В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов, И. А. Шведов, О теореме Уолфа для дифференциальных форм классов $W^*_{p,q}$,
Сиб. матем. журн., 1983, том 24, номер 5, 31–42

https://www.mathnet.ru/smj6760

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXIV, № 5 СЕНТЯБРЬ — ОКТЯБРЬ 1983

УДК 515.164.13

В. М. ГОЛЬДШТЕЙН, В. И. КУЗЬМИНОВ, И. А. ШВЕДОВ

О ТЕОРЕМЕ УОЛФА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ КЛАССОВ $W^*_{p,q}$

Каждой дифференциальной форме ω степени k соответствует k-мерная коцепь, т. е. функция, определенная на некотором множестве k-мерных ориентированных симплексов. Значение этой коцепи c_ω на симплексе T есть интеграл дифференциальной формы ω по этому симплексу. Для того чтобы коцепь c_ω была определена на достаточно обширном множестве симплексов, естественно предполагать, что коэффициенты координатного представления формы ω локально интегрируемы. Кроме того, чтобы иметь возможность рассматривать коцепь, соответствующую внешнему дифференциалу формы, необходимо предполагать также, что коэффициенты дифференциала этой формы локально интегрируемы.

Класс $W^*_{p,q}$ дифференциальных форм, имеющих интегрируемые в степени p коэффициенты и интегрируемые в степени q коффициенты дифференциала, изучался в [1, 2]. В этой работе мы решаем следующую задачу: охарактеризовать класс коцепей, соответствующих формам класса $W^*_{p,q}$. Х. Уитни и Дж. Уолф [3] указали классы коцепей, соответствующие более узким классам форм. Такие коцепи Х. Уитни называет *диезными* и *бемольными*. Класс форм, соответствующий бемольным коцепям, совпадает с классом $W^*_{\infty,\infty}$. Это позволяет рассматривать наш результат как аналог теоремы Уолфа в более общей ситуации. Приведенная выше задача интерпретируется Х. Уитни [3] как задача аксиоматического описания k-мерного интегрирования в n-мерном пространстве.

Вопрос о получении результатов типа теоремы Уолфа для классов коцепей, более широких, чем класс бемольных коцепей, сформулирован в книге Х. Уитни [3, введение к гл. V].

Отметим, что рассматриваемая задача в случае интегрирования форм степени n в n-мерном пространстве по существу совпадает с классической задачей об отыскании плотности функции множества. В случае форм степени 0, т. е. функций, доказанная в настоящей работе теорема дает условие принадлежности функции классу Соболева W^1_p в терминах поведения средних приращения этой функции.

Дифференциальная форма

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

коэффициенты $a_{i_1\ldots i_k}$ которой определены почти всюду в открытой области U n-мерного евклидова пространства R^n, принадлежит классу $L^k_p(U)$, если все $a_{i_1\ldots i_k} \in L_p(U)$. В классе потоков [4] определен дифференциал каждой формы $\omega \in L^k_p(U)$. Если $\omega \in L^k_p(U)$ и $d\omega \in \in L^{k+1}_q(U)$, то мы говорим, что $\omega \in W^k_{p,q}(U)$.

Норма $|\cdot|_{p,q}$ в $W^k_{p,q}(U)$ определяется следующим образом:

$$|\omega|_p = \left\{\sum_{i_1<\ldots<i_k} \|a_{i_1\ldots i_k}\|^p_{L_p(U)}\right\}^{1/p}, \quad |\omega|_{p,q} = |\omega|_p + |d\omega|_q.$$

Через $W^k_{p,q,\mathrm{loc}}(U)$ будем обозначать пространство дифференциальных форм ω, удовлетворяющих условию: для каждой точки $x \in U$ найдется такая окрестность V этой точки, что $\omega \in W^k_{p,q}(V)$. Отметим, что в [1] пространство $W^k_{p,q,\mathrm{loc}}(U)$ обозначалось через $\mathscr{W}^k_{p,q}(U)$. Иногда в обозначении нормы мы будем указывать область U и писать $|\omega|_{U,p,q}$.

Рассмотрим произвольный k-мерный ориентированный симплекс T в области U. В k-мерной плоскости P, содержащей симплекс T, выберем аффинные координаты $(y_1, \ldots, y_k)$ так, чтобы форма $dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k$ задавала ориентацию симплекса T. Ограничение формы ω на плоскость P имеет в этих координатах представление $a\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k$. Функция a, вообще говоря, определена на некотором подмножестве плоскости P. Если функция a определена почти всюду в симплексе T и интегрируема на нем, определим значение функции c_ω на T, полагая

$$c_\omega(T) = \int_T a\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k.$$

Область определения функции c_ω обозначим $\mathrm{Dom}\, c_\omega$.

Для произвольного симплекса $T \subset R^n$ и области U в R^n введем обозначение

$$A_U(T) = \{v \in R^n | T + v \subset U\}$$

($T + v$ — образ симплекса T при параллельном переносе на вектор v). Если $\omega \in L^k_1(U)$, то функция $c = c_\omega$ удовлетворяет следующим условиям:

1) для каждого ориентированного k-мерного симплекса $T \subset R^n$

$$\mathrm{mes}_n \{v \in R^n | v \in A_U(T),\ T + v \in \mathrm{Dom}\, c\} = 0$$

(mes_n — обычная мера Лебега в R^n);

2) для произвольного разбиения каждого k-мерного симплекса $T \subset R^n$ на симплексы $T_1, \ldots, T_s$ той же ориентации, что и симплекс T,

$$\mathrm{mes}_n \left\{v \in R^n \,|\, v \in A_u(T), \quad c(T+v) \neq \sum_{i=1}^{s} c(T_i + v)\right\} = 0;$$

3) если симплексы T и T' отличаются только ориентацией, то $c(T) = -c(T')$.

Будем называть *k-мерной коцепью* в области U произвольную вещественно-значную функцию c, заданную на некотором множестве $\mathrm{Dom}\, c$ ориентированных k-мерных симплексов, лежащих в U, удовлетворяющую указанным выше условиям 1)—3).

Условие 1) означает, что коцепь c задана почти всюду в U, а условие 2) — что коцепь почти всюду аддитивна в U. Будем говорить, что коцепи c_1 и c_2 *совпадают почти всюду в* U, если для каждого ориентированного k-мерного симплекса $T \subset R^n$

$$\mathrm{mes}_n\{v \in A_U(T) | c_1(T+v) \neq c_2(T+v)\} = 0.$$

Если дифференциальные формы ω и θ эквивалентны в том смысле, что их соответствующие коэффициенты совпадают почти всюду в U, то и коцепи c_ω и c_θ совпадают почти всюду в U.

Коцепь c, заданную почти всюду в области U, будем называть *локально интегрируемой*, если функция $f_T(v) = c(T+v)$ локально интегрируема в $A_U(T)$ для любого симплекса $T \in R^n$.

Кограница dc k-мерной коцепи c определяется обычным образом, причем $\operatorname{Dom} dc$ состоит из всех $(k+1)$-мерных симплексов, все k-мерные грани которых принадлежат $\operatorname{Dom} c$.

Лемма 1. *Кограница k-мерной коцепи является $(k+1)$-мерной коцепью. Если коцепи c и c' совпадают почти всюду в U, то dc и dc' совпадают почти всюду в U. Кограница локально интегрируемой коцепи локально интегрируема.*

Эта лемма следует очевидным образом из определений и свойств множеств меры 0 в R^n.

Лемма 2. *Если $\omega \in W^k_{1,1,\mathrm{loc}}(U)$, то коцепи $c_{d\omega}$ и dc_ω совпадают почти всюду в U.*

Доказательство. Пусть $\omega = \sum\limits_J a_J dx_J$, $J=(i_1, \ldots, i_k)$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, $dx_J = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$. Согласно [1] существует последовательность гладких дифференциальных форм $\left\{\omega_\nu = \sum\limits_J a_{J,\nu} dx_J\right\}$, сходящаяся к ω в $W^k_{1,1,\mathrm{loc}}(U)$. Можно считать, что эта последовательность удовлетворяет следующему условию: для каждой области V, замыкание которой компактно и лежит в U, ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\omega_{\nu+1} - \omega_\nu|_{V,1,1}$ сходится.

Пусть T — произвольный k-мерный симплекс в U. Рассмотрим семейство $\mathscr{P}$ k-мерных плоскостей, параллельных симплексу T. Поскольку $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \| a_{J,\nu+1} - a_{J,\nu}\|_{L_1(V)} < \infty$ для любой области V, замыкание которой компактно и лежит в U, то для почти каждой плоскости $P \in \mathscr{P}$ $a_{J,\nu} \to a_J$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(P \cap U)$. Следовательно, для почти всех $v \in A_U(T)$ $a_{J,\nu} \to a_J$ в $L_1(T+v)$. Аналогичное утверждение справедливо для произвольного $(k+1)$-мерного симплекса T' и последовательности форм $\{d\omega_\nu\}$. Поэтому $d\omega_\nu \to d\omega$ в $L_1(T'+v)$ для почти всех $v \in A_U(T')$. Остается перейти к пределу в формуле Стокса

$$\int\limits_{T'+v} d\omega_\nu = \int\limits_{\partial T'+v} \omega_\nu.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $\alpha \in L^k_1(U)$, $\beta \in L^{k+1}_1(U)$ и $dc_\alpha = c_\beta$ п. в. в U, то $\alpha \in W^k_{1,1}(U)$ и $d\alpha = \beta$ п. в. в U.*

Доказательство. Рассмотрим один из способов сглаживания формы посредством ее усреднения. Пусть K_ε — бесконечно гладкая неотрицательная функция в R^n, равная 0 вне шара $D_\varepsilon = \{v \in R^n | \, |v| \leqslant \varepsilon\}$, для которой $\int\limits_{R^n} K_\varepsilon(v)\, dv = 1$. Положим

$$\omega_\varepsilon = \int\limits_{R^n} K_\varepsilon(v)\, \omega(x+v)\, dv$$

для $\omega \in L^*_1(U)$. Форма ω_ε гладкая и определена в области $U_\varepsilon = \{v \in R^n | v + D_\varepsilon \subset U\}$. Для любой области V, замыкание которой компактно и лежит в U, $\omega_\varepsilon \to \omega$ в $L^*_1(v)$ при $\varepsilon \to 0$. Для каждого ориентированного симплекса $T \subset U_\varepsilon$ выполнено равенство

$$\int\limits_T \omega_\varepsilon = \int\limits_{R^n} \left(K_\varepsilon(v) \int\limits_{T+v} \omega \right) dv. \tag{1}$$

Пусть T — произвольный ориентированный $(k+1)$-мерный симплекс в

U_ε. Так как $dc_\alpha = c_\beta$ п. в. в U, то для почти всех $v \in D_\varepsilon$

$$\int\limits_{T+v} \beta = \int\limits_{\partial T+v} \alpha,$$

следовательно,

$$\int\limits_{R^n} \left(K_\varepsilon(v) \int\limits_{T+v} \beta\right) dv = \int\limits_{R^n} \left(K_\varepsilon(v) \int\limits_{\partial T+v} \alpha\right) dv,$$

откуда, согласно (1), получаем

$$\int\limits_T \beta_\varepsilon = \int\limits_{\partial T} \alpha_\varepsilon; \tag{2}$$

так как формы α_ε и β_ε гладкие, то из (2) вытекает равенство $d\alpha_\varepsilon = \beta_\varepsilon$ в U_ε. Но $\alpha_\varepsilon \to \alpha$ и $\beta_\varepsilon \to \beta$ в $L^*_{1,\mathrm{loc}}(U)$. Следовательно, [1, лемма 1.3] $\in W^*_{1,1,\mathrm{loc}}(U)$ и $d\alpha = \beta$. Так как $\alpha \in L^*_1(U)$, $d\alpha = \beta \in L^*_1(U)$, то $\alpha \in W^*_{1,1}(U)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если $\omega, \theta \in L^k_1(U)$ и $c_\omega = c_\theta$ п. в. в U, то $\omega = \theta$ п. в. в U.*

Доказательство. Ввиду (1) из равенства $c_\omega = c_\theta$ п. в. в U получаем

$$\int\limits_T \omega_\varepsilon = \int\limits_T \theta_\varepsilon$$

для любого k-мерного ориентированного симплекса $T \subset U_\varepsilon$. Поэтому $\omega_\varepsilon = \theta_\varepsilon$. Так как $\omega_\varepsilon \to \omega$, $\theta_\varepsilon \to \theta$ в $L^k_{1,\mathrm{loc}}(U)$, то $\omega = \theta$ п. в. в U. Лемма доказана.

Чтобы иметь возможность сформулировать условия, при которых коцепь может быть задана формой класса $W^*_{p,q}$, введем еще несколько понятий.

Будем называть *k-мерной цепью* в области $U \subset R^n$ произвольную формальную линейную комбинацию $X = \sum\limits_i a_i T_i$, $a_i \in \mathbf{R}$, ориентированных k-мерных симплексов $T_i \subset U$, считая при этом, что $T = -T'$, если T и T' отличаются только ориентацией.

Пусть $|T|$ означает k-мерный объем k-мерного симплекса T. Для каждого числа $1 \leqslant q < \infty$ определим q-массу $|X|_q$ цепи $X = \sum\limits_i a_i T_i$, полагая

$$|X|_q = \left\{\sum_i |a'_i|^q |T'_i|\right\}^{1/q},$$

где $\sum\limits_i a'_i T'_i$ — такое подразделение цепи X, в котором симплексы T'_i попарно не имеют общих внутренних точек. Очевидно, что q-масса цепи X не зависит от выбора ее подразделения $\sum\limits_i a'_i T'_i$ и обладает обычными свойствами нормы. Кроме того, если X' — произвольное подразделение цепи X, то $|X|_q = |X'|_q$. Отметим, что 1-масса цепи совпадает с массой цепи в смысле Уитни [3, гл. V].

Значение $c(X) = \sum\limits_i a_i c(T_i)$ коцепи c на цепи $X = \sum\limits_i a_i T_i$ определено, если все $T_i \in \operatorname{Dom} c$. Значение коцепи c на цепи X может отличаться от значения c на подразделении X' цепи X. Но для почти всех $v \in \bigcap\limits_i A_U(T_i)$ равенство $c(X+v) = c(X'+v)$ выполняется. Поэтому для произвольной локально интегрируемой коцепи c, цепи $X=\sum\limits_i a_iT_i$, компакта $K\subset\bigcap\limits_i A_U(T_i)$ и любого подразделения X' цепи X имеем

$$\int\limits_K c(X+v)\,dv=\int\limits_K c(X'+v)\,dv. \tag{3}$$

Нам будут нужны еще некоторые усреднения специального вида локально интегрируемых коцепей. Пусть Q — произвольный куб в R^n с центром в точке 0. Определим коцепь c_Q, полагая

$$c_Q(T)=\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q c(T+v)\,dv.$$

Если коцепь c была задана в области $U\subset R^n$, то коцепь c_Q определена на всех симплексах, лежащих в области

$$U_Q=\{v\in R^n|Q+v\subset U\}.$$

Ввиду (3) значения коцепи c_Q на цепи X и любом ее подразделении X' совпадают.

Определение. Коцепь c размерности k в области $U\subset R^n$ называется *p-коцепью* $(1<p<\infty)$, если существует такая постоянная N, что

$$|c_Q(X)|\leqslant N|X|_{p'}|Q|^{(k-n)/np} \tag{4}$$

для $1/p+1/p'=1$, каждого куба Q с центром в 0 и любой цепи $X=\sum\limits_i a_iT_i$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) все симплексы T_i параллельны одной k-мерной грани куба Q и лежат в U_Q;

2) если два симплекса T_i и T_j лежат в разных k-мерных плоскостях, то клетки T_i+Q и T_j+Q не имеют общих внутренних точек.

Нижнюю грань тех N, для которых выполнено условие (4), будем называть p-нормой коцепи c и обозначать $|c|_p$.

Теорема 1. *Коцепь c размерности k может быть задана дифференциальной формой класса $W^k_{p,q}$ $(1<p\leqslant\infty,\ 1<q\leqslant\infty)$ в том и только в том случае, когда c является p-коцепью, а dc является q-коцепью.*

Замечание. Если условия теоремы 1 выполнены для коцепи c, то они выполнены и для любой коцепи c', совпадающей с c почти всюду. Утверждение: коцепь c задается в области U формой ω, означает равенство $c=c_\omega$ п. в. в U.

Лемма 5. *Коцепь c_ω является p-коцепью в области $U\subset R^n$ для любой формы $\omega\in L^k_p(U)$ $(1<p<\infty)$.*

Доказательство. Пусть куб Q имеет центр в 0 и ребро длины 2ε, а цепь $X=\sum\limits_i a_iT_i$ удовлетворяет условиям 1) и 2) для этого куба. Выберем в R^n ортонормированный базис так, чтобы куб Q в соответствующих этому базису координатах задавался неравенствами $|x_i|\leqslant\varepsilon$, $i=1,\ldots,n$. Кроме того, пусть симплексы T_i параллельны k-мерной плоскости $x_{k+1}=\ldots=x_n=0$. Введем обозначения: $x_{k+i}=y_i$ при $i=1,\ldots,m$, $m=n-k$, $x=(x_1,\ldots,x_k)$, $y=(y_1,\ldots,y_m)$, $x\in R^k$, $y\in R^m$, $(x,y)\in R^k\times R^m=R^n$.

Представим цепь X в виде $X=\sum\limits_i a_i(S_i\times y^i)$, $y^i\in R^m$. Ориентации симплексов $S_i\subset R^k$ выберем индуцированными стандартной ориентацией из R^k. Значение $(c_\omega)_Q(X)$ и p'-масса цепи X не меняются при подразделении цепи X. Поэтому можно считать, что симплексы $S_i\times y^i$ попарно не имеют общих внутренних точек.

Рассмотрим координатное представление $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k + \ldots$ формы ω в указанных выше координатах (x, y). Тогда

$$(c_\omega)_Q(X) = \sum_i a_i |Q|^{-1} \int_Q c_\omega(S_j \times y^i + v)\, dv = \sum_i a_i |Q|^{-1} \times$$
$$\times \int_Q \left[\int_{S_i + y^i + v} f(x, y)\, dx \right] dv.$$

Представим вектор v в виде $v = (\xi, \eta)$, $\xi \in R^k$, $\eta \in R^m$, а куб Q — в виде $Q = Q_1 \times Q_2$, Q_1 — куб в R^k, Q_2 — куб в R^m. Тогда

$$(c_\omega)_Q(X) = |Q|^{-1} \sum_i a_i \int_{Q_2} \int_{Q_1} \int_{S_i + \xi} f(x, \eta + y^i)\, dx\, d\xi\, d\eta.$$

Выполним замену переменных интегрирования $\bar\eta = \eta + y^i$, $\bar x = x - \xi$:

$$(c_\omega)_Q(X) = |Q|^{-1} \sum_i a_i \int_{Q_2 + y^i} \int_{Q_1} \int_{S_i} f(\bar x + \xi, \bar\eta)\, d\bar x\, d\xi\, d\bar\eta =$$
$$= |Q|^{-1} \sum_i a_i \int_{S_i \times (Q_2 + y^i)} \left[\int_{Q_1} f(\bar x + \xi, \bar\eta)\, d\xi \right] d\bar x\, d\bar\eta.$$

Пусть $U' = \bigcup_i S_i \times (Q_2 + y^i)$, $\lambda(\bar x, \bar\eta)$ — функция, равная a_i на $S_i \times (Q_2 + y^i)$ и равная 0 вне U'. Функция λ определена корректно, поскольку клетки $S_i \times (Q_2 + y^i)$ попарно не имеют общих внутренних точек.

$$(c_\omega)_Q(X) = |Q|^{-1} \int_{U'} \left[\lambda(\bar x, \bar\eta) \int_{Q_1} f(\bar x + \xi, \bar\eta)\, d\xi \right] d\bar x\, d\bar\eta.$$

Используя неравенства Гёльдера и Минковского, получаем:

$$|(c_\omega)_Q(X)| \leqslant |Q|^{-1} \|\lambda\|_{L_{p'}(U)} \int_{Q_1} \|f(\bar x + \xi, \bar\eta)\|_{L_p(U')} d\xi.$$

Так как $\|\lambda\|_{L_{p'}(U)} = \left\{ \sum_i |a_i|^{p'} |S_i \times Q_2| \right\}^{1/p'}$, а $\|f(\bar x + \xi, \bar\eta)\|_{L_p(U')} \leqslant \|f\|_{L_p(U)}$, то получаем:

$$|(c_\omega)_Q(X)| \leqslant |Q|^{-1} |Q_2|^{1/p'} |Q_1| |X|_{p'} \|f\|_{L_p(U)} = |Q|^{-m/np} |X|_{p'} \|f\|_{L_p(U)}.$$

Существует такая константа N, зависящая только от n, k и p, что $\|f\|_{L_p(U)} \leqslant N |\omega|_p$. Поэтому имеем

$$|(c_\omega)_Q(X)| \leqslant N |X|_{p'} |\omega|_p |Q|^{-m/np}. \tag{5}$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Для произвольной k-мерной p-коцепи $(1 < p \leqslant \infty)$ в области $U \subset R^n$ и набора индексов $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, существует единственная функция $f_I \in L_p(U)$ такая, что для любого k-мерного симплекса S, параллельного k-мерной плоскости $\{x \in R^n | x_i = 0$ при $i \notin I\}$, выполняется равенство*

$$\int_{S+v} f_I dx_I = c(S + v)$$

для почти всех $v \in A_U(S)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $I=(1, 2, \ldots, k)$. Будем использовать обозначения $x_{k+i}=y_i$ при $i=1, \ldots, m$, $m=n-k$, $x=(x_1, \ldots, x_k)$, $y=(y_1, \ldots, y_m)$, $x\in R^k$, $y\in R^m$, $(x, y)\in R^k\times R^m=R^n$.

Для каждого $\nu=0, 1, 2, \ldots$ рассмотрим векторное пространство ступенчатых функций E_ν, определяемое следующим образом. Пусть $\mathcal{Y}_\nu$ — решетка точек в R^m, имеющих координаты вида $(n_1/2^\nu, \ldots, n_m/2^\nu)$, $n_1, \ldots, n_m$ — целые числа,

$$Q_1(\nu)=\{x\in R^k \mid |x_i|\leqslant 1/2^{\nu+1},\ i=1, \ldots, k\},$$

$$Q_2(\nu)=\{y\in R^m \mid |y_i|\leqslant 1/2^{\nu+1},\ i=1, \ldots, m\},\ Q(\nu)=Q_1(\nu)\times Q_2(\nu).$$

Пространство E_ν состоит по определению из функций, представимых в следующем виде:

$$\varphi=\sum_i a_i\chi_{S_i}, \tag{6}$$

где χ_{S_i} — характеристическая функция клетки S_i, $S_i=T_i\times(Q_2(\nu)+y^i)$, T_i — k-мерный симплекс в R^k, $y^i\in\mathcal{Y}_\nu$, $T_i\times y^i\subset U_{Q(\nu)}$, $U_{Q(\nu)}=\{v\in U \mid Q(\nu)+v\subset U\}$, клетки S_i попарно не имеют общих внутренних точек. Ясно, что $E_\nu\subset E_{\nu+1}$.

Определим линейный функционал Φ_ν на E_ν, полагая

$$\Phi_\nu(\varphi)=2^{\nu k}\sum_i a_i\int\limits_{Q(\nu)} c\left(T_i\times y^i+v\right)dv.$$

Ввиду (3) значение функционала $\Phi_\nu(\varphi)$ не зависит от представления (6) функции φ.

Положим $X=\sum\limits_i a_i\left(T_i\times y^i\right)$. Так как c является p-коцепью, имеем

$$|\Phi_\nu(\varphi)|=|c_{Q(\nu)}(X)|\cdot 2^{-\nu m}\leqslant N|X|_{p'}2^{\nu m/p-\nu m}=$$

$$=N\left[\sum_i |a_i|^{p'}|T_i|\right]^{1/p'}\cdot 2^{-\nu m/p'}=N\left[\sum_i |a_i|^{p'}|S_i|\right]^{1/p'}=N\|\varphi\|_{L_{p'}(U)}.$$

Здесь $1/p+1/p'=1$.

Используя теорему Хана — Банаха, продолжим каждый функционал Φ_ν на $L_{p'}(U)$ с сохранением нормы функционала. Обозначим через $\widetilde{\Phi}_\nu$ выбранное продолжение функционала Φ. Установим сходимость последовательности функционалов $\widetilde{\Phi}_\nu$ на некотором плотном множестве в $L_{p'}(U)$.

Рассмотрим k-мерный симплекс $T\subset R^k$ и точку $\bar{y}\in\mathcal{Y}_{\nu_0}$ такие, что $T\times\bar{y}\subset U_{Q(\nu_0)}$. Пусть $S=T\times(Q_2(\nu_0)+\bar{y})$ и $\varphi=\chi_S$, $\varphi_w(x, y)=\varphi(x-w, y)$. Найдется такое $\delta>0$, что при $|w|<\delta$ $\varphi_w\in E_{\nu_0}$. При $\nu\geqslant\nu_0$ определено значение $\Phi_\nu(\varphi_w)$.

Так как

$$\widetilde{\Phi}_\nu(\varphi_w)=\Phi_\nu(\varphi_w)=2^{\nu k}\sum_i\int\limits_{Q(\nu)} c\left(\left((T+w)\times y^i\right)+v\right)dv,$$

где $y^i\in\mathcal{Y}_\nu$ и $\bigcup\limits_i\left(Q_2(\nu)+y^i\right)=Q_2(\nu_0)+\bar{y}$, то

$$\widetilde{\Phi}_\nu(\varphi_w)=2^{\nu k}\sum_i\int\limits_{Q_1(\nu)}\int\limits_{Q_2(\nu)+y^i} c\left((T+w+x)\times y\right)dy\,dx=$$

$$=2^{\nu k}\int\limits_{Q_1(\nu)}\int\limits_{Q_2(\nu_0)+\bar{y}} c\left((T+w+x)\times y\right)dy\,dx.$$

Функция $\widetilde{\Phi}_\nu(\varphi_w)$ аргумента w является усреднением локально интегрируемой функции $I(w)=\int\limits_{Q_2(\nu_0)+\bar{y}} c((T+w)\times y)\,dy$. Следовательно [3, приложение III], при $\nu\to\infty$ для почти всех w из шара $D_\delta=\{w\,|\,|w|<\delta\}$ последовательность $\widetilde{\Phi}_\nu(\varphi_w)$ сходится к $I(w)$. Из этого заключаем, что множество линейных комбинаций тех функций φ_w, на которых сходится последовательность $\widetilde{\Phi}_\nu(\varphi_w)$, образует в $L_{p'}(U)$ плотное множество. Кроме того, $\|\widetilde{\Phi}_\nu\|\leqslant N$. Поэтому последовательность $\widetilde{\Phi}_\nu$ слабо сходится к некоторому непрерывному линейному функционалу Φ на $L_{p'}(U)$.

Согласно теореме Рисса найдется такая функция $f\in L_p(U)$, что $\int\limits_U f\varphi\,dx\,dy=\Phi(\varphi)$ для любой функции $\varphi\in L_{p'}(U)$. Кроме того,

$$\|f\|_{L_p(U)}\leqslant N. \tag{7}$$

Покажем, что функция f удовлетворяет заключению леммы. Для каждого симплекса $S=T\times y\subset U$ существуют такие ν_0, $\delta>0, y\in\mathcal{Y}_{\nu_0}$, что $y\in\bar{y}+Q_2(\nu_0)$, $(T+\xi)\times\bar{y}\subset U_{Q(\nu_0)}$ при $|\xi|<\delta$. Симплекс S включен в семейство параллельных симплексов $\{(T+\xi)\times(\bar{y}+\eta)\}$, $\xi\in D_\delta$, $\eta\in Q_2(\nu_0)$. Нам достаточно доказать, что для почти всех $(\xi,\eta)\in D_\delta\times Q_2(\nu_0)$ выполнено равенство

$$\int\limits_{(T+\xi)\times(\bar{y}+\eta)} f\,dx=c((T+\xi)\times(\bar{y}+\eta)). \tag{8}$$

Рассмотрим множество $\mathcal{Q}$ всех кубов Q следующего вида: $Q=Q_2(\nu)+\tilde{y}$, $\nu\geqslant\nu_0$, $\tilde{y}\in\mathcal{Y}_\nu$, $Q\subset Q_2(\nu_0)+\bar{y}$. Согласно построению функции f для каждого $Q\in\mathcal{Q}$

$$\int\limits_Q c((T+\xi)\times y)\,dy=\int\limits_{(T+\xi)\times Q} f(x,y)\,dx\,dy \tag{9}$$

для почти всех $\xi\in D_\delta$. Так как множество $\mathcal{Q}$ счетно, то можно считать равенство (9) выполненным для всех $Q\in\mathcal{Q}$ и почти всех $\xi\in D_\delta$.

Поэтому для почти всех $\xi\in D_\delta$ и всех $Q\in\mathcal{Q}$ имеем

$$\int\limits_Q c((T+\xi)\times y)\,dy=\int\limits_Q\left(\int\limits_{(T+\xi)\times y} f(x,y)\,dx\right)dy. \tag{10}$$

Равенство (10) может быть выполнено для всех $Q\in\mathcal{Q}$ лишь в том случае, когда

$$c((T+\xi)\times y)=\int\limits_{(T+\xi)\times y} f(x,y)\,dx$$

для почти всех $y\in\bar{y}+Q_2(\nu_0)$. Следовательно, для почти всех $(\xi,\eta)\in D_\delta\times Q_2(\nu_0)$ выполнено равенство (9).

Единственность функции f устанавливается так же, как аналогичное утверждение в лемме 4. Лемма доказана.

Следствие. *Каждая k-мерная p-коцепь c в области $U\subset R^n$ почти всюду σ-аддитивна в следующем смысле: $T\subset U$ — произвольный ориентированный k-мерный симплекс, T_i — последовательность k-мерных симплексов, лежащих в T, ориентации которых совпадают с ориентацией симплекса T. Пусть, кроме того, $\sum\limits_i|T_i|=|T|$ и симплексы T_i попарно не имеют общих внутренних точек. Тогда $c(T+v)=\sum\limits_i c(T_i+v)$ для почти всех $v\in A_U(T)$.*

Доказательство. Можно считать, что симплекс T параллелен одной из k-мерных координатных плоскостей в R^n. Поэтому утверждение следствия вытекает из леммы 6.

Наряду с коцепями, заданными на симплексах, нам будет удобно рассматривать клеточные коцепи, т. е. коцепи, заданные на множестве выпуклых многогранников. Определение клеточных коцепей в точности повторяет определение коцепей, заданных на симплексах. Все утверждения, установленные выше для симплициальных коцепей, справедливы и для клеточных коцепей, причем доказательства остаются теми же.

Связь между симплициальными и клеточными коцепями указана в следующей лемме.

Лемма 7. *Для каждой коцепи c, заданной на симплексах в области $U \subset R^n$, существует клеточная коцепь $\tilde{c}$, заданная на клетках в области U, ограничение которой на множество симплексов совпадает с c почти всюду в U. Любые две такие коцепи $\tilde{c}$ совпадают почти всюду в U как клеточные коцепи.*

Доказательство. Коцепь $\tilde{c}$ может быть построена следующим образом: в каждом классе клеток, отличающихся друг от друга на параллельный перенос, выберем одну клетку S, разобьем ее произвольным образом на симплексы: $S = \bigcup\limits_i T_i$ и положим $\tilde{c}(S+v) = \sum\limits_i c(T_i+v)$ для $v \in A_U(S)$. Коцепь $\tilde{c}$ удовлетворяет заключению леммы.

Лемма 3′. *Пусть* $\alpha \in L_1^k(U)$, $\beta \in L_1^{k+1}(U)$. *Если для каждого куба Q с ребрами, параллельными осям стандартной системы координат в R^n, выполнено равенство*

$$\int\limits_{\partial Q+v} \alpha = \int\limits_{Q+v} \beta$$

для почти всех $v \in A_U(Q)$, то $\alpha \in W_{1,1}^k$ и $d\alpha = \beta$.

Доказательство этой леммы в точности повторяет доказательство леммы 3.

Перейдем к заключительной части доказательства теоремы. Пусть c — произвольная k-мерная p-коцепь в области $U \subset R^n$, дифференциал которой является q-коцепью. Для каждого набора индексов $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, и коцепи c рассмотрим построенную в лемме 6 функцию $f_I \in L_p(U)$. Для формы $\alpha = \sum\limits_I f_I dx_I$ и любого k-мерного ориентированного симплекса T, параллельного одной из k-мерных координатных плоскостей, равенство

$$\int\limits_{T+v} \alpha = c(T+v) \tag{11}$$

выполняется для почти всех $v \in A_U(T)$.

Повторяя то же самое рассуждение для коцепи dc, построим форму $\beta \in L_q^{k+1}(U)$. Для каждого $(k+1)$-мерного координатного куба Q, ребра которого параллельны осям координат, равенство

$$\int\limits_{\partial Q+v} \alpha = \int\limits_{Q+v} \beta$$

выполнено для почти всех $v \in A_U(Q)$. Используя лемму 3′, замечаем, что $\alpha \in W_{p,q}^k(U)$ и $d\alpha = \beta$.

Рассмотрим коцепь $b = c_\alpha - c$. Равенство (11) означает, что

$$b(T+v) = 0 \tag{12}$$

для каждого симплекса T, параллельного одной из k-мерных координатных плоскостей и почти всех $v \in A_U(T)$.

Так как $db = dc_\alpha - dc = c_{d\alpha} - dc = c_\beta - dc$, то $db(T+v) = 0$ для каждого $(k+1)$-мерного ориентированного симплекса T, параллельного одной из координатных плоскостей и почти всех $v \in A_U(T)$.

Отметим, что ввиду следствия 6 коцепи b и db почти всюду в U σ-аддитивны.

Лемма 8. *Пусть k-мерная коцепь b, заданная в области $U \subset R^n$, почти всюду в U σ-аддитивна и удовлетворяет условию: $b(T+v) = 0$ для каждого симплекса T, параллельного одной из k-мерных координатных плоскостей и почти всех $v \in A_U(T)$. Если $db = 0$ п. в. в U, то и $b = 0$ п. в. в U.*

Доказательство. Пусть $\tilde{b}$ — клеточная коцепь, построенная по коцепи b согласно лемме 7. Для произвольной k-мерной плоскости $P \subset R^n$ обозначим через $\nu_1(P)$ число тех векторов из стандартного базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ в R^n, которые параллельны плоскости P, а через $\nu_2(P)$ — число векторов этого базиса, перпендикулярных плоскости P. Пусть $\nu(P) = \nu_1(P) + \nu_2(P)$. Ясно, что $0 \leqslant \nu(P) \leqslant n$ и если $\nu(P) = n$, то плоскость P параллельна одной из k-мерных координатных плоскостей.

Определим числа $\nu(T)$, $\nu_1(T)$, $\nu_2(T)$ для любой k-мерной клетки T, полагая их равными соответствующим числам $\nu(P)$, $\nu_1(P)$, $\nu_2(P)$ для k-мерной плоскости P, содержащей клетку T.

Условие (12) выполнено для всех клеток T, для которых $\nu(T) = n$. Предположим, что оно выполнено для клеток T, у которых $\nu(T) \geqslant m+1$, и докажем его для клеток T, у которых $\nu(T) = m$, $m < n$.

Пусть P — произвольная k-мерная плоскость, для которой $\nu(P) = m$. Так как $m < n$, то существует базисный вектор e_j, не параллельный и не перпендикулярный плоскости P. В $(k+1)$-мерной плоскости $\widehat{P}$, содержащей P и параллельной вектору e_j, выберем ортонормированный базис $v_1, \ldots, v_{k+1}$, первые $\nu_1(P)$ векторов которого являются векторами стандартного базиса, а $v_{k+1} = e_j$. Рассмотрим в $\widehat{P}$ произвольный $(k+1)$-мерный куб, пересекающий P по k-мерной клетке, ребра которого параллельны векторам v_i. Установим, что для каждой k-мерной грани Γ куба Q выполняется неравенство $\nu(\Gamma) \geqslant m+1$. Любая k-мерная грань Γ перпендикулярна одному из векторов v_i. Если для грани Γ этот вектор v_i таков, что $\nu_1(P) < i < k+1$, то векторы $v_1, v_2, \ldots, v_{\nu_1(P)}, v_{k+1}$ параллельны Γ. В этом случае $\nu_1(\Gamma) \geqslant \nu_1(P) + 1$, $\nu_2(\Gamma) \geqslant \nu_2(P)$ и поэтому $\nu(\Gamma) \geqslant m+1$.

Если $i \geqslant \nu_1(P)$, то вектор v_i перпендикулярен грани Γ. Вектор v_{k+1} параллелен грани Γ. Поэтому $\nu_1(\Gamma) \geqslant \nu_1(P)$ и $\nu_2(\Gamma) \geqslant \nu_2(P) + 1$. Следовательно, и в этом случае $\nu(\Gamma) \geqslant m+1$.

Осталось рассмотреть случай $i = k+1$. В этом случае $\nu_1(\Gamma) \geqslant \nu_1(P)$ и $\nu_2(\Gamma) \geqslant \nu_2(P) + 1$, т. е. $\nu(\Gamma) \geqslant m+1$.

Рассмотрим k-мерную клетку $S = Q \cap P$. Плоскость разделяет куб Q на две клетки. Пусть Q_+ — одна из них. Так как $db = 0$ п.в. в U, то $d\tilde{b}(Q_+ + v) = 0$ для почти всех $v \in A_U(Q_+)$. Для каждой грани Γ_+ клетки Q_+, отличной от грани S, $\nu(\Gamma_+) \geqslant m+1$. По предположению индукции $\tilde{b}(\Gamma_+ + v) = 0$ для почти всех $v \in A_U(Q_+)$. Поэтому $\tilde{b}(S+v) = 0$ для почти всех $v \in A_U(Q_+)$.

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Для каждой клетки $T \subset P$ легко построить последовательность кубов $\{Q_i\}$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. Все ребра каждого куба Q_i параллельны векторам базиса $v_1, \ldots, v_{k+1}$.
2. $\operatorname{diam} Q_i < \varepsilon$.
3. $Q_i \cap P \subset T$, $Q_i \cap P$ — клетка.
4. $\operatorname{mes}_k T = \sum_i \operatorname{mes}_k (Q_i \cap P)$.

5. Кубы Q_i не имеют общих внутренних точек.

Так как коцепь $\tilde{b}$ почти всюду аддитивна и $\tilde{b}(Q_i \cap P + v) = 0$ для почти всех $v \in A_U(Q_i)$, то $\tilde{b}(T + v) = 0$ для почти всех $v \in \bigcap\limits_i A_u(Q_i)$. Поскольку $\operatorname{diam} Q_i < \varepsilon$ и $Q_i \cap T \neq \varnothing$, то $\bigcap\limits_i A_U(Q_i) \supset A_{U_\varepsilon}(T)$. Ввиду произвольности ε получаем отсюда равенство $\tilde{b}(T + v) = 0$ для почти всех $v \in A_U(T)$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Условия леммы 8 выполнены для коцепи db. Поэтому $db = 0$ п.в. в U. Тем самым условия леммы 8 выполнены для коцепи b. Следовательно, $b = 0$ п.в. в U. Теорема доказана.

Обозначим через $cW^k_{p,q}(U)$ пространство тех p-коцепей размерности k в области U, кограница которых является q-коцепью. При этом отождествляем друг с другом коцепи, совпадающие в U почти всюду. Пространство $cW^k_{p,q}(U)$ является линейным нормированным пространством относительно нормы $|c|_{p,q} = |c|_p + |dc|_q$.

Рассмотрим линейный оператор $\Psi: W^*_{p,q}(U) \to cW^*_{p,q}(U)$, определенный соотношением $\Psi\omega = c_\omega$. Лемма 4 и теорема означают обратимость оператора Ψ, а из (5) и (7) следует ограниченность операторов Ψ и Ψ^{-1}.

Пусть заданы дифференциальная форма степени k в области $U \subset \subset R^n$ и k-мерный ориентированный симплекс T в U. Допустим, что существуют такие p, q, $\infty > p > n - k + 1$, $\infty > q > n - k$, что $\omega \in \in W^k_{p,q}(U)$. Согласно [1] можно выбрать последовательность гладких форм $\{\omega_s\}$, $s = 1, 2, \ldots$, сходящуюся к ω в $W^k_{p,q,\mathrm{loc}}(U)$. В [2] показано, что последовательность $\int\limits_T \omega_s$ имеет предел, который не зависит от выбора последовательности ω_s и чисел p, q, фиксирующих пространство $W^k_{p,q}(U)$, элементом которого мы считаем форму ω. Обозначим этот предел через $\widehat{c}_\omega(T)$. Функция $\widehat{c}_\omega$ является коцепью в области U. Если $\omega \in W^k_{\infty,\infty}(U)$, то для любой ограниченной области $V \subset U$ форма $\omega|_V$ принадлежит каждому пространству $W^*_{p,q}(V)$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$. Поэтому коцепь $\widehat{c}_\omega$ определена также и для форм класса $W^*_{\infty,\infty}(U)$.

Коцепи c_ω и $\widehat{c}_\omega$ совпадают почти всюду в области U [2, теорема 8]. Коцепь $\widehat{c}_\omega$ непрерывна в следующем смысле: если последовательность $\{T_s\}$ ориентированных k-мерных симплексов в U сходится к симплексу $T \subset U$, то $\widehat{c}_\omega(T_s)$ сходится к $\widehat{c}_\omega(T)$ (см. [2, теорема 6]). Из доказанной теоремы вытекает

Следствие. *Для каждой коцепи $c \in cW^*_{p,q}$ при $p > n - k + 1$, $q > n - k$ существует непрерывная коцепь, совпадающая с c почти всюду.*

В заключение сравним нашу теорему при $p = q = \infty$ с теоремой Уолфа [3, гл. IX, теорема 7c].

Коцепь c размерности k называется *бемольной коцепью* в области $U \subset R^n$, если существуют такие постоянные N_1 и N_2, что

1) $|c(T)| \leqslant N_1 |T|$ для всех k-мерных симплексов $T \subset U$,

2) $|c(\partial T)| \leqslant N_2 |T|$ для всех $(k+1)$-мерных симплексов $T \subset U$.

Из условий 1), 2) следует, что $c \in cW^*_{\infty,\infty}(U)$. По теореме существует форма $\omega \in W^*_{\infty,\infty}(U)$, для которой $c_\omega = c$ почти всюду в U. Утверждение о совпадении коцепей c_ω и c можно в этом случае несколько усилить. Бемольная коцепь c и коцепь $\widehat{c}_\omega$ непрерывны и совпадают почти всюду в U. Поэтому $c = \widehat{c}_\omega$. В области U существует такое подмножество Q, что $\mathrm{mes}_n(U \backslash Q) = 0$, и всякий раз, как $T \cap Q$ измеримо в T и $\mathrm{mes}_k(T \cap Q) = \mathrm{mes}_k(T)$, выполнено равенство $c_\omega(T) = \widehat{c}_\omega(T)$ (см. [1, доказательство теоремы 1.5]). Следовательно, $c(T) = c_\omega(T)$ для каждого симплекса T, удовлетворяющего условию $\mathrm{mes}_k(T \cap Q) = \mathrm{mes}_k(T)$. Кроме того, в теореме 1.5 работы [1] установлено, что каждая форма $\omega \in \in W^{\kappa}_{\infty,\infty}(U)$ бемольна в смысле Уитни. Существование для каждой бемольной коцепи c бемольной формы ω, для которой коцепи c и c_ω совпадают в указанном смысле, представляет собой основную часть теоремы Уолфа.

Статья поступила
27 июля 1982 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Дифференциальные формы на липшицевом многообразии.— Сиб. мат. журн., 1980, т. 22, № 2, с. 16—30.
2. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Об интегрировании дифференциальных форм.— Сиб. мат. журн., 1980, т. 22, № 5, с. 63—79.
3. *Уитни Х.* Геометрическая теория интегрирования. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
4. *Де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.