bar{\xi}_j = 0$ на $\bar{\xi}_1^4$, $\bar{\xi}_1^3 \bar{\xi}_2$, $\bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3$, $\bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2^2$ и $\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3 \bar{\xi}_4$ соответственно. \square

Система уравнений из леммы 3 позволяет выразить все смешанные моменты через μ_5 и μ_{32} .

$$\mu_{41} = -\frac{\mu_5}{N-1}, \quad \mu_{311} = \frac{\mu_5}{(N-1)(N-2)} - \frac{\mu_{32}}{N-2}, \quad \mu_{221} = -\frac{2\mu_{32}}{N-2}, \quad (11)$$

$$\mu_{2111} = \frac{5\mu_{32}}{(N-2)(N-3)} - \frac{\mu_5}{(N-1)(N-2)(N-3)}, \quad (12)$$

$$\mu_{11111} = \frac{4\mu_5}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)} - \frac{20\mu_{32}}{(N-2)(N-3)(N-4)}. \quad (13)$$

Согласно равенству (5) первая сумма I_1 в правой части оценки (4) равна нулю.

Оценим I_j , $j = 2, 3, 4, 5$ при $N \rightarrow \infty$ и $\mathbf{k} \in \mathbf{K}_{>N-k_0} \setminus \mathbf{K}_{>N-k'_0}$, где $1 \leq k'_0 < k_0 < N/2$. При оценивании I_j , не ограничивая общности, можно считать, что первая компонента максимальна и имеет вид $k_1 := N - k^* > N/2$. При этом очевидно $1 \leq k'_0 \leq k^* < k_0$.

В силу равенства (6)

$$\mathbb{E} \bar{S}_{K_s}^2 = k_s \mathbb{E} \bar{\xi}_1^2 + k_s(k_s - 1) \mathbb{E} \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 = \frac{k_s(N - k_s)}{N-1} \sigma^2,$$

поэтому

$$I_2 = -\sum_{s=1}^N \frac{k_s}{2(N-1)} \sigma^2 = -\frac{N\sigma^2}{2(N-1)} \leq -\frac{\sigma^2}{2}. \quad (14)$$

Пользуясь соотношениями (7) и (8) леммы 1, находим:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \bar{S}_{K_s}^3 &= k_s \mathbb{E} \bar{\xi}_1^3 + 3k_s(k_s - 1) \mathbb{E} \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2 + k_s(k_s - 1)(k_s - 2) \mathbb{E} \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3 = \\ &= \frac{k_s(N - k_s)(N - 2k_s)}{(N-1)(N-2)} \mu_3.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}I_3 &= -\frac{\mu_3}{6(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^N \frac{k_i(N - 2k_i)}{N - k_i} = \frac{\mu_3}{6k^*} \frac{(N - k^*)(N - 2k^*)}{(N-1)(N-2)} - \\ &- \frac{\mu_3}{6(N-1)(N-2)} \sum_{i=2}^N \frac{k_i(N - 2k_i)}{N - k_i} \leq \frac{\mu_3}{6k^*} \frac{(N - k^*)(N - 2k^*)}{(N-1)(N-2)} =: \\ &=: \frac{\mu_3}{6k^*} (1 + \Delta_3), \quad (15)\end{aligned}$$

где $\Delta_3 = o(1)$ при $N \rightarrow \infty$.

Легко получить более точную оценку для Δ_3 .

$$\Delta_3 = \frac{2(k^* - 1)^2 - (k^* - 1)(3N - 4)}{(N-1)(N-2)} =: -\frac{3(k^* - 1)}{N} \delta_3,$$

где $\delta_3 = \delta_3(N) \sim 1$ при $N \rightarrow \infty$.

Здесь и далее $(1 - \delta_i)$ можно оценить величиной порядка $\frac{k^*}{N}$, но мы в явном виде этого не используем. Такая оценка позволит записать условия на N и $\frac{k_0}{N}$, при которых δ_i попадают в произвольную окрестность 1.

Пользуясь соотношениями (9) и (10), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \bar{S}_{K_s}^4 &= k_s \mathbb{E} \bar{\xi}_1^4 + 4k_s(k_s - 1) \mathbb{E} \bar{\xi}_1^3 \bar{\xi}_2 + 6k_s(k_s - 1)(k_s - 2) \mathbb{E} \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3 + \\ &+ 3k_s(k_s - 1) \mathbb{E} \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2^2 + k_s(k_s - 1)(k_s - 2)(k_s - 3) \mathbb{E} \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3 \bar{\xi}_4 = \\ &= \frac{k_s(N - k_s) \mu_4 ((N - 2)(N - 3) - 3(k_s - 1)(N - k_s - 1))}{(N - 1)(N - 2)(N - 3)} + \\ &+ 3k_s(k_s - 1) \mathbb{E} \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2^2 \frac{(N - k_s)(N - k_s - 1)}{(N - 2)(N - 3)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_4 &= - \left(\frac{\mu_4}{12(N - 1)} \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{(N - k_i)^2} + \left(\frac{\mu_{22}}{4(N - 2)(N - 3)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mu_4}{4(N - 1)(N - 2)(N - 3)} \right) \sum_{i=1}^N \frac{k_i(k_i - 1)(N - k_i - 1)}{(N - k_i)^2} \right) = \\ &= - \frac{\mu_4}{12(N - 1)} \left(\frac{N - k^*}{k^{*2}} \left(1 - \frac{3(N - k^* - 1)(k^* - 1)}{(N - 2)(N - 3)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^N \left(\frac{k_i}{(N - k_i)^2} \left(1 - 3 \frac{(k_i - 1)(N - k_i - 1)}{(N - 2)(N - 3)} \right) \right) \right) - \\ &\quad - \frac{\mu_{22}}{4(N - 2)(N - 3)} \sum_{i=1}^N \frac{k_i(k_i - 1)(N - k_i - 1)}{(N - k_i)^2} \leq - \frac{\mu_4}{12k^{*2}} \left(\frac{N - k^*}{N - 1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 - \frac{3(N - k^* - 1)(k^* - 1)}{(N - 2)(N - 3)} \right) \right) - \frac{\mu_{22}(k^* - 1)(N - k^*)(N - k^* - 1)}{4k^{*2}(N - 2)(N - 3)} \leq \\ &\leq - \frac{\mu_4}{12k^{*2}} \left(\frac{N - k^*}{N - 1} - \frac{3(k^* - 1)}{N - 3} \right) - \frac{\mu_{22}(k^* - 1)(N - k^*)(N - k^* - 1)}{4k^{*2}(N - 2)(N - 3)}. \end{aligned}$$

Эта оценка справедлива при выполнении условия $1 - \frac{3(N - k_i - 1)(k_i - 1)}{(N - 2)(N - 3)} > 0$, где $i \geq 2$. Переобозначим выражение из последней оценки, умножаемое на дробь, содержащую μ_{22} .

$$\frac{(N - k^*)(N - k^* - 1)}{(N - 2)(N - 3)} =: 1 + \Delta_{22}, \quad (16)$$

где

$$\Delta_{22} = \frac{(k^* - 2)^2 - (k^* - 2)(2N - 5)}{(N - 2)(N - 3)} =: -\frac{2(k^* - 2)}{N} \delta_{22},$$

$\Delta_{22} = o(1)$ и $\delta_{22} = \delta_{22}(N) \sim 1$ при $N \rightarrow \infty$.

Аналогично для выражения, умножаемого на дробь, содержащую μ_4 .

$$\frac{N - k^*}{N - 1} - \frac{3(k^* - 1)}{N - 3} =: 1 + \Delta_4, \quad (17)$$

где

$$\Delta_4 = -\frac{k^* - 1}{N - 1} - \frac{3(k^* - 1)}{N} =: -4\frac{k^* - 1}{N} \delta_4,$$

$\Delta_4 = o(1)$ и $\delta_4 = \delta_4(N) \sim 1$ при $N \rightarrow \infty$.

Таким образом,

$$I_4 \leq -\frac{\mu_4}{12k^{*2}}(1 + \Delta_4) - \frac{\mu_{22}(k^* - 1)}{4k^{*2}}(1 + \Delta_{22}). \quad (18)$$

С помощью соотношений (11)–(13) получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \bar{S}_{K_s}^5 &= k_s \mathbb{E} \bar{\xi}_1^5 + 5k_s(k_s - 1) \mathbb{E} \bar{\xi}_1^4 \bar{\xi}_2 + 10k_s(k_s - 1) \mathbb{E} \bar{\xi}_1^3 \bar{\xi}_2^2 + \\ &+ 15k_s(k_s - 1)(k_s - 2) \mathbb{E} \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2^2 \bar{\xi}_3 + 10k_s(k_s - 1)(k_s - 2) \mathbb{E} \bar{\xi}_1^3 \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3 + \\ &+ 10k_s(k_s - 1)(k_s - 2)(k_s - 3) \mathbb{E} \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3 \bar{\xi}_4 + \\ &+ k_s(k_s - 1)(k_s - 2)(k_s - 3)(k_s - 4) \mathbb{E} \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3 \bar{\xi}_4 \bar{\xi}_5 = \\ &= \frac{k_s(N - k_s)(N - 2k_s)\mu_5}{(N - 1)(N - 2)(N - 3)(N - 4)} \left((N - 3)(N - 4) - 2(k_s - 1)(N - k_s - 1) \right) + \\ &+ \frac{10k_s(k_s - 1)(N - k_s)(N - 2k_s)(N - k_s - 1)\mu_{32}}{(N - 2)(N - 3)(N - 4)}, \end{aligned}$$

откуда при $1 - \frac{2(N - k_i - 1)(k_i - 1)}{(N - 3)(N - 4)} > 0$, если $i \geq 2$ (верно при $k^* < N/4$ и N таких, что $1 - \frac{2(3N/4 - 1)(N/4 - 1)}{(N - 3)(N - 4)} > 0$) получаем

$$\begin{aligned} I_5 &= -\frac{\mu_5}{20(N - 1)(N - 2)} \sum_{i=1}^N \frac{k_i(N - 2k_i)}{(N - k_i)^3} - \left(\frac{\mu_{32}}{2(N - 2)(N - 3)(N - 4)} - \right. \\ &\left. - \frac{\mu_5}{10(N - 1)(N - 2)(N - 3)(N - 4)} \right) \sum_{i=1}^N \frac{k_i(k_i - 1)(N - k_i - 1)(N - 2k_i)}{(N - k_i)^3} \leq \\ &\leq \frac{\mu_5}{20k^{*3}} \frac{(N - k^*)(N - 2k^*)}{(N - 1)(N - 2)} \left(1 - \frac{2(N - k^* - 1)(k^* - 1)}{(N - 3)(N - 4)} \right) + \\ &+ \frac{\mu_{32}(k^* - 1)(N - k^*)(N - k^* - 1)(N - 2k^*)}{2(N - 2)(N - 3)(N - 4)k^{*3}} \leq \\ &\leq \frac{\mu_5}{20k^{*3}} \left(1 - \frac{2(N - k^* - 1)(k^* - 1)}{(N - 3)(N - 4)} \right) + \frac{\mu_{32}(k^* - 1)(N - k^*)(N - 2k^*)}{2k^{*3}(N - 3)(N - 4)}. \end{aligned}$$

Переобозначим выражение, умножаемое на дробь, содержащую μ_{32} .

$$\frac{(N - k^*)(N - 2k^*)}{(N - 3)(N - 4)} =: 1 + \Delta_{32}, \quad (19)$$

где

$$\Delta_{32} = \frac{2(k^* - 2)(k^* - 3) - (k^* - 3)(N - 4) - 2(k^* - 2)(N - 3)}{(N - 3)(N - 4)} =: -\frac{3k^* - 7}{N} \delta_{32},$$

$\Delta_{32} = o(1)$ и $\delta_{32} = \delta_{32}(N) \sim 1$ при $N \rightarrow \infty$.

Переобозначим выражение, умножаемое на дробь, содержащую μ_5 .

$$1 - \frac{2(N - k^* - 1)(k^* - 1)}{(N - 3)(N - 4)} =: 1 + \Delta_5, \quad (20)$$

где

$$\Delta_5 = -\frac{2(N - k^* - 1)(k^* - 1)}{(N - 3)(N - 4)} =: -\frac{2(k^* - 1)}{N} \delta_5,$$

$\Delta_5 = o(1)$ и $\delta_5 = \delta_5(N) \sim 1$ при $N \rightarrow \infty$.

Таким образом,

$$I_5 \leq \frac{\mu_5}{20k^{*3}} (1 + \Delta_5) + \frac{\mu_{32}(k^* - 1)}{2k^{*3}} (1 + \Delta_{32}). \quad (21)$$

3. Доказательство теоремы 2

Следующая лемма [6. Утверждение 1] помогает осуществить переход от оценок для $Pv(\mathbf{k}) - v(\mathbf{k})$ непосредственно к оценкам для математического ожидания τ .

Лемма 4. Пусть функция $v(\mathbf{k}) \geq 0$, константа $C > 0$ и множество D таковы, что

$$Pv(\mathbf{k}) - v(\mathbf{k}) \leq -C \quad (22)$$

при $\mathbf{k} \notin D$. Тогда для момента τ достижения множества D из точки \mathbf{k} справедлива оценка $\mathbb{E}_{\mathbf{k}}\tau \leq \frac{v(\mathbf{k})}{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (теоремы 2). Используя оценки (14), (15), (18), (21), получаем неравенство

$$\begin{aligned} Pv(\mathbf{k}) - v(\mathbf{k}) &\leq -\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\mu_3}{6k^*} (1 + \Delta_3) - \frac{\mu_4}{12k^{*2}} (1 + \Delta_4) - \\ &\quad - \frac{\mu_{22}(k^* - 1)}{4k^{*2}} (1 + \Delta_{22}) + \frac{\mu_5}{20k^{*3}} (1 + \Delta_5) + \frac{\mu_{32}(k^* - 1)}{2k^{*3}} (1 + \Delta_{32}) = -\frac{\sigma^2}{2} + \\ &\quad + \frac{\mu_3}{6k^*} \left(1 - \frac{3k^*}{N} \delta_{32}\right) - \frac{\mu_4}{12k^{*2}} \left(1 - 4\frac{k^* - 1}{N} \delta_4\right) - \frac{\mu_{22}(k^* - 1)}{4k^{*2}} \left(1 - \frac{2k^*}{N} \delta_{22}\right) + \\ &\quad + \frac{\mu_5}{20k^{*3}} \left(1 - \frac{2(k^* - 1)}{N} \delta_5\right) + \frac{\mu_{32}(k^* - 1)}{2k^{*3}} \left(1 - \frac{3k^*}{N} \delta_{32}\right), \end{aligned}$$

где $\delta_4(N), \delta_{22}(N), \delta_5(N), \delta_{32}(N) \sim 1$ при $N \rightarrow \infty$.

Применяя к последнему неравенству лемму 4, доказываем теорему 2. \square

На последнем этапе доказательства теорем 1 и 2 используется лемма 4. И соответствующие оценки будут точнее, если C из (22) будет больше. Если в оценках, ведущих к определению c_2^{-1} , использовать разложение для 3-х моментов вместо 5-ти, то получим

$$c_2'^{-1} := c_2'^{-1}(N, k_0, k'_0) = \max_{k'_0 \leq k^* \leq k_0} \left(\sigma^2 - \frac{\mu_3}{6k^*} (1 + \Delta_3) \right).$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что c_1^{-1} монотонно убывает по k_0 , следовательно, $c_1^{-1}(N, k'_0) = c_2'^{-1}(N, k_0, k'_0)$. Поэтому теорема 2 будет усиливать теорему 1, если

$$\begin{aligned} \frac{\mu_4}{12k^{*2}} \left(1 - 4\frac{k^* - 1}{N} \delta_4\right) + \frac{\mu_{22}(k^* - 1)}{4k^{*2}} \left(1 - \frac{2k^*}{N} \delta_{22}\right) - \\ - \frac{\mu_5}{20k^{*3}} \left(1 - \frac{2(k^* - 1)}{N} \delta_5\right) - \frac{\mu_{32}(k^* - 1)}{2k^{*3}} \left(1 - \frac{3k^*}{N} \delta_{32}\right) > 0 \quad (23) \end{aligned}$$

для всех $k'_0 \leq k^* < k_0$.

4. Сравнение теорем 1 и 2 для s -модели

Цель данного раздела провести вычисления для ряда частных случаев и удостовериться, что соотношение (23) верно. Мы остановимся на s -модели. Вначале вычислим ряд характеристик, используемых в оценке.

Обозначим $[A]_k := (A - 1) \dots (A - k)$.

Теорема 3. В случае s -модели для моментов случайной величины ξ_1 имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{(s-1)(N-1)}{sN-1}, \mu_3 = \frac{[s]_2[N]_2}{[sN]_2}, \mu_4 = \frac{[s]_3[N]_3}{[sN]_3} + \sigma^2 + \mu_3, \\ \mu_5 &= \frac{[s]_4[N]_4}{[sN]_4} + 5 \frac{[s]_3[N]_3}{[sN]_3} + 5\mu_3, \\ \mu_{22} &= \frac{(3sN-4s-4N+6)(sN-3)(s-1) + s(s-1)^2[N]_3}{[sN]_3}, \\ \mu_{32} &= \frac{[N]_4 s(s-1)^2(s-2)}{[sN]_4} + \frac{(s-1)(N-2)\mu'_{32}}{[sN]_3},\end{aligned}$$

где $\mu'_{32} = 2s^2N - 3sN^2 + 5sN + 3s - 3s^2 + 6N - 12$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Распишем ξ_1 как сумму индикаторов: $\xi_1 = \sum_{j=1}^N I_j$, где $I_j = 1$, если на j -м месте находится частица 1-го типа и $I_j = 0$ иначе.

$$\mathbb{E}I_1 = \frac{s}{sN} = \frac{1}{N}, \quad \mathbb{E}I_1I_2 = \frac{s(s-1)}{sN(sN-1)}.$$

Сначала выведем формулы для $\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N I_j\right)^l$, где l принимает значения от 1 до 5:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N I_j\right) = N\mathbb{E}I_1 = 1.$$

Для индикаторов очевидно соотношение $\mathbb{E}I_1^{l_1}I_2^{l_2}\dots I_k^{l_k} = \mathbb{E}I_1I_2\dots I_k$, где $l_1, l_2, \dots, l_k > 1$. Учитывая, что индикаторы одинаково распределены, получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N I_j\right)^2 &= N\mathbb{E}I_1\left(\sum_{j=1}^N I_j\right) = N\mathbb{E}I_1^2 + N(N-1)\mathbb{E}I_1I_2 = \\ &= 1 + N(N-1)\frac{s(s-1)}{sN(sN-1)} = 1 + \frac{(s-1)(N-1)}{sN-1}.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N I_j\right)^3 &= N\mathbb{E}I_1\left(\sum_{j=1}^N I_j\right)^2 = N\mathbb{E}I_1^2\sum_{j=1}^N I_j + N(N-1)\mathbb{E}I_1I_2\sum_{j=1}^N I_j = \\ &= N\mathbb{E}I_1^3 + 3N(N-1)\mathbb{E}I_1^2I_2 + N(N-1)(N-2)\mathbb{E}I_1I_2I_3 = \\ &= 1 + 3\frac{(s-1)(N-1)}{sN-1} + \frac{(s-1)(s-2)(N-1)(N-2)}{(sN-1)(sN-2)}.\end{aligned}$$

Опуская промежуточные вычисления, имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N I_j\right)^4 &= 1 + 7\frac{(s-1)(N-1)}{sN-1} + 6\frac{(s-1)(s-2)(N-1)(N-2)}{(sN-1)(sN-2)} + \\ &+ \frac{(s-1)(s-2)(s-3)(N-1)(N-2)(N-3)}{(sN-1)(sN-2)(sN-3)}.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N I_j\right)^5 &= 1 + 15 \frac{(s-1)(N-1)}{sN-1} + 25 \frac{(s-1)(s-2)(N-1)(N-2)}{(sN-1)(sN-2)} + \\ &+ 10 \frac{(s-1)(s-2)(s-3)(N-1)(N-2)(N-3)}{(sN-1)(sN-2)(sN-3)} + \\ &+ \frac{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}{(sN-1)(sN-2)(sN-3)(sN-4)}. \end{aligned}$$

Теперь несложно вывести формулы для моментов ξ_1 , используя только что полученные формулы для $\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N I_j\right)^l$.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathbb{E}(\xi_1 - 1)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N I_j - 1\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N I_j\right)^2 - 2\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N I_j\right) + 1 = \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N I_j\right)^2 - 1 = \frac{(s-1)(N-1)}{sN-1}. \end{aligned}$$

С помощью формулы куба разности находим

$$\mu_3 = \mathbb{E}(\xi_1 - 1)^3 = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N I_j - 1\right)^3 = \frac{(s-1)(s-2)(N-1)(N-2)}{(sN-1)(sN-2)}.$$

Для оставшихся моментов опустим промежуточные вычисления:

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \frac{(s-1)(s-2)(s-3)(N-1)(N-2)(N-3)}{(sN-1)(sN-2)(sN-3)} + \sigma^2 + 2\mu_3, \\ \mu_5 &= \frac{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}{(sN-1)(sN-2)(sN-3)(sN-4)} + \\ &+ 5 \frac{(s-1)(s-2)(s-3)(N-1)(N-2)(N-3)}{(sN-1)(sN-2)(sN-3)} + \\ &+ 5 \frac{(s-1)(s-2)(N-1)(N-2)}{(sN-1)(sN-2)}. \end{aligned}$$

Для смешанных моментов получаем

$$\begin{aligned} \mu_{22} &= \frac{(3sN - 4s - 4N + 6)(sN - 3)(s - 1) + s(s - 1)^2[N]_3}{(sN - 1)(sN - 2)(sN - 3)}, \\ \mu_{32} &= \frac{(N - 1)(N - 2)(N - 3)(N - 4)s(s - 1)^2(s - 2)}{(sN - 1)(sN - 2)(sN - 3)(sN - 4)} + \\ &+ \frac{(s - 1)(N - 2)(2s^2N - 3sN^2 + 5sN + 3s - 3s^2 + 6N - 12)}{(sN - 1)(sN - 2)(sN - 3)}. \quad \square \end{aligned}$$

В приводимых ниже следствиях из теоремы 3 рассматривается асимптотическое поведение моментов и оценок при $N \rightarrow \infty$.

Следствие 1. Для s -модели при $N \rightarrow \infty$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\sim \frac{s-1}{s}, \quad \mu_3 \sim \frac{[s]_2}{s^2}, \quad \mu_4 \sim \frac{[s]_3}{s^3} + \frac{2[s]_2}{s^2} + \frac{s-1}{s}, \\ \mu_5 &\sim \frac{[s]_4}{s^4} + \frac{5[s]_3}{s^3} + \frac{5[s]_2}{s^2}, \quad \mu_{22} \sim \frac{s(s-1)^2}{s^3}, \quad \mu_{32} \sim \frac{s(s-1)^2(s-2)}{s^4} - \frac{3s(s-1)}{s^3}. \end{aligned}$$

Вычислим асимптотический вид правой части неравенства (23) для s -модели.

Следствие 2. Для s -модели при $s \leq N, N \rightarrow \infty$ выражение (23) будет асимптотически положительно при $k^* > 1$ и любых s , а также при $k^* = 1$ и $s \leq 4$. Это означает, что теорема 2 усиливает теорему 1 для данных значений параметров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_4}{12k^{*2}} + \frac{\mu_{22}(k^* - 1)}{4k^{*2}} - \frac{\mu_5}{20k^{*3}} - \frac{\mu_{32}(k^* - 1)}{2k^{*3}} = \\ & = \frac{5k^*\mu_4 + 15k^*(k^* - 1)\mu_{22} - 3\mu_5 - 30(k^* - 1)\mu_{32}}{60k^{*3}} = \\ & = \left\{ 5k^* \frac{(s-1)((s-2)(s-3) + s^2 + 2s(s-2))}{s^3} + 15k^*(k^* - 1) \frac{s(s-1)^2}{s^3} - \right. \\ & \left. - 3 \frac{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4) + 5s(s-1)(s-2)(s-3) + 5s^2(s-1)(s-2)}{s^4} - \right. \\ & \left. - 30(k^* - 1) \frac{s(s-1)^2(s-2) - 3s^2(s-1)}{s^4} \right\} / (60k^{*3}). \end{aligned}$$

Обозначим выражение в фигурных скобках через $y(k^*; s)$ и изучим его знак при различных s и k^* . Вынося за скобки $\frac{s-1}{s^3}$ и приводя подобные, получаем

$$y(k^*; s) = \frac{s-1}{s^3} \left(15(s^2 - s)k^{*2} + (-25s^2 + 150s - 30)k^* - \left(3s^2 + 48s + 108 - \frac{72}{s} \right) \right) =: \frac{s-1}{s^3} \left(a(s)k^{*2} + b(s)k^* + c(s) \right),$$

где $a(s) =: 15(s^2 - s), b(s) =: -25s^2 + 150s - 30, c(s) =: -\left(3s^2 + 48s + 108 - \frac{72}{s} \right)$.

Легко видеть, что $a(s) > 0, c(s) < 0$. Это означает, что уравнение $y(k^*; s) = 0$ имеет два корня, причем эти корни разных знаков. Поскольку $y(2; s) > 0$, а $y(0; s) < 0$, положительный корень уравнения $y(k^*; s) = 0$ меньше 2. График функции $z = y(x; s)$ при фиксированном s является параболой с ветвями, направленными вверх. Значит, $y(k^*; s)$ возрастает при $k^* \geq 2$, и $y(k^*; s) > 0$ при $k^* \geq 2$.

В случае $k^* = 1$ имеем

$$y(1; s) = \frac{s-1}{s^3} \left(-13s^2 + 87s - 148 + \frac{72}{s} \right).$$

Выражение $-13s^2 + 87s - 148$ отрицательно для всех s , поскольку дискриминант отрицателен. Благодаря добавлению $\frac{72}{s}$ получаем $y(1; s) < 0$ при $s > 4$, и $y(1; s) > 0$ при $s = 2, s = 3$ и $s = 4$. \square

Следствие 3. В случае s -модели при $s \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ неравенство (23) превращается в

$$\frac{15k^{*2} - 25k^* - 3}{60k^{*3}} > 0.$$

Оно положительно при $k^* > 1$, т. е. теорема 2 усиливает теорему 1.

Список литературы

1. *Cannings R.* The Latent Roots of Certain Markov Chains Arising in Genetics: A New Approach, I. Haploid Models // *Adv. Appl. Prob.* 1974. Vol. 6. P. 260–294.

2. *Cannings R.* The Latent Roots of Certain Markov Chains Arising in Genetics: A New Approach, II. Further Haploid Models // *Adv. Appl. Prob.* 1975. Vol. 7. P. 264–282.

3. *Durrett R.* Probability Models for DNA Sequence Evolution. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

4. *Haccou P., Jagers P., Vatutin V. A.* Branching Processes: Variation, Growth, and Extinction of Populations. Cambridge; N. Y.: Cambridge University Press, 2004.

5. *Клоков С. А., Топчий В. А.* Оценки среднего времени фиксации в популяциях постоянного объема // *Сиб. мат. журн.* 2006. Т. 47, № 6. С. 1275–1288.

6. *Клоков С. А., Топчий В. А.* О времени вытеснения одним из типов частиц всех остальных в популяции фиксированной численности // *Мат. тр. ИМ СО РАН.* 2005. Т. 8, № 2. С. 41–56.

7. *Клоков С. А., Топчий В. А.* Оценки средних времен достижения однородности в популяциях фиксированного объема // *Пленарные доклады IV Всерос. конф. «Математика, информатика, управление».* Иркутск, 2005.

Материал поступил в редколлегию 10.12.2010

Адрес автора

СЛИЖЕВСКИЙ Александр Константинович

Омский филиал института математики

им. С. Л. Соболева СО РАН

ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия

e-mail: alexslizh@mail.ru