Ю. В. Селиванов, Бипроективные банаховы алгебры, их строение, когомологии и связь с ядерными операторами,
Функц. анализ и его прил., 1976, том 10, выпуск 1, 89–90

Функциональный анализ и его приложения,
т. 10, вып. 1, 1976, 89—90.

БИПРОЕКТИВНЫЕ БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ, ИХ СТРОЕНИЕ, КОГОМОЛОГИИ И СВЯЗЬ С ЯДЕРНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Ю. В. Селиванов

В связи с изучением глобальной размерности банаховых алгебр ($\operatorname{dg} A$) был введен в рассмотрение класс т. н. бипроективных банаховых алгебр (см. [1]), изучение которого представляет и самостоятельный интерес. В настоящей работе изучается строение полупростых бипроективных банаховых алгебр; «практически все» такие алгебры (подробно см. теорему 1) являются топологическими прямыми суммами топологически простых бипроективных банаховых алгебр («ячеек»). Дается полное описание таких ячеек; они образуют класс т. н. алгебр, порожденных двойственностью. Эти алгебры обычно состоят из ядерных операторов в банаховых пространствах.

Результаты о вычислении $\operatorname{dg} A$, а также результаты о существовании нерасщепимых сингулярных расширений (см. [1], [2]), полученные ранее лишь для части полупростых бипроективных банаховых алгебр, в этой работе распространены «практически на все» такие алгебры (подробно см. теорему 5). Наконец, для всех коммутативных полупростых бипроективных банаховых алгебр, обладающих свойством аппроксимации, решается положительно вопрос о расщепимости всех коммутативных сингулярных расширений.

Пусть A — (комплексная) банахова алгебра, вообще говоря, не обладающая единицей, A^+ — результат присоединения к A единицы, $\mathscr{A}$ — категория левых банаховых A-модулей, $\mathscr{A}^2$ — категория банаховых A-бимодулей, $\operatorname{Prim}(A)$ — примитивный спектр алгебры A с топологией Джекобсона. Для $X \in \mathscr{A}$ ($X \in \mathscr{A}^2$) через $\operatorname{dh} X$ ($\operatorname{dh}^2 X$) обозначается гомологическая размерность объекта $X \in \mathscr{A}$ ($X \in \mathscr{A}^2$) (см. [1] и [3]). *Глобальная размерность* (соответственно *когомологическая размерность*) банаховой алгебры A есть, по определению, число $\operatorname{dg} A = \sup\{\operatorname{dh} X\colon X \in \mathscr{A}\}$ (соответственно $\operatorname{dc} A = \inf\{n\colon H^{n+1}(A, X) = 0$ для всех $X \in \mathscr{A}^2\}$). (Определение групп когомологий банаховых алгебр см., например, в [3], [4].) Известно, что $\operatorname{dg} A \leqslant \operatorname{dc} A = \operatorname{dh}^2 A^+$. Банахова алгебра A называется *бипроективной*, если A является проективным банаховым A-бимодулем, т. е. если $\operatorname{dh}^2 A = 0$. Как легко показать (ср. [1]), независимо от наличия в A единицы бипроективность банаховой алгебры A равносильна существованию в категории $\mathscr{A}^2$ такого морфизма $\rho\colon A \to A \mathbin{\widehat{\otimes}} A$, что $\pi\rho = 1_A$. (Здесь $\widehat{\otimes}$ — знак проективного тензорного произведения банаховых пространств (см. [5]), $A \mathbin{\widehat{\otimes}} A$ — банахов A-бимодуль с внешними операциями, определенными формулами $a \cdot (b \otimes c) = ab \otimes c$, $(b \otimes c) \cdot a = b \otimes ca$, а $\pi\colon A \mathbin{\widehat{\otimes}} A \to A$ определяется формулой $\pi(a \otimes b) = ab$.) Напомним [6], что, по определению, банахово пространство E имеет *свойство аппроксимации* (коротко $A.\,P.$), если всякий компактный оператор из любого банахова пространства в E можно аппроксимировать операторами конечного ранга. Будем говорить, что банахова алгебра (банахов A-модуль) имеет $A.\,P.$, если она (он) имеет $A.\,P.$ как банахово пространство.

Пусть (E, F) — дуальная пара банаховых пространств, т. е. пара банаховых пространств, связанная невырожденной непрерывной билинейной формой (x, y), $x \in E$, $y \in F$. На базе банахова пространства $E \mathbin{\widehat{\otimes}} F$ можно построить банахову алгебру, если умножение определить формулой

$$(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = (x_2, y_1)\, x_1 \otimes y_2.$$

Эту банахову алгебру будем также обозначать через $E \mathbin{\widehat{\otimes}} F$ и называть *алгеброй, порожденной двойственностью* (x, y).

Предложение 1. *Банахова алгебра $E \mathbin{\widehat{\otimes}} F$ бипроективна.*

Заметим, что если E имеет $A.\,P.$, то банахова алгебра $E \mathbin{\widehat{\otimes}} F$ может быть представлена как неприводимая алгебра ядерных операторов пространства E.

Теорема 1. *Пусть A — бипроективная полупростая банахова алгебра, имеющая $A.\,P.$ и такая, что каждый простой (в алгебраическом смысле) A-модуль $X \in \mathscr{A}$ может быть непрерывно вложен как плотный подмодуль в некоторый $Y \in \mathscr{A}$, имеющий $A.\,P.$ Тогда банахова алгебра A есть замыкание прямой суммы всех своих минимальных замкнутых двусторонних идеалов I_α, $\alpha \in \Lambda$, которые являются топологически простыми бипроективными банаховыми алгебрами, причем для каждого $\alpha \in \Lambda$ с точностью до изоморфизма банаховых алгебр $I_\alpha = E_\alpha \mathbin{\widehat{\otimes}} F_\alpha$, где (E_α, F_α) — некоторая дуальная пара банаховых пространств. Кроме того, для каждого $\alpha \in \Lambda$ существует такой примитивный идеал P_α алгебры A, что $A = I_\alpha \oplus P_\alpha$.*

Т е о р е м а 2. *Пусть E — банахово пространство, имеющее А. Р. Пусть, далее, A — банахова алгебра непрерывных операторов пространства E, являющаяся пополнением множества всех конечномерных непрерывных операторов этого пространства по некоторой норме $\|\cdot\|$, причем $\|\cdot\| \geqslant \|\cdot\|_0$, где $\|\cdot\|_0$ — обычная норма оператора. Тогда A бипроективна в том и только в том случае, когда с точностью до изоморфизма банаховых алгебр $A = N(E)$, где $N(E)$ — банахова алгебра всех ядерных операторов пространства E.*

При доказательстве теоремы 2 по морфизму $\rho\colon A \to A \hat{\otimes} A$ строится некоторый функционал на A, позднее оказывающийся следом.

Т е о р е м а 3. *Пусть банахова алгебра A удовлетворяет условиям теоремы 1 и обладает левой ограниченной аппроксимативной единицей. Тогда ее спектр* $\mathrm{Prim}(A)$ *дискретен, а все неприводимые представления (т. е. простые A-модули) конечномерны.*

Т е о р е м а 4. *C^*-алгебра A бипроективна тогда и только тогда, когда ее спектр* $\mathrm{Prim}(A)$ *дискретен, а все неприводимые представления конечномерны.*

Достаточность теоремы 3 доказана А. Я. Хелемским в работе [1], а необходимость — автором.

Т е о р е м а 5. *Пусть A — бесконечномерная бипроективная полупростая банахова алгебра, имеющая А. Р. и такая, что каждый простой левый или правый A-модуль X имеет как банахово пространство базис. Тогда* $\mathrm{dg}\, A = \mathrm{dc}\, A = 2$ *и, кроме того,* $H^2(A, A \hat{\otimes} A) \neq 0$.

С л е д с т в и е 1. *Пусть банахова алгебра A удовлетворяет условиям теоремы 5. Тогда существует сингулярное расширение банаховой алгебры A с ядром $A \hat{\otimes} A$, которое не является расщепимым.*

Оценка $\mathrm{dc}\, A \leqslant 2$ для бипроективной банаховой алгебры A и оценка $\mathrm{dg}\, A \geqslant 2$ для бесконечномерной коммутативной полупростой банаховой алгебры A даны в [2]. Доказательство теоремы 5 использует некоторые идеи работы [2], теорему 1, теорему о сведении теоремы 5 к случаю бесконечномерной фактор-алгебры и обобщение методов, использованных в теореме 3 работы [7]. Заметим, что требование полупростоты в теореме 5 существенно (см. [7], теорема 1). Можно показать, что в чисто алгебраическом случае глобальная размерность бипроективной полупростой комплексной алгебры равна либо единице, либо нулю.

Т е о р е м а 6. *Пусть A — бипроективная коммутативная полупростая банахова алгебра, имеющая А. Р. Тогда для любого A-бимодуля X такого, что $a \cdot x = x \cdot a$ при всех $a \in A$ и $x \in X$, $H^n(A, X) = 0$ при $n > 0$.*

С л е д с т в и е 2. *Любое коммутативное сингулярное расширение бипроективной функциональной банаховой алгебры, имеющей А. Р., расщепимо.*

Московский государственный
университет

Поступило в редакцию
4 февраля 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Х е л е м с к и й А. Я., Матем. сб. **87** (1972), 122—135. **2.** Х е л е м с к и й А. Я., Функц. анализ **6**, вып. 2 (1972), 95—96. **3.** Х е л е м с к и й А. Я., Матем. сб. **81** (1970), 430—444. **4.** K a m o w i t z H., Trans. Amer. Math. Soc. **102**, (1962), 352—372. **5.** G r o t h e n d i e c k A., Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955). **6.** E n f l o P., Acta Math. **130**, № 3—4 (1973), 309—317. **7.** С е л и в а н о в Ю. В., Вестник МГУ, матем., механ. **1** (1975), 37—42.