В.А.Гриценко

# АРИФМЕТИКА КВАТЕРНИОНОВ И РЯДЫ ЭЙЗЕНШТЕЙНА

В этой статье будут вычислены коэффициенты Фурье ряда Эйзенштейна специальной ортогональной группы $SO(1,4)$. Ряд такого типа был получен автором в [3] как ядро интегрального представления дзета-функции шестой степени модулярной формы Эрмита рода 2 (группа $SU(2,2)$ над $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ ).

Коэффициенты Фурье ряда Эйзенштейна группы $SO(1,4)$ нумеруются векторами трехмерной решетки, которую можно рассматривать как решетку в кольце кватернионов. Вычисление коэффициентов Фурье сводится в этой интерпретации к вычислению кватернионных гауссовых сумм. Оказывается, что арифметическая часть коэффициента с номером $m$ совпадает в основном со значением $L$-ряда Дирихле с квадратичным характером поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-|m|})$ ( $m$-чистый кватернион). Полученные результаты показывают, что ряд Эйзенштейна группы $SO(1,4)$ тесно связан с задачей о представлении чисел суммой трех квадратов.

Отметим также, что следствием из вычисления коэффициентов Фурье, является теорема о голоморфной продолжимости ряда Эйзенштейна группы $SO(1,4)$ на всю комплексную плоскость. Другое доказательство подобной теоремы, использующее неопределенные тета-ряды, получено в [3]. Общие результаты такого типа для симметрических пространств ранга I изложены в [2].

Опишем группу $SO(1,4)$ (точнее, её универсальную накрывающую) как группу матриц второго порядка над телом кватернионов.

Пусть $\mathbb{H}$ - тело гамильтоновых кватернионов и $\tau$ - инволюция первого рода

$$\tau: a+bi+cj+dk \longrightarrow a-bi+cj+dk.$$

Рассмотрим группу, сохраняющую косоэрмитову форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$S_{\mathbb{H}}^{\tau}=\left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{H});\ \begin{pmatrix} \alpha^{\tau} & \gamma^{\tau} \\ \beta^{\tau} & \delta^{\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Группа $S_{\mathbb{H}}^{\tau}$ действует на полупространстве

$$\mathbb{H}^{+}=\{\, w = x+yi+zj+tk\ ;\ y>0 \,\},$$

как группа дробно-линейных преобразований

$$\sigma: w \to \sigma\langle w\rangle = (\alpha w+\beta)(\gamma w+\delta)^{-1} \quad \left(\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in S_{\mathbb{H}}^{\tau}, \quad w \in \mathbb{H}^{+}\right).$$

Легко проверить, что $y(\sigma\langle w\rangle) = y\,|\gamma w+\delta|^{-1}$, где

$$|w| = x^2+y^2+z^2+t^2$$

– кватернионная норма, и что

$$\Delta(\sigma, w) = |\gamma w+\delta| \qquad \left(\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right)$$

является фактором автоморфности.

Обозначим через $\mathcal{O}$ – максимальный порядок целых кватернионов

$$\mathcal{O} = \left\{\frac{a+bi+cj+dk}{2};\ a\equiv b\equiv c\equiv d \,(\mathrm{mod}\, 2),\ \ a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Группа

$$\Gamma = S_{\mathbb{H}}^{\tau} \cap M_2(\mathcal{O})$$

является арифметической подгруппой группы $S_{\mathbb{H}}^{\tau}$ с фактор-пространством конечного объема.

$$\Gamma_{\infty} = \left\{\begin{pmatrix} \pm 1 & \beta \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \beta^{\tau} \in \mathcal{O}\right\}$$

– параболическая подгруппа группы $\Gamma$. Определим ряд Эйзенштейна группы $\Gamma$

$$E(w, s) = y^{s} \sum_{\sigma \in \Gamma_{\infty}\backslash\Gamma} \Delta(\sigma, w)^{-s} \qquad (w \in \mathbb{H}^{+}).$$

ТЕОРЕМА. Функция

$$E^{*}(w, s) = \pi^{-\frac{3s}{2}+1}\,\Gamma\!\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma(s)\,\zeta(s)\,\zeta(2s-2)\,(2^{s}-2^{2-s})\,E(w, s)$$

может быть продолжена до функции мероморфной на всей комплексной $s$-плоскости. Она голоморфна всюду, исключая простые полюса в точках $s = 0, 3$, и удовлетворяет функциональному уравнению

$$E^{*}(w, s) = E^{*}(w, 3-s).$$

Для доказательства теоремы вычислим коэффициенты Фурье ряда $E$. Отметим, что в [3] было получено интегральное представление ряда $E$ через ряд Эйзенштейна для группы $SL_2(\mathbb{Z})$, что дает другое доказательство несколько более слабого варианта теоремы (см. лемму 3.2 [3] ).

Перейдем от ряда $E(w,s)$ к ряду $H(w,s)$, в котором суммирование ведется по парам кватернионов. С этой целью домножим $E$ на дзета-функцию порядка $\mathcal{O}$

$$H(w,s) = 2(1-2^{1-s})\zeta(s)\zeta(s-1)\,E(w,s) = y^s \sum_{\substack{c,d\in\mathcal{O}\\ cd^\tau = dc^\tau}} |cw+d|^{-s}.$$

Тогда в области абсолютной сходимости

$$H(w,s) = y^s\Big(\sum_{\substack{d\in\mathcal{O}\\ d\neq 0}} |d|^{-s} + \sum_{\substack{c\in\mathcal{O}\,(c\neq 0)\\ cd^\tau = dc^\tau\\ c^{-1}d \bmod \mathcal{O}}} |c|^{-s} \sum_{\ell=\ell^\tau\in\mathcal{O}} |w+c^{-1}d+\ell|^{-s}\Big).$$

Применяя к ряду $\Sigma_\ell$ формулу суммирования Пуассона, получаем

$$B(w,s) = y^s \sum_{\ell\in\mathcal{O}^\tau} |w+\ell|^{-s} = \sum_{m\in\mathcal{O}^\tau} a_m(y,s)\exp(2\pi i(m_1x+m_2z+m_3t)),$$

где

$$m = m_1 + m_2 j + m_3 k \in \mathcal{O}^\tau = \{\ell\in\mathcal{O} : \ell = \ell^\tau\},$$

$$a_m(y,s) = y^s \int\!\!\int\!\!\int_{\mathbb{R}^3} |w|^{-s}\exp(-2\pi i(m_1x+m_2z+m_3t))\,dx\,dz\,dt.$$

Отметим, что

$$m_1x + m_2z + m_3t = \mathrm{Re}(\bar m\, w),$$

где черта обозначает кватернионное сопряжение, а $\mathrm{Re}$ – вещественная часть кватерниона, поэтому

$$H(w,s) = y^s \sum_{\substack{d\in\mathcal{O}\\ d\neq 0}} |d|^{-s} + \sum_{m\in\mathcal{O}^\tau} a_m(y,s)\, b_m(s)\exp(2\pi i\,\mathrm{Re}(\bar m w)), \tag{I}$$

где

$$b_m(s)=\sum_{\substack{c\in\mathcal{O},\ c\neq 0\\ cd^{\tau}=dc^{\tau},\ d \bmod c}} |c|^{-s}\exp(2\pi i\,\mathrm{Re}(\bar m c^{-1}d)) .$$

Коэффициенты $a_m(y,s)$ легко выразить через гипергеометрическую функцию

$$h(y,s,s)=\int_0^{\infty}(u+1)^{s-1}u^{s-1}\exp(-yu)\,du .$$

Приведем конечный результат

$$a_m(y,s)=\begin{cases} y\pi^{s}|m|^{\frac{s-2}{2}}\exp(-2\pi y\sqrt{|m|})\dfrac{(4\pi y\sqrt{|m|})^{s-1}}{\Gamma(s-1)}\,h(4\pi y\sqrt{|m|},s-1,s-1) & (m\neq 0)\\ \pi^{3/2}y^{3-s}\,\Gamma(s-\frac{3}{2})\Gamma(s)^{-1} & (m=0) . \end{cases}$$

Напомним, что функция

$$\alpha(y,s)=y^{s}\Gamma(s)^{-1}h(y,s,s) \tag{2}$$

может быть продолжена до функции голоморфной на всей $s$-плоскости, которая инварианта относительно замены $s\to 1-s$ (см., например, [5] леммы 2 и 4). Это решает вопрос об аналитическом продолжении коэффициента $a_m(y,s)$ на всю $s$-плоскость.

Для вычисления коэффициента $b_m(s)$ необходимо изучить свойства гауссовых сумм

$$G_{m,c}=\sum_{\substack{d\in\mathcal{O}\\ cd^{\tau}=dc^{\tau},\ d \bmod c}}\exp(2\pi i\,\mathrm{Re}(mc^{-1}d)) . \tag{3}$$

для целого $\tau$-симметричного кватерниона $m$ и целого кватерниона $c$.

Напомним, что целый кватернион называется примитивным, если он не имеет целого рационального делителя, отличного от $\pm 1$.

Пусть $L=ai+bj+ck$ – чистый целый кватернион и $|L|=a^2+b^2+c^2$ – его норма. Обозначим через

$$D(L)$$

дискриминант мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-|L|})$. Выделим в кватернионе $m$ целый рациональный делитель

$$m = m_g \cdot m_{np},$$

где $m_g \in \mathbb{Z}$ , а $m_{np}$ – примитивный кватернион, и обозначим через $\mu_p$ и $\nu_p$

$$\mu_p = ord_p m_g \quad , \quad \nu_p = ord_p |m_{np}| \tag{4}$$

степени рационального простого $p$ , входящие в делитель $m_g$ и в норму $m_{np}$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $m \in \mathcal{O}^{\tau}$ и $m \neq 0$ . Тогда

$$2^s(1+2^{1-s})\pi^{-\frac{3s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma(s)\frac{\zeta(2s-2)}{\zeta(s-1)}a_m(s,y)b_m(s) =$$

$$=24y|m|^{-1}\pi^{-\frac{s}{2}}|D(m)|^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)L\left(s-1,\left(\frac{D(m)}{\cdot}\right)\right)\alpha(4\pi y\sqrt{|m|},s-1)e(-2\pi y\sqrt{|m|})\cdot$$

$$\cdot\beta_m^{(2)}(s)\prod_{\substack{p\,|\,|m|\\ p\neq 2}}\left(\beta_m^{(p)}(s)+\beta_m^{(p)}(3-s)\right),$$

где $\left(\frac{D(m)}{\cdot}\right)$ – квадратичный характер поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-|m|})$ , функция $\alpha$ определена в (2) и

$$\beta_m^{(p)}(s)=\frac{p^{s\mu_p+s\left[\frac{\nu_p}{2}\right]}\sigma_{2-s}(p^{\mu_p})\left(1-\left(\frac{D(m)}{p}\right)\cdot p^{1-s}\right)}{(1-p^{3-2s})},$$

$$\beta_m^{(2)}(s)=\begin{cases}2^{\mu_2 s+2}\sigma_{3-2s}(2^{\mu_2})(1+2^{s-2})(1+2^{1-s}), & D(m)\equiv 5(8)\\[2ex] 2^{\mu_2 s}\left(\sigma_{3-2s}(2^{\mu_2})+2^{2-s}\sigma_{3-2s}(2^{\mu_2-1})\right), & D(m)\equiv 0,4(8).\end{cases} \tag{8}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Выражение, стоящее в правой части равенства для

$a_m(s)\ b_m(s)$, продолжается до функции голоморфной на $s$ - плоскости, которая инварианта относительно замены $s \to 3-s$.

Доказательство предложения опирается на свойства сумм (3).

ЛЕММА I. Пусть $m \in \mathcal{O}^\tau$, $c \in \mathcal{O}$, $m,\ c \neq 0$. Тогда

I. $G_{m,c} = G_{m,c\varepsilon}$, если $\varepsilon$-единица порядка $\mathcal{O}$;

2. Если $G_{m,c} \neq 0$, то $c\,i m c^{-1} \in \mathcal{O}$;

3. Если $c_1, c_2$ - примитивные и ЛНОД $(\bar{c}_1, c_2) = 1$, то

$$G_{m,c_1 c_2} = G_{m,c_2}\, G_{-i(c_2 i m c_2^{-1}),c_1};$$

4. Если $c$ - примитивный, а $\ell \in \mathbb{Z}$, то

$$G_{m,\ell c} = \begin{cases} \ell^3 G_{m\ell^{-1},c}, & \text{если } m\ell^{-1} \in \mathcal{O}, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

5. Если $c$ - примитивный кватернион нечетной нормы, то

$$G_{m,c} = \begin{cases} |c|, & \text{если } c\,i m c^{-1} \in \mathcal{O}, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

6.

$$G_{m,1+i} = \begin{cases} 4, & \text{если } |m| \equiv 0,3 \pmod 4) \\ 0, & \text{если } |m| \equiv 1,2 \pmod 4). \end{cases}$$

Для доказательства леммы нужно использовать стандартные рассуждения из теории гауссовых сумм и свойства целых кватернионов. В частности, из теоремы Линника о лучах (см. [4], теорема II) следует, что любое $d \in \mathcal{O}$, со свойством $cd^\tau = dc^\tau$ имеет вид $\ell\rho + cx$, где $\ell \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{O}^\tau$, а $\rho$ - произвольный целый кватернион такой, что $(|\rho|, |c|) = 1$ и $c\rho^\tau = \rho c^\tau$ (такой кватернион существует). Отметим также, что если $m \in \mathcal{O}^\tau$, то $im$ - чистый кватернион, а $im \longrightarrow c\,i m c^{-1}$ - действие на пространстве чистых кватернионов.

Исследуем теперь следующие суммы

$$b_m^{(p)}(s) = \sum_{\substack{(c) \subset \mathcal{O} \\ |c| \mid p^\infty}} |c|^{-s} G_{m,s},$$

где суммирование ведется по всем неассоциированным целым $c$, норма которых равна степени рационального простого $p$.

ЛЕММА 2. Если нечетное $p$ взаимно просто с нормой $m$, то

$$b_m^{(p)}(s) = \frac{1+\left(\frac{D(m)}{p}\right)p^{1-s}}{1-p^{1-s}} \quad .$$

Для доказательства этой леммы нужно воспользоваться следующим хорошо известным фактом: если $L$ – чистный целый кватернион и $(p,|L|)=1$, то существуют ровно $1+\left(\frac{-|L|}{p}\right)$ неассоциированных примитивных кватернионов нормы $p$ · таких, что $\rho L \rho^{-1} \in \mathcal{O}$ (см. [I], стр.19).

ЛЕММА 3. Пусть $p$ – нечетное простое число, делящее норму квартерниона $m \in \mathcal{O}^{\tau}$, тогда число неассоциированных целых примитивных кватернионов $c$ нормы $p^n$ таких, что $c\,i m c^{-1} \in \mathcal{O}$, равно

$$\begin{cases} (p+1)p^{n-1} & \text{, если } 1 \le n \le \mu_p, \\ p^{\mu_p+\left[\frac{n-\mu_p}{2}\right]} & \text{, если } \mu_p < n \le \mu_p + \nu_p, \\ \left(1+\left(\frac{D(m)}{p}\right)\right)p^{\mu_p+\frac{\nu_p}{2}} & \text{, если } \mu_p+\nu_p < n, \quad \nu_p \text{ четно}, \\ 0 & \text{, если } \mu_p+\nu_p < n, \quad \nu_p \text{ нечетно} \end{cases}$$

(определение чисел $\mu_p$ и $\nu_p$ дано в (4)).

Если $p$ делит норму $m$, то

$$b_m^{(p)}(s) = \sum_{0 \le d \le \mu_p} p^{d(3-2s)} \sum_{\substack{(c)\subset \mathcal{O},\, |c|\,|\,p^{\infty}, \\ c \text{ примитивно}}} G_{mp^{-d},\,c} |c|^{-s} \quad .$$

Лемма 3 приводит нас к следующему утверждению

ЛЕММА 4. Пусть нечетное простое $p$ делит норму $|m|$ $(m \ne 0)$, тогда

$$b_m^{(p)}(s) \cdot p^{-(\mu_p+\left[\frac{\nu_p}{2}\right])s} \frac{(1+p^{1-s})}{\left(1-\left(\frac{D(m)}{p}\right)p^{1-s}\right)} \left(\beta_m^{(p)}(s)+\beta_m^{(p)}(3-s)\right),$$

где $[\ ]$ - целая часть числа, а $\beta_m^{(p)}(s)$ - многочлены, введенные в предложении.

ЛЕММА 5. Пусть $m \in \mathcal{O}^\tau$ и $m \neq 0$. Тогда

$$b_m^{(2)}(s) = \sum_{\varepsilon=0,1} \sum_{0\le d\le \mu_2} G_{m2^{-d},(1+i)^\varepsilon}\, 2^{d(3-2s)-\varepsilon s} =$$

$$= \begin{cases} 2^{-(\mu_2+1)s}\beta_2(s)(1+2^{1-s})^{-1}, & \text{если} \quad D(m) \equiv 5 \pmod 8, \\ 2^{-\mu_2 s}\beta_2(s), & \text{если} \quad D(m) \equiv 0,4 \pmod 8. \end{cases}$$

Из лемм 2, 4, 5 следует, что суммы $b_m^{(p)}(s)$ зависят лишь от показателей $\mu_p$ и $\nu_p$, с которыми число $p$ входит в делитель и в норму примитивной части кватерниона $m$ (см.(4)), а не от самого $m$, поэтому

$$b_m(s) = 24 \prod_p b_m^{(p)}(s)$$

в силу пунктов I и 3 леммы I.. Утверждение предложения о явном виде $a_m(y,s)\, b_m(s)$ непосредственно следует из лемм 2, 5 и 6.

Осталось найти свободный член в разложении Фурье (I) ряда $H(w,s)$.

$$b_0(s) = \sum_{\substack{c\in\mathcal{O} \\ c\neq 0}} G_{0,c}|c|^{-s} = 24(1+2^{2-s}) \sum_{l>0} l^{3-2s}.$$

$$\sum_{\substack{(c)\subset\mathcal{O} \\ c \text{ -примитивный} \\ |c| \text{ -нечетна}}} |c|^{1-s} = 24\,\frac{1-2^{4-2s}}{1+2^{1-s}}\;\frac{\zeta(2s-3)\zeta(s-1)\zeta(s-2)}{\zeta(2s-2)}.$$

Следовательно,

$$2^s(1+2^{1-s})\pi^{-\frac{3s}{2}+1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma(s)\frac{\zeta(2s-2)}{\zeta(s-1)}\left(\sum_{d\in\mathcal{O}}|d|^{-s} + a_0(s)\,b_0(s)\right) =$$

$$= y^{3-s}(s-2)\xi(2s-3)\xi(s-2)(2^{s-1}-2^{3-s}) + y^s(s-1)\xi(2s-2)\xi(s)(2^s-2^{2-s}),$$

где

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Свободный член имеет полюсы первого порядка в точках 0, 3 и инвариантен относительно замены $s \to 3-s$ .

Мы доказали, что

$$2^{s}(1+2^{1-s})\pi^{-\frac{3s}{2}} \Gamma(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{\zeta(2s-2)}{\zeta(s-1)} H(w,s)$$

продолжается до функции, аналитической на всей $s$-плоскости. Для завершения доказательства теоремы нужно перейти от ряда $H$ к ряду $E$ .

## Литература


I. В е н к о в Б.А. Избранные труды. Исследования по теории чисел. Л., I98I. 446 с.

2. В е н к о в А.Б. Спектральная теория автоморфных функций. - Тр.Мат.ин-та, I98I, т.I53, с.3-I7I.

3. Г р и ц е н к о В.А. Дзета-функция шестой степени для эрмитовых модулярных форм рода 2. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 7. Зап.научн.семин.ЛОМИ, I986, т.I54, с.46-66.

4. Л и н н и к Ю.В. Кватернионы и числа Кэли; некоторые приложения арифметики кватернионов. - Успехи мат.наук, I949, т.4, № 5, с.49-98.

5. S h i m u r a G. On the holomorphy of certain Dirichlet series. - Proc.London Math. Soc., 1975, vol.31, N 1, p.79-98.