



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Миронов, Коммутативные кольца дифференциальных операторов, отвечающие многомерным алгебраическим многообразиям,  
*Сиб. матем. журн.*, 2002, том 43, номер 5, 1102–1114

<https://www.mathnet.ru/smj1353>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

15 мая 2025 г., 01:05:50



КОММУТАТИВНЫЕ КОЛЬЦА  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ,  
ОТВЕЧАЮЩИЕ МНОГОМЕРНЫМ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИМ МНОГООБРАЗИЯМ

А. Е. Миронов

**Аннотация:** Построены новые примеры многомерных матричных коммутирующих дифференциальных операторов, а также построен многомерный аналог иерархии Кадомцева — Петвиашвили.

**Ключевые слова:** коммутирующие дифференциальные операторы

1. Введение

В статье мы построим коммутативные кольца многомерных  $N \times N$ -матричных дифференциальных операторов, чьи совместные собственные вектор-функции и собственные числа параметризуются точками спектрального многообразия  $Y^k$ , которое является пересечением гладких гиперповерхностей  $Y_{a_1} \cap \dots \cap Y_{a_k}$  в главно поляризованном абелевом многообразии  $X^g$  размерности  $g$ ,  $k < g - 1$ . Гиперповерхность  $Y_{a_j}$  является сдвигом на элемент  $a_j \in X^g$  тэта-дивизора  $Y \subset X^g$ . Число  $N$  равно  $rd_g$ , где  $d_g$  — индекс  $g$ -кратного самопересечения гиперповерхности  $Y$ . Через  $Q^j$  обозначим многообразие  $Y^j \cap Y$ . Далее будем предполагать, что многообразие  $Y^j$  трансверсально пересекается с  $Y_{a_{j+s}}$  и с  $Y$ ,  $j + s \leq k$ . Пусть  $Y^j$  и  $Q^j$  являются гладкими, неприводимыми, и пусть также набор  $a_1, \dots, a_k$  находится в общем положении (т. е. принадлежит некоторому открытому всюду плотному множеству в  $X^g \times \dots \times X^g$ ).

С этими коммутативными кольцами связан аналог иерархии Кадомцева — Петвиашвили, который мы укажем в этой работе.

Основной результат — это следующая

**Теорема 1.** Существует вложение  $L_k$  кольца мероморфных функций на многообразии  $Y^k$  с полюсом на  $Q^k$  в кольцо  $N \times N$ -матричных дифференциальных операторов по  $g - k$  переменным с аналитическими в окрестности 0 коэффициентами

$$L_k : \mathcal{A}_k \rightarrow \text{Mat}(N, g - k).$$

Образом вложения является коммутативное кольцо  $(g - k)$ -мерных матричных дифференциальных операторов.

Используя теорему Римана — Роха — Хирцебруха, можно показать, что число  $d_g$ , а значит, и  $N$ , кратно  $g!$ .

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00-01-00915, 00-15-99252 и 01-01-06017).

Операторы  $L_k(\mathcal{A}_k)$  являются операторами ранга  $r$ . Это означает, что каждой точке многообразия  $Y^k$  отвечает  $r$  линейно независимых собственных вектор-функций.

Двумерные операторы  $L_k(\mathcal{A}_k)$  с двоякопериодическими коэффициентами являются конечнозонными на любом уровне энергии  $E$ , т. е. блоховские вектор-функции (собственные одновременно для оператора  $L_k(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathcal{A}_k$ , и для операторов сдвига на периоды) параметризуются римановой поверхностью конечного рода, заданной в спектральной поверхности уравнением  $\lambda = E$ .

Если размерность  $Y^k$  равна 2, то, используя формулу присоединения и теорему Лефшеца о вложении, можно показать, что размерность Кодaira спектральной поверхности  $Y^k$  равна 2, т. е. эта поверхность является поверхностью общего типа.

Теорему 1 докажем, учитывая результаты Накаяшики [1] (см. также [2]), который построил вложение кольца мероморфных функций на  $X^g$  с полюсом на  $Y$  в кольцо  $g$ -мерных  $N \times N$ -матричных дифференциальных операторов. Двумерные  $2 \times 2$ -матричные такие операторы (операторы Накаяшики) изучались в работах автора [3, 4]. В частности, в [4] доказано, что не существует двумерных вещественных операторов Накаяшики, конечнозонных на любом уровне энергии, с гладкими двоякопериодическими коэффициентами, но существуют двумерные вещественные конечнозонные на любом уровне энергии операторы Накаяшики с сингулярными двоякопериодическими коэффициентами. В [4] также указаны гладкие вещественные операторы Накаяшики, среди которых имеется оператор второго порядка  $H$ , по диагонали которого стоят операторы Шредингера в двоякопериодических магнитных полях и с двоякопериодическими потенциалами вида

$$(\partial_{y_1} - A_1)^2 + (\partial_{y_2} - A_2)^2 + u(y), \quad y = (y_1, y_2).$$

Магнитно-блоховские вектор-функции оператора  $H$  (собственные одновременно для  $H$  и для операторов магнитных трансляций  $T_j^*$ ,  $T_j^* \varphi(y) = \varphi(y + e_j) \exp(2\pi y_j)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $e_j$  — периоды) на каждом уровне энергии параметризуются римановой поверхностью конечного рода. Это свойство является аналогом конечнозонности на любом уровне энергии для операторов с двоякопериодическими коэффициентами.

В частном случае, когда  $g = 3$ ,  $r = 1$ , а в качестве спектральной поверхности служит тэта-дивизор, теорема 1 была доказана А. Накаяшики [1].

М. Ротштейн в [5] построил другой пример коммутирующих матричных дифференциальных операторов. В этом примере  $g = 5$ ,  $r = 1$ , размерность матриц  $N$  равна 5, а в качестве спектральной поверхности служит поверхность Фано.

Напомним конструкцию И. М. Кричевера [6] построения коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов ранга 1. Пусть  $\Gamma$  — риманова поверхность рода  $g$ ,  $P = p_1 + \dots + p_g$  — неспециальный положительный дивизор на  $\Gamma$ ,  $\infty$  — точка на  $\Gamma$ , отличная от точек дивизора  $P$ ,  $k^{-1}$  — локальный параметр в  $\infty$ ,  $k^{-1}(\infty) = 0$ . Существует функция Бейкера — Ахизера  $\psi(p, x)$ ,  $p \in \Gamma$ , которая мероморфна на  $\Gamma \setminus \infty$ , множество ее полюсов совпадает с  $P$  и не зависит от  $x$ , в окрестности  $\infty$  функция  $\psi \exp(-kx)$  аналитична. Для любой мероморфной функции  $f(p)$  на  $\Gamma$  с единственным полюсом в  $\infty$  существует единственный дифференциальный оператор  $L(f)$  такой, что

$$L(f)\psi = f\psi.$$

Для различных  $f$  операторы  $L(f)$  попарно коммутируют. Отсюда вытекает сопоставление спектральных данных коммутирующих операторов Берншалла — Чаунди — Кричевера и спектральных данных операторов  $L_k(\mathcal{A}_k)$ :

$$\{\Gamma, \infty, P, f\} \longleftrightarrow \{Y^k, Q^k, Q_c^k, \lambda\},$$

где  $Q_c^k = Y^k \cap Y_c$ ,  $c \in X^g$ , — некоторый ненулевой элемент.

Как и в одномерном случае, можно построить операторы  $L_\alpha$ , коэффициенты которых зависят от времени и удовлетворяют эволюционным уравнениям. Справедлива

**Теорема 2.** *Существует многомерный аналог иерархии Кадомцева — Петвиашвили*

$$[\partial_{t_\alpha} - L_\alpha, \partial_{t_\beta} - L_\beta] = 0,$$

где  $L_\alpha$  и  $L_\beta$  —  $N \times N$ -матричные дифференциальные операторы по  $g-k$  переменным, коэффициенты которых зависят от  $t_\alpha$  и  $t_\beta$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  принадлежат счетному множеству индексов.

Как уже отмечалось в [4], коэффициенты операторов Накаяшики не могут удовлетворять эволюционным уравнениям типа иерархии Кадомцева — Петвиашвили.

В разд. 2 мы введем векторные тэта-функции, которые задают сечения голоморфных векторных расслоений ранга  $r$  над абелевым многообразием  $X^g$ . При  $r = 1$  векторные тэта-функции совпадают с классическими тэта-функциями Римана. С помощью векторных тэта-функций можно выписывать в явном виде сечения голоморфных векторных расслоений над римановыми поверхностями. Если  $X^g$  является многообразием Якоби римановой поверхности  $\Gamma \subset X^g$ , то ограничение векторной тэта-функции на  $\Gamma$  будет сечением векторного расслоения над  $\Gamma$  ранга  $r$  степени  $rs_g$ , где  $s$  — некоторое натуральное число,  $g$  — род  $\Gamma$ .

В разд. 3, используя преобразование Фурье — Мукаи [7], мы введем модуль Бейкера — Ахиезера над кольцом дифференциальных операторов, элементы которого выражаются через векторные тэта-функции. Теоремы 1 и 2 вытекают из теоремы 3 о свободности модуля Бейкера — Ахиезера.

Автор благодарит И. А. Тайманова за полезные обсуждения и замечания.

## 2. Векторные тэта-функции

В этом разделе мы укажем коэффициенты разложения в ряд Фурье векторных тэта-функций. В лемме 1 будет найдена размерность пространства векторных тэта-функций.

Обозначим через  $X^g = \mathbb{C}^g / \{\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g\}$  главно поляризованное комплексное абелево многообразие, где  $\Omega$  — симметричная  $g \times g$ -матрица с  $\text{Im } \Omega > 0$ . Для невырожденных попарно коммутирующих матриц  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, g$ , размера  $r \times r$  введем множество матричных функций (мультипликаторов) на  $\mathbb{C}^g$ :

$$e_{n+\Omega m}(z) = \exp(-s\pi i \langle m, \Omega m \rangle - 2s\pi i \langle m, z \rangle) A_1^{m_1} \dots A_g^{m_g},$$

где  $m, n \in \mathbb{Z}^g$ ,  $\langle m, z \rangle = m_1 z_1 + \dots + m_g z_g$ ,  $s$  — некоторое натуральное число. Нетрудно убедиться, что эти функции удовлетворяют равенствам

$$e_\lambda(z + \lambda') e_{\lambda'}(z) = e_{\lambda'}(z + \lambda) e_\lambda(z) = e_{\lambda + \lambda'}(z), \quad \lambda, \lambda' \in \mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g.$$

Любой набор матричных функций, удовлетворяющий этим равенствам, задает векторное расслоение ранга  $r$  на  $X^g$ , которое получается факторизацией  $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^r$  по действию решетки  $\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g$ :

$$(z, v) \sim (z + \lambda, e_\lambda(z)v), \quad v \in \mathbb{C}^r.$$

Глобальные сечения задаются вектор-функциями на  $\mathbb{C}^g$  со свойствами периодичности

$$f(z + \lambda) = e_\lambda f(z).$$

Векторной тэта-функцией ранга  $r$  степени  $s$  назовем вектор-функцию

$$\theta^{r,s}(z) = (\theta_1^s(z), \dots, \theta_r^s(z))^\top, \quad z \in \mathbb{C}^g,$$

с целыми компонентами, обладающую свойством

$$\theta^{r,s}(z + \Omega m + n) = \exp(-s\pi i \langle m, \Omega m \rangle - 2s\pi i \langle m, z \rangle) A_1^{m_1} \dots A_g^{m_g} \theta^{r,s}(z).$$

В силу периодичности  $\theta^{r,s}$  разлагается в ряд

$$\theta^{r,s} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^g} \exp(2\pi i \langle l, z \rangle) a_l, \quad a_l = (a_l^1, \dots, a_l^r)^\top \in \mathbb{C}^r.$$

Найдем рекуррентные соотношения на коэффициенты  $a_l$ :

$$\begin{aligned} \theta^{r,s}(z + \Omega e_j) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^g} \exp(2\pi i \langle l, \Omega e_j \rangle) \exp(2\pi i \langle l, z \rangle) a_l \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^g} \exp(-s\pi i \Omega_{jj}) \exp(2\pi i \langle l - s e_j, z \rangle) A_j a_l, \end{aligned}$$

следовательно,

$$a_{l+se_j} = \exp(s\pi i \Omega_{jj} + 2\pi i \langle l, \Omega e_j \rangle) A_j^{-1} a_l,$$

$e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)^\top$  (1 на  $j$ -м месте). Из последней формулы вытекает, что  $\theta^{r,s}$  определяется заданием коэффициентов  $a_l$ , где компоненты  $l$  находятся в пределах  $0 \leq l_\alpha \leq s-1$ , стало быть, размерность пространства векторных тэта-функций не превышает  $rs^g$ . Покажем, что при любом выборе  $a_l$ ,  $0 \leq l_\alpha \leq s-1$ , ряд для векторной тэта-функции  $\theta^{r,s}$  сходится. Для этого перепишем его в следующем виде:

$$\theta^{r,s}(z) = \sum_{l_0} \sum_{l \in \mathbb{Z}^g} \exp(2\pi i \langle l_0 + sl, z \rangle) a_{l_0+sl},$$

где компоненты  $l_0$  находятся в пределах от 0 до  $s-1$ . Полученные выше рекуррентные соотношения разрешимы в явном виде

$$a_{l_0+sl} = \exp(s\pi i \langle l, \Omega l \rangle + 2\pi i \langle l_0, \Omega l \rangle) A_1^{-l_1} \dots A_g^{-l_g} a_{l_0}.$$

Пусть

$$\theta_{a_{l_0}}^{r,s} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^g} \exp(s\pi i \langle l, \Omega l \rangle + 2\pi i \langle l_0, \Omega l \rangle + 2\pi i \langle l_0 + sl, z \rangle) A_1^{-l_1} \dots A_g^{-l_g} a_{l_0},$$

тогда

$$\theta^{r,s} = \sum_{l_0} \theta_{a_{l_0}}^{r,s}.$$

Обозначим через  $C_j$  наибольшее из двух чисел  $\|A_j^{-1}\|$  и  $\|A_j\|$ , тогда норма каждого слагаемого в ряде для  $\theta_{a_{l_0}}^{r,s}$  не превосходит

$$|\exp(s\pi i \langle l, \Omega l \rangle + 2\pi i \langle l_0, \Omega l \rangle + 2\pi i \langle l_0 + sl, z \rangle)| C_1^{l_1} \dots C_g^{l_g} \|a_{l_0}\|,$$

следовательно, в силу положительной определенности  $\text{Im}\Omega$  этот ряд сходится абсолютно. Мы получили следующий результат.

**Лемма 1.** *Размерность пространства векторных тэта-функций степени  $s$  ранга  $r$  равна  $rs^g$ .*

Укажем пример матриц  $A_j$ . В качестве  $A_1$  возьмем матрицу с недиагональной жордановой формой, в качестве остальных  $A_j$  можно взять многочлены от  $A_1$ . Если же жордановы формы матриц  $A_j$  диагональны, то расслоение, отвечающее набору  $A_j$ , является прямой суммой линейных расслоений.

### 3. Коммутирующие операторы

В этом разделе сформулируем теорему Накаяшики [1] в нужном для нас частном случае голоморфных векторных расслоений ранга  $r \geq 1$ , инвариантных относительно сдвигов на элементы  $X^g$ . Используя преобразование Фурье — Мукаи этих расслоений, введем модули Бейкера — Ахиезера  $M_c^j$  над кольцами дифференциальных операторов  $\mathcal{D}_j$ . В следствии 2 будет показано, что отображение ограничения функций из  $M_c^j$  на подмногообразие  $Y^{j+1} \subset Y^j$  задает эпиморфизм  $M_c^j \rightarrow M_c^{j+1}$ . В теореме 3 будет доказана свобода  $\mathcal{D}_j$ -модуля  $M_c^j$ . В следствии 3 покажем, что коэффициенты операторов  $L_k(\mathcal{A}_k)$  удовлетворяют эволюционным уравнениям.

Через  $\text{Pic}^0(X^g)$  обозначим многообразие Пикара  $X^g$ . В нашем случае  $X^g$  и  $\text{Pic}^0(X^g)$  изоморфны. Обозначим через  $\mathcal{P}$  расслоение Пуанкаре над  $X^g \times \text{Pic}^0(X^g)$ . Сечения  $\mathcal{P}$  при подъеме на  $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g$  задаются функциями  $f(z, x)$  такими, что

$$f(z + \Omega m_1 + n_1, x + \Omega m_2 + n_2) = \exp(-2\pi i(\langle m_1, x \rangle + \langle m_2, z \rangle))f(z, x),$$

где  $m_j, n_j \in \mathbb{Z}^g$ .

Пусть  $Y$  является нулями некоторой тэта-функции  $\vartheta$  (ранга 1) степени  $s$ ,

$$\vartheta(z + \Omega m + n) = \exp(-s\pi i\langle m, \Omega m \rangle - 2s\pi i\langle m, z \rangle)\vartheta(z).$$

Через  $\mathcal{L}_c$  обозначим голоморфное векторное расслоение над  $X^g$ , сечения которого задаются вектор-функциями  $f(z)$  ранга  $r$  на  $\mathbb{C}^g$  со свойством

$$f(z + \Omega m + n) = \exp(-2\pi i\langle m, c \rangle)A_1^{m_1} \dots A_g^{m_g} f(z), \quad m, n \in \mathbb{Z}^g, c \in \mathbb{C}^g. \quad (1)$$

Отметим, что расслоение  $\mathcal{L}_c$  инвариантно относительно сдвигов на элементы  $X^g$ . Пусть  $\mathcal{L}$  — пространство глобальных сечений расслоения  $\mathcal{L}_0$  с полюсом на  $Y$ ,  $\pi$  — проекция  $X^g \times \text{Pic}^0(X^g) \rightarrow X^g$ . Обозначим через  $F(Y, \mathcal{L}_0)(U)$  пространство мероморфных сечений расслоения  $\pi^*\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{P}$  над  $X^g \times U$  с полюсом на  $Y \times U$ , где  $U$  — открытое подмножество в  $\text{Pic}^0(X^g)$ . При фиксированном  $x \in U$  пространство  $F(Y, \mathcal{L}_0)(U)$  совпадает с пространством

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} H^0(X^g, \mathcal{L}_x(jY)).$$

Через  $\mathcal{L}_x(jY)$  будем иногда обозначать расслоение  $\mathcal{L}_x \otimes [jY]$ , где  $[jY]$  — линейное расслоение, ассоциированное с дивизором  $jY$ . Векторные расслоения и соответствующие им пучки аналитических сечений мы для простоты обозначаем одним и тем же символом. Пространство  $H^0(X^g, \mathcal{L}_x(jY))$  можно отождествить с пространством глобальных сечений расслоения  $\mathcal{L}_x$  с полюсом на  $Y$ , причем порядок полюса не превышает  $j$ .

Пространство  $F(Y, \mathcal{L}_0)(U)$  называется *преобразованием Фурье — Мукаи над  $U$  пространства  $\mathcal{L}$* .

На  $F(Y, \mathcal{L}_0)(U)$  действуют операторы ковариантного дифференцирования

$$\nabla_j = \partial_{x_j} - \frac{1}{s} \partial_{z_j} \log \vartheta(z) : F(Y, \mathcal{L}_0)(U) \rightarrow F(Y, \mathcal{L}_0)(U),$$

$$\nabla_k \nabla_j = \nabla_j \nabla_k, \quad k, j = 1, \dots, g,$$

которые снабжают  $F(Y, \mathcal{L}_0)(U)$  структурой модуля над кольцом  $\mathcal{O}_U[\nabla_1, \dots, \nabla_g]$ , где  $\mathcal{O}_U$  — кольцо аналитических функций на  $U$ . Из построения следует, что  $F(Y, \mathcal{L}_0)(U)$  является также модулем над кольцом мероморфных функций  $\mathcal{A}_0$  на  $X^g$  с полюсом на  $Y$ .

Обозначим через  $\mathcal{D}_g$  кольцо дифференциальных операторов  $\mathcal{O}_g[\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_g}]$ , где  $\mathcal{O}_g$  — кольцо аналитических функций по переменным  $x_1, \dots, x_g$ , определенных в окрестности  $0 \in \mathbb{C}^g$ . В [1] введен модуль Бейкера — Ахиезера

$$M_c = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_c(n)$$

над кольцом дифференциальных операторов  $\mathcal{D}_g$ , где

$$M_c(n) = \left\{ f(z, x) \exp \left( - \sum_{j=1}^g \frac{x_j}{s} \partial_{z_j} \log \vartheta(z) \right), f(z, x) \in H^0(X, \mathcal{L}_{c+x}(nY)) \right\}.$$

Нам понадобится еще один  $\mathcal{D}_g$ -модуль

$$\mathcal{D}_g M_c(n) = \left\{ \sum d\varphi, d \in \mathcal{D}_g, \varphi \in M_c(n) \right\}.$$

Элементы  $M_c$  можно выразить через векторные тэта-функции. Любая вектор-функция из  $M_c$  представляется в виде суммы вектор-функций вида

$$g(x) \frac{\theta^{r,sn} \left( z + \frac{x+c}{sn} \right)}{\vartheta^n(z)} \exp \left( - \sum_{j=1}^g \frac{x_j}{s} \partial_{z_j} \log \vartheta(z) \right),$$

где  $g(x) \in \mathcal{O}_g$ ,  $\theta^{r,sn}$  — некоторая векторная тэта-функция.

В [1] доказана

**Теорема Накаяшики.** Для  $c$  общего положения  $M_c$  — свободный  $\mathcal{D}_g$ -модуль ранга  $N$ . Справедливо равенство  $M_c = \mathcal{D}_g M_c(g)$ .

Равенство  $M_c = \mathcal{D}_g M_c(g)$  означает, что  $\mathcal{D}_g$ -модуль  $M_c$  порождается элементами из  $M_c(g)$ .

Зафиксируем базис  $\Phi_c = (\phi_{1,c}(z, x), \dots, \phi_{N,c}(z, x))^T$  в  $\mathcal{D}_g$ -модуле  $M_c$ . Иногда, как и в следующем следствии, мы под  $\Phi_c$  будем понимать матричную функцию, в которой  $N$  строк и  $r$  столбцов, поскольку каждая компонента  $\phi_{j,c}(z, x)$  сама является вектор-функцией размера  $r$ .

**Следствие 1** [1]. Существует кольцевое вложение

$$L_0 : \mathcal{A}_0 \rightarrow \text{Mat}(N, g),$$

определенное равенством

$$L_0(\lambda)\Phi_c = \lambda\Phi_c, \quad \lambda \in \mathcal{A}_0.$$

Образом вложения является коммутативное кольцо  $g$ -мерных матричных дифференциальных операторов.

Перейдем к нашей конструкции. На самом деле мы докажем теорему 1 в более сильном варианте. Будем считать, что гиперповерхность  $Y_{a_j}$  может

быть не только сдвигом  $Y$ , но и сдвигом некоторой гладкой гиперповерхности, линейно эквивалентной  $Y$ , т. е.  $Y_{a_j}$  является нулями некоторой тэта-функции степени  $s$  со сдвигом

$$Y_{a_j} = \{z \in X^g, \vartheta_j(z - a_j) = 0\}.$$

Через  $\mathcal{L}_c^k$  обозначим линейное расслоение над  $Y^k$ , сечения которого задаются функциями  $f(z)$  на  $Y^k \subset \mathbb{C}^g$  со свойством (1).

Введем модуль Бейкера — Ахиезера

$$M_c^k = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_c^k(n)$$

над  $\mathcal{D}_{g-k}$ , где

$$M_c^k(n) = \left\{ f(z, x) \exp\left(-\sum_{j=1}^g \frac{x_j}{s} \partial_{z_j} \log \vartheta(z)\right), f(z, x) \in H^0(Y^k, \mathcal{L}_{c+x}^k(nQ^k)) \right\}.$$

Справедлива

**Теорема 3.** Для  $s$  общего положения  $M_c^k$  является свободным  $\mathcal{D}_{g-k}$ -модулем ранга  $N$ .

Для доказательства этой теоремы нам понадобится

**Лемма 2.** Отображение ограничения

$$\begin{aligned} \pi_j : H^0(Y^j, \mathcal{L}_{c+x}^j(nQ^j)) &\rightarrow H^0(Y^{j+1}, \mathcal{L}_{c+x}^{j+1}(nQ^{j+1})), \\ \pi_j(\varphi) &= \varphi|_{Y^{j+1}}, \quad n \geq 1, j \geq 0, \end{aligned}$$

является эпиморфизмом для  $x$  в общем положении.

Через  $Y^0$ ,  $\mathcal{L}_c^0$  и  $Q^0$  мы обозначаем соответственно  $X^g$ ,  $\mathcal{L}_c$  и  $Y$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $F$  — расслоение ранга  $r$  над  $X^g$ , инвариантное относительно сдвигов. Через  $F_c$  обозначим расслоение  $F \otimes \mathcal{P}_c$ , где  $\mathcal{P}_c$  — ограничение расслоения Пуанкаре на  $X^g \times \{c\}$ . В [1] (см. пример 5.8 и предложение 5.10) доказано, что

$$H^i(X^g, F_c(nY)) = 0, \quad i \geq 1, n \geq 1, \tag{2}$$

$$H^i(X^g, F_c(nY)) = 0, \quad i \neq g, n \leq -1, \tag{3}$$

и для точки  $c$  в общем положении при  $i \geq 0$  выполнено равенство

$$H^i(X^g, F_c) = 0. \tag{4}$$

Отметим, что расслоение

$$\mathcal{L}_c \otimes [sY] \otimes [-Y_{a_1}] \otimes \cdots \otimes [-Y_{a_s}]$$

инвариантно относительно сдвигов, где  $1 \leq s \leq k$ , поскольку таковыми являются  $\mathcal{L}_c$  и  $[Y] \otimes [-Y_{a_j}]$ . Значит,

$$H^i(X^g, \mathcal{L}_c \otimes [nY] \otimes [-Y_{a_1}] \otimes \cdots \otimes [-Y_{a_s}]) = 0, \tag{5}$$

где  $1 \leq i < g, n \in \mathbb{Z}$ . Имеется точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_c^j \otimes [nQ^j] \otimes [-Y^{j+1}] \rightarrow \mathcal{L}_c^j \otimes [nQ^j] \rightarrow \mathcal{L}_c^{j+1} \otimes [nQ^{j+1}] \rightarrow 0. \tag{6}$$



Из длинной точной когомологической последовательности, отвечающей этой последовательности пучков, следует, что для доказательства сюръективности  $\pi_j$  достаточно установить равенство

$$H^i(Y^j, \mathcal{L}_c^j \otimes [nQ^j] \otimes [-Y^{j+1}]) = 0. \tag{7}$$

Из (5) немедленно вытекает сюръективность  $\pi_0$ . Для доказательства (7) рассмотрим следующую точную последовательность:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{L}_c^j \otimes [nQ^j] \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+1}})] \otimes \dots \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+s}})] \\ \rightarrow \mathcal{L}_c^j \otimes [nQ^j] \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+2}})] \otimes \dots \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+s}})] \\ \rightarrow \mathcal{L}_c^{j+1} \otimes [nQ^{j+1}] \otimes [-(Y^{j+1} \cap Y_{a_{j+2}})] \otimes \dots \otimes [-(Y^{j+1} \cap Y_{a_{j+s}})] \rightarrow 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где  $j + s \leq k$ . Из длинных точных когомологических последовательностей, отвечающих (6) и (8), используя (2)–(4), индукцией по  $j$  получаем

$$H^i(Y^j, \mathcal{L}_c^j \otimes [nQ^j] \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+1}})] \otimes \dots \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+s}})]) = 0, \tag{9}$$

где  $1 \leq i < g - j$ ,  $j + s \leq k$ . Следовательно, отображение  $\pi_j$  сюръективно. Лемма доказана.

Отметим также, что, если  $n > g$ , то равенство (9) выполнено при  $i \geq 1$ . Из леммы 2 выводим

**Следствие 2.** *Отображение ограничения*

$$\pi_j : M_c^j \rightarrow M_c^{j+1}, \quad \pi_j(\varphi) = \varphi|_{Y^{j+1}},$$

является эпиморфизмом для  $c$  в общем положении.

Нам также понадобится

**Лемма 3.** *Линейная оболочка множества*

$$\left\{ \bigcup_{b, \varphi} \frac{\vartheta_{j+1}(z-b)}{\vartheta(z)} \varphi, \varphi \in H^0(X^g, \mathcal{L}_{c+sb}((n-1)Y)), b \in \mathbb{C}^g \right\},$$

где  $n > g$  и объединение берется по всем  $b$  и  $\varphi$ , совпадает с  $H^0(X^g, \mathcal{L}_c(nY))$ .

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность отображений

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X^g, \mathcal{L}_c(nY)) \xrightarrow{\pi_0} H^0(Y^1, \mathcal{L}_c^1(nQ^1)) \xrightarrow{\pi_1} \dots \\ \dots \xrightarrow{\pi_{g-2}} H^0(Y^{g-1}, \mathcal{L}_c^{g-1}(nQ^{g-1})) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Через  $Y^{g-1}$  мы обозначили риманову поверхность  $Y^{g-2} \cap Y_{a_{g-1}}$ , где  $a_{g-1}$  — некоторый элемент  $X^g$ . Отображения  $\pi_0, \dots, \pi_{g-3}$  являются сюръективными по лемме 2. Так как (9) выполнено при  $n > g$ , то  $\pi_{g-2}$  является также сюръективным. Следовательно, для доказательства леммы достаточно показать, что линейная оболочка ограничения вектор-функций, указанных в лемме, на  $Y^{g-1}$  совпадает с  $H^0(Y^{g-1}, \mathcal{L}_c^{g-1}(nQ^{g-1}))$ . Выберем  $b_1$  и  $b_2 \in \mathbb{C}^g$  так, чтобы дивизоры  $B_1 = Y_{b_1} \cap Y^{g-1}$  и  $B_2 = Y_{b_2} \cap Y^{g-1}$  не пересекались. Заметим, что из (6), (8) и (9) следуют равенства

$$\begin{aligned} H^1(\mathcal{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}]) = 0, \\ H^1(Y^{g-1}, \mathcal{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_i]) = 0, \end{aligned}$$

$$H^1(Y^{g-1}, \mathcal{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_1] \otimes [-B_2]) = 0.$$

Тогда по теореме Римана – Роха имеем

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}]) &= \deg(\mathcal{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}]) - (g(Y^{g-1}) - 1)r, \\ h^0(\mathcal{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_i]) &= \deg(\mathcal{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_i]) - (g(Y^{g-1}) - 1)r, \\ h^0(\mathcal{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_1] \otimes [-B_2]) &= \deg(\mathcal{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_1] \otimes [-B_2]) - (g(Y^{g-1}) - 1)r, \end{aligned}$$

где  $h^0$  – размерность  $H^0$ ,  $g(Y^{g-1})$  – род  $Y^{g-1}$ . Так как дивизоры  $B_1$  и  $B_2$  не пересекаются, то

$$\begin{aligned} \dim(H^0(Y^{g-1}, \mathcal{L}_c^{g-1}(nQ^{g-1}) \otimes [-B_1]) \cap H^0(Y^{g-1}, \mathcal{L}_c^{g-1}(nQ^{g-1}) \otimes [-B_2])) \\ = h^0(\mathcal{L}_c^{g-1}(nQ^{g-1}) \otimes [-B_1] \otimes [-B_2]). \end{aligned}$$

Напомним, что  $H^0(Y^{g-1}, \mathcal{L}_c^{g-1}(nQ^{g-1}) \otimes [-B_j])$  мы отождествляем с пространством глобальных сечений  $\mathcal{L}_c^{g-1}(nQ^{g-1})$ , имеющих нули в точках дивизора  $B_j$ . Отсюда следует равенство

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}]) &= h^0(\mathcal{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_1]) \\ &+ h^0(\mathcal{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_2]) - h^0(\mathcal{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_1] \otimes [-B_2]), \end{aligned}$$

которое означает, что линейная оболочка ограничения  $W(b_1) \cup W(b_2)$  на  $Y^{g-1}$  совпадает с  $H^0(\mathcal{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}])$ , где

$$W(b) = \left\{ \frac{\vartheta_{j+1}(z-b)}{\vartheta(z)} \varphi, \varphi \in H^0(X^g, \mathcal{L}_{c+sb}((n-1)Y)) \right\}.$$

Это завершает доказательство леммы.

Заметим, что мы доказали даже большее. В условии леммы 3 можно брать объединение не по всем  $b$ , а достаточно взять множество

$$W(a_1) \cup \dots \cup W(a_{g-2}) \cup W(b_1) \cup W(b_2).$$

Обозначим через  $S_n^g$  размерность пространства дифференциальных операторов по  $g$  переменным с постоянными коэффициентами, степень которых не превышает  $n-1$ . Нетрудно проверить, что

$$S_n^g = C_{n+g-1}^{n-1} = \frac{n(n+1)\dots(n+g-1)}{g!}.$$

Введем еще одно обозначение

$$\mathcal{F}_j(n) = \dim H^0(Y^j, \mathcal{L}_c^j(nQ^j)), \quad 0 \leq j < g-1.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.** Выберем однородный базис  $\Phi_c$  в  $\mathcal{D}_g$ -модуле  $M_c$  так, чтобы его ограничение на подмногообразии  $Y^j$  порождало  $\mathcal{D}_j$ -модуль  $M_c^j$ , т. е.

$$M_c^j = \{d_1\phi_{1,c}|_{Y^j} + \dots + d_N\phi_{N,c}|_{Y^j}, d_i \in \mathcal{D}_g\}.$$

Это возможно сделать в силу следствия 2. Под однородностью базиса мы понимаем следующее. Во-первых, все элементы базиса  $\Phi_c$  содержатся в  $M_c(g)$  (это требование выполнимо по теореме Накаяшики). И, во-вторых, если  $\phi_{1,c}, \dots, \phi_{1,K}$

— элементы базиса, которые принадлежат  $M_c(n)$ ,  $n \leq g$ , то они порождают  $M_c(n)$ . Иными словами,

$$\{d_1\phi_{1,c} + \dots + d_K\phi_{K,c}, d_j \in \mathcal{D}_g\} \cap M_c(n) = M_c(n).$$

Обозначим через  $a_n^g$  число элементов базиса  $\Phi_c$ , принадлежащих  $M_c(n)$ , но не принадлежащих  $M_c(n-1)$ . В силу однородности базиса и свободности  $\mathcal{D}_g$ -модуля  $M_c$  справедливо равенство

$$a_1^g S_n^g + \dots + a_g^g S_{n-g+1}^g = \mathcal{F}_0(n), \quad n > g.$$

Через  $\mathcal{D}_{g-j}\Phi_c^j \subset M_c^j$  обозначим  $\mathcal{D}_{g-j}$ -модуль

$$\{\varphi|_{Y^j}, \varphi = d_1\phi_{1,c} + \dots + d_N\phi_{N,c}, d_s \in \mathcal{D}_{g-j}\}.$$

Докажем индукцией по  $k$ , что  $\mathcal{D}_{g-k}\Phi_c^k$  является свободным  $\mathcal{D}_{g-k}$ -модулем ранга  $N$ . Затем, вычислив размерности пространств  $M_c^j(n)$  и  $\mathcal{D}_{g-j}\Phi_c^j \cap M_c^j(n)$  (при фиксированном  $x$ ), мы установим, что эти  $\mathcal{D}_{g-k}$ -модули совпадают.

Начальный шаг индукции — это теорема Накаяшики. Пусть при  $k = j$  утверждение доказано. Из свободности  $\mathcal{D}_{g-j}$ -модуля  $M_c^j$  вытекает равенство

$$a_1^g S_n^{g-j} + \dots + a_g^g S_{n-g+1}^{g-j} = \mathcal{F}_j(n), \quad n > g. \tag{10}$$

Предположим, что  $\mathcal{D}_{g-j-1}$ -модуль  $\mathcal{D}_{g-j-1}\Phi_c^{j+1}$  не является свободным при  $k = j+1 < g$ . Тогда существуют операторы  $\tilde{d}_i \in \mathcal{D}_{g-j-1}$  такие, что

$$\phi = \tilde{d}_1\phi_{1,c} + \dots + \tilde{d}_N\phi_{N,c}, \quad \phi|_{Y^{j+1}} = 0.$$

Это эквивалентно тому, что найдется элемент из  $M_c^j(n)$  (можно считать, что  $n > g$ ) вида

$$\frac{\vartheta_j(z - a_{j+1})}{\vartheta(z)}\varphi, \quad \varphi \in M_{c-a_{j+1}}^j(n-1),$$

для которого справедливо равенство

$$\tilde{d}_1\phi_{1,c} + \dots + \tilde{d}_N\phi_{N,c} = \frac{\vartheta_{j+1}(z - a_{j+1})}{\vartheta(z)}\varphi, \quad z \in Y^j. \tag{11}$$

Введем подпространство в  $H^0(Y^j, \mathcal{L}_{c+x}^j(nQ^j))$ :

$$V_{c+x}^j(n) = \left\{ \frac{\psi}{e} \Big|_{Y^j}, \psi = d_1\phi_{1,c} + \dots + d_N\phi_{N,c}, d_i \in \mathcal{D}_{g-j-1} \right\} \cap H^0(Y^j, \mathcal{L}_{c+x}^j(nQ^j)),$$

где

$$e = \exp\left(-\sum_{j=1}^g \frac{x_j}{s} \partial_{z_j} \log \vartheta(z)\right).$$

Найдем размерность пространства  $V_{c+x}^j(n)$ . Из (10) вытекают равенства

$$\begin{aligned} a_1^g (S_n^{g-j} - S_{n-1}^{g-j}) + \dots + a_g^g (S_{n-g+1}^{g-j} - S_{n-g}^{g-j}) &= a_1^g S_{n-g+1}^{g-j-1} + \dots + a_g^g S_{n-g+1}^{g-j-1} \\ &= \mathcal{F}_j(n) - \mathcal{F}_j(n-1) = \mathcal{F}_{j+1}(n), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\dim V_{c+x}^j(n) = \mathcal{F}_j(n) - \mathcal{F}_j(n-1). \tag{12}$$

Введем еще одно подпространство в  $H^0(Y^j, \mathcal{L}_{c+x}^j(nQ^j))$ , зависящее от элемента  $a_{j+1}$ :

$$W_{c+x}^j(n) = \left\{ \frac{\vartheta_{j+1}(z - a_{j+1})}{\vartheta(z)} \varphi, \varphi \in H^0(Y^j, \mathcal{L}_{c+x+sa_{j+1}}^j((n-1)Q^j)), z \in Y^j \right\}.$$

Ясно, что

$$\dim W_{c+x}^j(n) = \mathcal{F}_j(n-1),$$

так как  $\dim H^0(Y^j, \mathcal{L}_{c+x+sa_{j+1}}^j((n-1)Q^j)) = \mathcal{F}_j(n-1)$ .

Из лемм 2 и 3 вытекает, что существует элемент  $a_{j+1}$ , для которого равенство вида (11) невозможно. Поскольку

$$\dim V_{c+x}^j(n) + \dim W_{c+x}^j(n) = \dim H^0(Y^j, \mathcal{L}_{c+x}^j(nQ^j)),$$

равенство вида (11) невозможно для элементов из некоторой малой окрестности  $a_{j+1}$ . В силу аналитической зависимости пространства  $W_{c+x}^j(n)$  от  $a_{j+1}$  равенство вида (11) не выполняется для открытого всюду плотного множества таких  $a_{j+1}$ . Следовательно, так как по нашему предположению набор  $a_1, \dots, a_k$  находится в общем положении,  $\mathcal{D}_{g-j-1}$ -модуль  $\mathcal{D}_{g-j-1}\Phi_c^{j+1}$  является свободным ранга  $N$ .

Докажем, что  $\mathcal{D}_{g-j-1}$ -модули  $\mathcal{D}_{g-j-1}\Phi_c^{j+1}$  и  $M_c^{j+1}$  совпадают.

Из того, что  $\frac{\vartheta_j(z)}{\vartheta(z)}$  является мероморфной функцией, и из точности последовательности (6) вытекают равенства

$$\begin{aligned} & \dim H^0(Y^{j+1}, \mathcal{L}_{c+x}^{j+1}(nQ^{j+1})) \\ &= \dim H^0(Y^j, \mathcal{L}_{c+x}^j(nQ^j)) - \dim H^0(Y^j, \mathcal{L}_{c+x}^j((n)Q^j) \otimes [-Y^{j+1}]) \\ &= \dim H^0(Y^j, \mathcal{L}_{c+x}^j(nQ^j)) - \dim H^0(Y^j, \mathcal{L}_{c+x}^j((n-1)Q^j)) = \mathcal{F}_j(n) - \mathcal{F}_j(n-1). \end{aligned}$$

Так как справедливо включение  $\mathcal{D}_{g-j-1}\Phi_c^{j+1} \subset M_c^{j+1}$  и из (12) следует, что

$$\dim H^0(Y^{j+1}, \mathcal{L}_{c+x}^{j+1}(nQ^{j+1})) = \dim V_{c+x}^j(n) = \mathcal{F}_{j+1}(n),$$

то  $\mathcal{D}_{g-j-1}$ -модули  $\mathcal{D}_{g-j-1}\Phi_c^{j+1}$  и  $M_c^{j+1}$  совпадают. Теорема 3 доказана.

Покажем, как из теоремы 3 вывести теоремы 1 и 2. Обозначим через

$$\Phi_c = (\phi_{1,c}(z, x), \dots, \phi_{N,c}(z, x))^T$$

базис в  $\mathcal{D}_{g-k}$ -модуле  $M_c^k$ . Тогда по теореме 3 для  $\lambda \in \mathcal{A}_k$  существует единственный оператор  $L_k(\lambda) \in \text{Mat}(N, g-k)$  такой, что

$$L_k(\lambda)\Phi_c = \lambda\Phi_c.$$

Для различных  $\lambda$  операторы  $L_k(\lambda)$  попарно коммутируют. Теорема 1 доказана.

Обозначим через  $T_j \in \text{Mat}(N, g-k)$  оператор порядка  $g$ , определенный равенством

$$T_j\Phi_c = \partial_{t_j}\Phi_c,$$

время  $t_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , мы отождествляем с переменной  $x_{g-k}$ . Справедливы равенства

$$[L_k(\lambda), T_j - \partial_{t_j}]\Phi = 0, \quad [T_m - \partial_{t_m}, T_n - \partial_{t_n}]\Phi = 0.$$

Тогда из теоремы 3 вытекает

**Следствие 3.** *Справедливы эволюционные уравнения*

$$\frac{\partial L_k(\lambda)}{\partial t_j} = [L_k(\lambda), T_j], \quad \lambda \in \mathcal{A}_k,$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial t_n} - \frac{\partial T_n}{\partial t_m} = [T_n, T_m].$$

Перейдем к доказательству теоремы 2. Разделим каждую вектор-функцию  $\phi_{j,c}(z, x)$  на

$$\exp\left(-\sum_{j=g-k+1}^g \frac{x_j}{s} \partial_{z_j} \log \vartheta(z)\right),$$

затем заменим  $x = (x_1, \dots, x_g)$  на

$$(x, t) = \left(x_1, \dots, x_{g-k}, \sum_m t_{1,m}, \dots, \sum_m t_{k,m}\right),$$

где  $m = (m_1, \dots, m_g) \in \mathbb{Z}^g$ ,  $m_1 + \dots + m_g \geq 2$ ,  $m_i \geq 0$ , и, наконец, умножим на

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^k \sum_m \frac{t_{j,m}}{s} (\partial_{z_{g-k+j}} \log \vartheta(z) + \partial_z^m \log \vartheta(z))\right),$$

где

$$\partial_z^m \log \vartheta(z) = \partial_{z_1}^{m_1} \dots \partial_{z_g}^{m_g} \log \vartheta(z).$$

Получим вектор-функцию  $\psi_{j,c}(z, x, t)$ , которая представляется в виде суммы вектор-функций:

$$g(x, t) \frac{\theta^{r,sn}\left(z + \frac{(x,t)+c}{sn}\right)}{\vartheta^n(z)} \exp\left(-\sum_{j=1}^{g-k} \frac{x_j}{s} \partial_{z_j} \log \vartheta(z) - \sum_{j=1}^k \sum_m \frac{t_{j,m}}{s} (\partial_{z_{g-k+j}} \log \vartheta(z) + \partial_z^m \log \vartheta(z))\right).$$

Тогда для

$$\Psi = (\psi_{1,c}(z, x, t), \dots, \psi_{N,c}(z, x, t))^T$$

справедливо равенство

$$L_{j,m} \Psi = \partial_{t_{j,m}} \Psi.$$

По теореме 3 имеет место равенство

$$[\partial_{t_{j,m}} - L_{j,m}, \partial_{t_{i,n}} - L_{i,n}] = 0.$$

Теорема 2 доказана.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Nakayashiki A. Commuting partial differential operators and vector bundles over Abelian varieties // Amer. J. Math. 1994. V. 116. P. 65–100.
2. Nakayashiki A. Structure of Baker — Akhiezer modules of principally polarized Abelian varieties, commuting partial differential operators and associated integrable systems // Duke Math. J. 1991. V. 42, N 2. P. 315–358.
3. Мионов А. Е. Коммутативные кольца дифференциальных операторов, связанные с двумерными абелевыми многообразиями // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1389–1403.

4. *Миронов А. Е.* Вещественные коммутирующие дифференциальные операторы, связанные с двумерными абелевыми многообразиями // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 1. С. 126–143.
5. *Rothstein M.* Sheaves with connection on abelian varieties // Duke Math. J. 1996. V. 84, N 3. P. 565–598.
6. *Кричевер И. М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 6. С. 183–208.
7. *Mukai S.* Duality between  $D(X)$  and  $D(\hat{X})$  with its application to Picard sheaves // Nagoya Math. J. 1981. V. 81. P. 153–175.

*Статья поступила 6 декабря 2001 г.*

*Миронов Андрей Евгеньевич*

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090*

*mironov@math.nsc.ru*