



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. M. Ratseev, On Poisson customary polynomial identities, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2014, Volume 14, Issue 2, 150–155

DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-2-150-155

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

February 7, 2025, 01:53:02





- polynomials on a finite interval of the real axis]. *Izvestiia AN SSSR. Ser. matematicheskaja*, 1958, vol. 22, no. 3, pp. 337–354 (in Russian).
7. Freud G. Über die Approximation Reelen Stetiger Functionen Durch Gewöhnliche Polinome. *Math. Ann.*, 1959, vol. 137, no. 1, pp. 17–25.
8. Teljakovskii S. A. Two theorems on approximation of functions by algebraic polynomials. *Mat. Sb. (N. S.)*, 1966, vol. 70(112), no. 2, pp. 252–265 (in Russian).
9. Brudnyi Yu. A. The approximation of functions by algebraic polynomials. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1968, vol. 2, no. 4, pp. 735–743. DOI: 10.1070/IM1968v002n04ABEH000662
10. Lorentz G. G., Zeller K. L. Degree of Approximation by Monotone Polynomials. II. *J. Approx. Theory*, 1969, vol. 2, no. 3, pp. 265–269.
11. Shevchuk I. A. *Priblizhenie mnogochlenami i sledy nepreryvnykh na otrezke funktsii* [Approximation by polynomials and traces continuous on the interval functions]. Kiev, Naukova dumka, 1992. 225 p. (in Russian)
12. Shvedov A. S. Jackson's theorem in L^p , $0 < p < 1$, for algebraic polynomials, and orders of comonotone approximations. *Math. Notes*, 1979, vol. 25, no. 1, pp. 57–63.
13. Shvedov A. S. Komonotonnoe priblizhenie funktsii mnogochlenami [Comonotone approximation of functions by polynomials]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1980, vol. 250, no. 1, pp. 39–42 (in Russian).
14. Dzyadyk V. K. *Vvedenie v teoriuu ravnomernogo priblizheniia funktsii polinomami* [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. Moscow, Nauka, 1977, 512 p. (in Russian)

УДК 512.572

О ТОЖДЕСТВАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В АЛГЕБРАХ ПУАССОНА

С. М. Рацеев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, RatseevSM@mail.ru

В работе рассматриваются так называемые customary и extended customary тождества в алгебрах Пуассона. Показано, что последовательность коразмерностей $\{r_n(V)\}_{n \geq 1}$ любого extended customary пространства многообразия алгебр Пуассона V над произвольным полем либо ограничена полиномом, либо не ниже показательной функции с основанием степени, равной 2. При этом если данная последовательность ограничена полиномом, то найдется такой многочлен $R(x)$ с рациональными коэффициентами, что $r_n(V) = R(n)$ для всех достаточно больших n . Приводится нижняя и верхняя границы для многочленов $R(x)$ произвольной фиксированной степени.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

Векторное пространство A над полем K с двумя K -билинейными операциями умножения « \cdot » и « $\{, \}$ » называется алгеброй Пуассона, если относительно операции « \cdot » пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции « $\{, \}$ » — алгеброй Ли, и данные операции связаны правилом Лейбница:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \quad a, b, c \in A.$$

Алгебры Пуассона возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физики и т. д.

Пусть $F(X)$ — свободная алгебра Пуассона, где $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное множество свободных образующих. Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных x_1, \dots, x_n .

Выделим в пространстве P_{2n} подпространство Q_{2n} , порожденное элементами вида

$$\{x_{a_1}, x_{a_2}\} \cdot \{x_{a_3}, x_{a_4}\} \cdot \dots \cdot \{x_{a_{2n-1}}, x_{a_{2n}}\}.$$

Тогда данное пространство есть линейная оболочка следующих элементов:

$$Q_{2n} = \langle \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \dots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\} \mid \tau \in S_{2n}, \\ \tau(1) < \tau(2), \tau(3) < \tau(4), \dots, \tau(2n-1) < \tau(2n), \\ \tau(1) < \tau(3) < \dots < \tau(2n-1) \rangle_K.$$



Обозначим через T_{2n} множество перестановок τ из S_{2n} , которые удовлетворяют указанным выше свойствам. Пространство Q_{2n} было введено Д. Фаркашом (D. R. Farkas) в работах [1,2]. Важность рассмотрения данных пространств показывает следующая теорема.

Теорема 1 [1]. Пусть \mathbf{V} — многообразие алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики, в котором выполнено нетривиальное тождество. Тогда в \mathbf{V} выполняется нетривиальное тождество вида

$$\sum_{\tau \in T_{2n}} \alpha_{\tau} \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \dots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\} = 0, \quad \alpha_{\tau} \in K.$$

Определим также подпространство R_n в P_n , порожденное элементами вида

$$\{x_{a_1}, x_{a_2}\} \cdot \{x_{a_3}, x_{a_4}\} \cdot \dots \cdot \{x_{a_{2m-1}}, x_{a_{2m}}\} \cdot x_{\alpha_{2m+1}} \cdot \dots \cdot x_{\alpha_n}.$$

Тогда пространство R_n является линейной оболочкой элементов следующего вида:

$$\begin{aligned} R_n = \{ & \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \dots \cdot \{x_{\tau(2m-1)}, x_{\tau(2m)}\} \cdot x_{\tau(2m+1)} \cdot \dots \cdot x_{\tau(n)} \mid, \\ & \tau \in S_n, \quad 0 \leq 2m \leq n, \\ & \tau(1) < \tau(2), \tau(3) < \tau(4), \dots, \tau(2m-1) < \tau(2m), \\ & \tau(1) < \tau(3) < \dots < \tau(2m-1), \\ & \tau(2m+1) < \tau(2m+2) < \dots < \tau(n)\}_K. \end{aligned}$$

Пусть \mathbf{V} — некоторое многообразие алгебр Пуассона (все необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в монографиях [3,4]), $Id(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия \mathbf{V} . Обозначим:

$$\begin{aligned} P_n(\mathbf{V}) &= P_n / (P_n \cap Id(\mathbf{V})), & c_n(\mathbf{V}) &= \dim P_n(\mathbf{V}), \\ Q_{2n}(\mathbf{V}) &= Q_{2n} / (Q_{2n} \cap Id(\mathbf{V})), & q_{2n}(\mathbf{V}) &= \dim Q_{2n}(\mathbf{V}), \\ R_n(\mathbf{V}) &= R_n / (R_n \cap Id(\mathbf{V})), & r_n(\mathbf{V}) &= \dim R_n(\mathbf{V}). \end{aligned}$$

Лемма 1. Пусть $F = F(X)$, $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, основное поле произвольно и элементы

$$u_s^{2n}(x_1, \dots, x_{2n}), \quad s = 1, \dots, q_{2n}(F), \quad (1)$$

образуют базис пространства Q_{2n} , $n > 0$. Тогда полилинейные элементы от переменных x_1, \dots, x_n вида

$$\begin{aligned} & x_1 \cdot \dots \cdot x_n, \\ & x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_{n-2k}} \cdot u_s^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}), \end{aligned} \quad (2)$$

$$2 \leq 2k \leq n, \quad s = 1, \dots, q_{2k}(F), \quad i_1 < \dots < i_{n-2k}, \quad j_1 < \dots < j_{2k},$$

будут образовывать базис пространства R_n .

Доказательство. Очевидно, что любой элемент из R_n является линейной комбинацией элементов вида (2).

Покажем, что элементы вида (2) линейно независимы в R_n . Предположим противное. Пусть выполнено нетривиальное линейное соотношение:

$$\sum_{\substack{0 \leq 2k \leq n, \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{2k} \leq n}} \alpha_{j_1 \dots j_{2k}}^{k,s} x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_{n-2k}} \cdot u_s^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}) = 0. \quad (3)$$

Выберем такое минимальное значение k , при котором $\alpha_{j_1 \dots j_{2k}}^{k,s} \neq 0$. Подставим в этом случае вместо переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-2k}}$ единицу. Тогда из (3) будет следовать такое нетривиальное линейное соотношение:

$$\sum_{s=1}^{q_{2k}(F)} \beta_s u_s^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}) = 0,$$

где не все β_s равны 0, что противоречит линейной независимости элементов (1). \square

Лемма 2. Пусть \mathbf{V} — некоторое многообразие алгебр Пуассона над произвольным полем. Тогда



(i) полилинейные элементы

$$u_s^{2n}(x_1, \dots, x_{2n}), \quad s = 1, \dots, q_{2n}(\mathbf{V}), \quad (4)$$

образуют базис пространства $Q_{2n}(\mathbf{V})$ тогда и только тогда, когда полилинейные элементы от переменных x_1, \dots, x_n вида

$$\begin{aligned} & x_1 \cdot \dots \cdot x_n, \\ & x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_{n-2k}} \cdot u_s^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}), \end{aligned} \quad (5)$$

$$2 \leq 2k \leq n, \quad s = 1, \dots, q_{2k}(\mathbf{V}), \quad i_1 < \dots < i_{n-2k}, \quad j_1 < \dots < j_{2k},$$

образуют базис пространства $R_n(\mathbf{V})$.

(ii) для любого натурального числа n выполнено равенство

$$r_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{2 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} q_{2k}(\mathbf{V}),$$

где C_n^{2k} — число сочетаний из n по $2k$.

Доказательство. (i) Доказательство линейной независимости элементов вида (5) аналогично доказательству линейной независимости элементов вида (2) в лемме 1. Поэтому остается показать, что любой элемент из $R_n(\mathbf{V})$ линейно выражается через элементы вида (5). Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in R_n(\mathbf{V})$.

Дополним элементы (4) до базиса пространства Q_{2k} , $0 \leq 2k \leq n$:

$$u_s^{2k}(x_1, \dots, x_{2k}), \quad v_t^{2k}(x_1, \dots, x_{2k}), \quad s = 1, \dots, q_{2k}(\mathbf{V}), \quad t = 1, \dots, q_{2k}(F) - q_{2k}(\mathbf{V}).$$

Тогда из леммы 1 следует, что элемент $f(x_1, \dots, x_n)$ представим в виде следующей линейной комбинации:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) = & \sum_{\substack{0 \leq 2k \leq n, \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{2k} \leq n}} \alpha_{j_1 \dots j_{2k}}^{k,s} x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_{n-2k}} \cdot u_s^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}) + \\ & + \sum_{\substack{0 \leq 2k \leq n, \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{2k} \leq n}} \beta_{j_1 \dots j_{2k}}^{k,t} x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_{n-2k}} \cdot v_t^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}). \end{aligned} \quad (6)$$

Предположим, что в равенстве (6) хотя бы один из элементов $\beta_{j_1 \dots j_{2k}}^{k,t}$ не равен нулю. Выберем такое минимальное значение k , при котором $\beta_{j_1 \dots j_{2k}}^{k,t} \neq 0$. Подставим вместо переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-2k}}$ единицу. Получим такое равенство:

$$f(1, \dots, x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}, \dots, 1) = \sum_{s=1}^{q_{2k}(\mathbf{V})} \epsilon_s u_s^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}) + \sum_{t=1}^{q_{2k}(F) - q_{2k}(\mathbf{V})} \delta_t v_t^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}), \quad (7)$$

где не все δ_t равны 0. Так как левая часть равенства (7) принадлежит $Q_{2k}(\mathbf{V})$ и не все δ_t равны 0, то элементы вида (4) не являются базисом пространства $Q_{2k}(\mathbf{V})$. Противоречие.

Пункт (ii) следует из пункта (i). □

Теорема 2. Пусть \mathbf{V} — нетривиальное многообразие алгебр Пуассона над произвольным полем.

Тогда либо

1) $r_n(\mathbf{V}) \geq 2^{n-1}$ для любого n ,

либо

2) найдется такой многочлен $a_{2N}x^{2N} + \dots + a_1x + a_0$ степени $2N \geq 0$ из кольца $\mathbb{Q}[x]$, что для любого $n \geq 2N$ будет выполнено равенство

$$r_n(\mathbf{V}) = a_{2N}n^{2N} + \dots + a_1n + a_0, \quad a_{2N} \neq 0,$$

причем либо

2a) $r_n(\mathbf{V}) \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}$, $n \geq 1$, и $\frac{1}{(2N)!} \leq a_{2N} \leq \frac{1}{N!2^N}$,

либо

2b) $r_n(\mathbf{V}) = 1$ для любого n .



Доказательство. Пусть последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$ не ограничена полиномом. Тогда из предложения 5 работы [5] следует, что для любого целого положительного n выполнено неравенство $q_{2n}(\mathbf{V}) > 0$. С учетом леммы 2, получаем:

$$r_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{2 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} q_{2k}(\mathbf{V}) \geq 1 + \sum_{2 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} = 2^{n-1}.$$

Пусть теперь последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$ ограничена полиномом. Пусть N — максимальное число, при котором $q_{2N}(\mathbf{V}) > 0$. Тогда из леммы 2 следует, что для любого $n \geq 2N$ будет выполнено равенство

$$r_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{k=1}^N C_n^{2k} q_{2k}(\mathbf{V}),$$

т. е. найдется такой многочлен степени $2N \geq 0$ с рациональными коэффициентами, что для любого $n \geq 2N$

$$r_n(\mathbf{V}) = a_{2N} n^{2N} + \dots + a_1 n + a_0, \quad a_{2N} \neq 0.$$

Пусть $N > 0$. Так как $q_{2n}(F) = \frac{(2n)!}{n!2^n}$ для любого n [6], то для любого $n \geq 2N$ будет выполнено двойное неравенство:

$$\sum_{k=0}^N C_n^{2k} \leq r_n(\mathbf{V}) \leq \sum_{k=0}^N C_n^{2k} \cdot \frac{(2k)!}{k!2^k}. \quad (8)$$

Поэтому

$$\frac{1}{(2N)!} \leq a_{2N} \leq \frac{1}{N!2^N}.$$

При этом заметим, что

$$r_n(\mathbf{V}) \geq 1 + C_n^2 \cdot q_2(\mathbf{V}) \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Если $N = 0$, то $r_n(\mathbf{V}) = 1$ для любого n . □

Пусть Λ_{2n} — алгебра Грассмана с единицей, $2n$ образующими элементами $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ и операцией умножения « \wedge ». Введем в алгебре Λ_{2n} два новых умножения:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(a \wedge b + b \wedge a), \quad \{a, b\} = a \wedge b - b \wedge a, \quad a, b \in \Lambda_{2n}.$$

Обозначим полученную алгебру Пуассона $(\Lambda_{2n}, +, \cdot, \{, \})$ через G_{2n} .

Лемма 3 [5]. Пусть N — произвольное натуральное число. Для алгебры Пуассона G_{2N} над полем нулевой характеристики верны следующие утверждения:

(i) полилинейные тождества

$$\{x, y, z\} = 0, \quad \{x_1, y_1\} \cdot \dots \cdot \{x_{N+1}, y_{N+1}\} = 0 \quad (9)$$

порождают идеал тождеств алгебры G_{2N} ;

(ii) последовательность $\{r_n(G_{2N})\}_{n \geq 1}$ достигает нижней границы в неравенстве (8):

$$c_n(G_{2N}) = r_n(G_{2N}) = \sum_{k=0}^N C_n^{2k}, \quad n \geq 2N,$$

при этом $a_{2N} = \frac{1}{(2N)!}$.

Следующая лемма, в частности, показывает, что многообразие, порожденное алгеброй G_2 , является наименьшим многообразием алгебр Пуассона в классе всех многообразий алгебр Пуассона, имеющих рост не ниже полиномиального.

Лемма 4 [5]. Для алгебры G_2 над полем нулевой характеристики верны следующие утверждения:

(i) тождества

$$\{x_1, x_2, x_3\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$$

порождают идеал тождеств алгебры G_2 ;



(ii) $q_2(G_2) = 1, q_{2n}(G_2) = 0, n \geq 2,$

$$c_n(G_2) = r_n(G_2) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}, \quad n \geq 1;$$

(iii) многообразие $\text{var}(G_2)$ является наименьшим многообразием среди всех многообразий алгебр Пуассона \mathbf{V} , у которых последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$ ($\{c_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$) растет не ниже полинома, т. е. если для некоторого многообразия \mathbf{V} последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$ ($\{c_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$) растет не ниже полинома, то $G_2 \in \mathbf{V}$.

Заметим, что существует бесконечно много попарно различных многообразий алгебр Пуассона \mathbf{V} , у которых последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$ достигает нижней границы полиномиального роста. Пусть $SU_N = SU_N(K)$ — алгебра строго верхнетреугольных матриц порядка N над полем K и операцией умножения \wedge . В векторном пространстве $SU_N \oplus K$ над полем K определим две операции умножения \cdot и $\{, \}$ следующим образом:

$$(a + \alpha) \cdot (b + \beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha \beta, \\ \{a + \alpha, b + \beta\} = [a, b],$$

где $[a, b] = a \wedge b - b \wedge a, a, b \in SU_N, \alpha, \beta \in K$. Полученную алгебру Пуассона $(SU_N \oplus K, \cdot, \{, \}, K)$ обозначим через PSU_N .

Лемма 5 [7]. Для алгебры Пуассона PSU_N над полем нулевой характеристики верны следующие утверждения:

(i) полилинейные тождества

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{x_1, x_2, \dots, x_N\} = 0$$

порождают идеал тождеств алгебры PSU_N ;

(ii) $q_2(PSU_N) = 1, q_{2n}(PSU_N) = 0, n > 1,$

$$r_n(PSU_N) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}, \quad n \geq 1, \\ c_n(PSU_N) = 1 + \sum_{k=2}^{\min\{n, N-1\}} C_n^k \cdot (k-1)!, \quad n \geq 1.$$

Библиографический список

1. Farkas D. R. Poisson polynomial identities // Comm. Algebra. 1998. Vol. 26, № 2. P. 401–416.
2. Farkas D. R. Poisson polynomial identities. II // Arch. Math. (Basel). 1999. Vol. 72, № 4. P. 252–260.
3. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М. : Наука, 1985.
4. Giambruno A., Zaicev M. V. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Math. Surv. and Monographs. Providence, R.I. : American Math. Soc., 2005. Vol. 122.
5. Рацев С. М. Алгебры Пуассона полиномиального роста // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 700–711.
6. Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A. Poisson PI algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. Vol. 359, № 10. P. 4669–4694.
7. Череватенко О. И. О лиево нильпотентных алгебрах Пуассона // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика, физика. 2012. № 23(142), вып. 29. С. 14–16.

On Poisson Customary Polynomial Identities

S. M. Ratseev

Ulyanovsk State University, 42, Leo Tolstoy str., 432017, Ulyanovsk, Russia, RatseevSM@mail.ru

We study Poisson customary and Poisson extended customary polynomials. We show that the sequence of codimensions $\{r_n(V)\}_{n \geq 1}$ of every extended customary space of variety V of Poisson algebras over an arbitrary field is either bounded by a polynomial or at least exponential. Furthermore, if this sequence is bounded by polynomial then there is a polynomial $R(x)$ with rational coefficients such that $r_n(V) = R(n)$ for all sufficiently large n . We present lower and upper bounds for the polynomials $R(x)$ of an arbitrary fixed degree.

Key words: Poisson algebra, variety of algebras, growth of a variety.



References

1. Farkas D. R. Poisson polynomial identities. *Comm. Algebra*, 1998, vol. 26, no. 2, pp. 401–416.
2. Farkas D. R. Poisson polynomial identities. II. *Arch. Math. (Basel)*, 1999, vol. 72, no. 4, pp. 252–260.
3. Bahturin Yu. A. *Identical relations in Lie algebras*. Utrecht, VNU Sci. Press, 1987. 309 p. (Rus. ed. : Bahturin Yu. A. *Tozhdestva v algebrah Li*. Moscow, Nauka, 1985).
4. *Giamb Bruno A., Zaicev M. V.* Polynomial Identities and Asymptotic Methods. *Math. Surv. and Monographs*. Providence, R.I., American Math. Soc., 2005, vol. 122.
5. *Ratseev S. M.* Poisson algebras of polynomial growth. *Siberian Math. J.* 2013, vol. 54, no. 3, pp. 555–565.
6. *Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A.* Poisson PI algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2007, vol. 359, no. 10, pp. 4669–4694.
7. *Cherevatenko O. I.* On nilpotent Leibnitz algebras. *Nauchnyye vedomosti BelGU. Ser. Matematika. Fizika* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Ser. Mathematics. Physics], 2012, no. 23(142), iss. 29, pp. 14–16.

УДК 517.54

НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ

Р. Б. Салимов¹, Э. Н. Карабашева²

¹Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, salimov@5354.ru

²Аспирант кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, enkarabasheva@bk.ru

В работе рассматривается краевая задача Римана с бесконечным индексом, когда краевое условие задачи задается на действительной оси комплексной плоскости. Для решения этой задачи используется подход, основанный на устранении бесконечного разрыва аргумента коэффициента краевого условия и аналогичный тому, с помощью которого в случае конечного индекса задачи ранее в работах Ф. Д. Гахова устранялись разрывы коэффициента краевого условия с помощью специально подобранных функций, отличных от используемых в настоящей работе.

Ключевые слова: краевая задача Римана, аналитическая функция, бесконечный индекс.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть D^+ и D^- — соответственно верхняя и нижняя полуплоскости в плоскости переменного $z = x + iy$ с действительной осью L , $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ — функции, аналитические соответственно в областях D^+ и D^- . Требуется определить функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, ограниченные в областях D^+ и D^- соответственно, если их граничные значения удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

в котором $G(t)$, $g(t)$ — заданные на L функции. В случае, когда $\ln G(t)$ и $g(t)$ — функции, удовлетворяющие условию H_L (условию Гельдера) всюду на L , включая окрестность точки $t = \infty$ [1, с. 67], решение задачи (1) дано в монографиях [1, с. 136–139; 2, с. 118–121]. Решение задачи зависит от её индекса, равного $(\arg G(+\infty) - \arg G(-\infty))/2\pi$.

Начало исследования задачи (1) в случае, когда её индекс бесконечен, т.е. $\arg G(+\infty) - \arg G(-\infty) = \infty$, было положено Н. В. Говоровым. Результаты его работ в дальнейшем вошли в монографию [3]. Этой проблеме посвящен ряд работ других авторов; отметим из них статьи [4–7], в которых изучены новые случаи задачи Римана с бесконечным индексом, в статье [8] рассмотрен особый случай задачи, в [9] изучен случай, когда в задаче (1) при $g(t) \equiv 0$ в качестве L берется произвольный гладкий замкнутый контур, в окрестностях некоторых точек которого $\arg G(t)$ неограничен.

Авторы указанного ряда работ решение задачи (1) получают путем построения канонического решения — частного решения соответствующей однородной задачи:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L, \quad (2)$$

обладающего нужными свойствами, аналогично тому, как это было сделано ранее Н. В. Говоровым.