Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. И. Крылов, М. Л. Расулов, «Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений»,
Дифференц. уравнения, 1965, том 1, номер 8, 1117–1124

https://www.mathnet.ru/de8722

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.170
14 декабря 2025 г., 07:38:12

АВГУСТ 1965, ТОМ I, № 8

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

М. Л. Расулов.

«Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений». Изд-во Физматгиз, 1964

Как известно, применение метода Фурье к решению смешанных задач с разделяющимися переменными t и $\mathbf{x}$ вида

$$M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + f(x, t),$$
$$L_\nu(u) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{1}$$
$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \Phi_\nu(x) \quad (k = 0, 1, \ldots, q-1)$$

приводит к проблеме разложения функций в ряд по собственным функциям соответствующей граничной задачи с параметром (спектральной задачи):

$$L\left(x, \frac{d}{dx}\right) v - \lambda^m v = h(x), \; L_\nu(v) = 0 \quad \text{на} \quad \mathbf{\Gamma}, \tag{2}$$

где $M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ — линейное дифференциальное выражение по t порядка q, $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — линейное дифференциальное выражение порядка m по точке x некоторой n-мерной, ограниченной области D с границей $\mathbf{\Gamma}$.

Когда задача (2) является не самосопряженной, вопрос о существовании и полноте системы собственных и присоединенных функций, вообще говоря, исследован недостаточно. Более того, для этой системы ортогональность может не иметь места и возникает необходимость разработки точного метода решения смешанной задачи (1).

Коши впервые указал применение интегрального вычета к решению одномерных смешанных задач вида (1) с разделяющимися переменными для уравнений с постоянными коэффициентами.

Основной недостаток вычетного метода Коши заключается в неудачном выборе соответствующей спектральной задачи, в результате чего в основу вычетной схемы решения смешанной задачи кладется неудачная формула разложения произвольных достаточно гладких функций в ряд по вычетам. Ввиду этого вычетный метод Коши оказался неприменимым к решению смешанных задач для уравнений с переменными коэффициентами. Более того, не ясно, как его можно применять к решению смешанных задач с неразделяющимися переменными даже для уравнений с постоянными коэффициентами.

В связи с решением основных смешанных задач для уравнения теплопроводности Пуанкаре заметил справедливость следующей важной формулы разложения

$$h(x) = -\varepsilon_\lambda \lambda^{m-1} \int_D G(x, \xi, \lambda)\, h(\xi)\, dD_\xi \quad , \tag{3}$$

где $G(x, \xi, \lambda)$ — функция Грина задачи (2) для частного случая, когда $L\left(x, \frac{\partial}{dx}\right)$ есть оператор Лапласа, а ε_λ — обозначает полный вычет по λ.

Формула (3), с одной стороны, выражает факт полноты системы вычетов решения соответствующей спектральной задачи вида (2), с другой стороны, дает возможность вычислить коэффициенты разложения, если построена функция Грина и найдены ее полюсы.

В случае, когда $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — обыкновенное линейное дифференциальное выражение, рассматриваемое на конечном интервале $[a, b]$, а L_ν — линейные формы относительно производных $v(a), \ldots, v^{(m-1)}(a)$, $v(b), \ldots, v^{(m-1)}(b)$ (не зависящие от λ), справедливость формулы (3) доказана Биркгофом в 1908 г. В этой же работе, в случае простых полюсов функции Грина, Биркгоф доказал биортогональность систем собственных функций одномерной спектральной задачи вида (2) и задачи ей сопряженной. Тем самым он обосновал применимость схемы метода Фурье к решению соответствующей одномерной смешанной задачи вида (1) в том случае, когда функция Грина соответствующей задачи (2) не имеет кратных полюсов.

Позднее справедливость формулы (3) была доказана Я. Д. Тамаркиным в одномерной задаче вида (2) для случая, когда в дифференциальном выражении $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ коэффициент производной порядка $m-k$ является многочленом степени k, а коэффициенты линейных форм L_ν являются многочленами степеней не больших m.

Следует сказать, что после описанных выше работ Коши, Пуанкаре, Биркгофа и Тамаркина, при изучении смешанных задач в первую очередь необходимо было остановиться на выяснении следующих вопросов.

1) Представимость достаточно гладкого решения смешанной задачи вида (1) для уравнений с переменными коэффициентами в виде интегрального вычета в случае, когда задача (2) не самосопряжена и имеет кратный спектр.

2) Представимость достаточно гладкого решения смешанной задачи для систем уравнений с переменными коэффициентами (вообще говоря разрывными) с неразделяющимися переменными (здесь уравнения, вообще говоря, могут содержать смешанные производные, а граничные условия производные по времени) в виде интегрального вычета.

3) Доказать существование решения рассматриваемых смешанных задач, исследовать условия их корректности. По мере возможности получить необходимые и достаточные условия разрешимости этих задач.

Рецензируемая книга М. Л. Расулова посвящена систематическому изложению двух методов автора — вычетного метода и метода контурного интеграла, а также применению этих методов к исследованию вышеперечисленных проблем 1)—3).

Книга состоит из введения и двух частей:

1. Вычетный метод.
2. Метод контурного интеграла.

Во введении дается обзор результатов других авторов, связанных с результатами автора, изложенными в книге, а также обзор результатов автора, изложенных в книге по параграфам.

Первая часть книги состоит из пяти глав.

В первых двух главах излагаются результаты Я. Д. Тамаркина об асимптотическом представлении решений обыкновенных линейных уравнений, зависящих от комплексного параметра, используемые автором в последующих главах. Третья глава посвящена доказательству справедливости основных формул разложения.

В § 1 гл. III рассматривается спектральная задача для систем уравнений с разрывными коэффициентами:

$$\frac{dy^{(i)}}{dx} - a^{(i)}(x, \lambda)\, y^{(i)} = f^{(i)}(x), \quad x \in (a_i, b_i), \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \{\alpha^{(i)}(\lambda) y^{(i)}(a_i, \lambda) + \beta^{(i)}(\lambda)\, y^{(i)}(b_i, \lambda)\} = 0, \tag{5}$$

где

$$a^{(i)}(x, \lambda) = \lambda\, a^{(i)}(x) + \sum_{\nu=0}^{Q} \lambda^{-\nu}\, a_\nu^{(i)}(x), \tag{6}$$

а $a^{(i)}(x)$, $a_\nu^{(i)}(x)$ — квадратные матрицы порядка r, $\alpha^{(i)}(\lambda)$, $\beta^{(i)}(\lambda)$ — матрицы многочленов от λ, размеров $nr \times r$, (a_i, b_i) — взаимно не налегающие интервалы, имеющие общие концы.

Доказывается, что *если* $a^{(i)}(x)$, $a_\nu^{(i)}(x)$ — *достаточно гладкие на интервале* $[a_i, b_i]$, *условие (5) регулярно и корни характеристического уравнения*

$$\det(a^{(i)}(x) - \theta E) = 0$$

простые, а аргументы этих корней и их разностей не зависят от x, *то существует последовательность расширяющихся замкнутых контуров* Γ_ν, *таких, что*

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{\nu\to\infty} \int_{\Gamma_\nu} y^{(i)}(x, \lambda, f)\, d\lambda = (a^{(i)}(x))^{-1} f^{(i)}(x), \tag{7}$$

для всякой вектор-функции $f^{(i)}(x) \in L_2(a_i, b_i)$, *причем сходимость понимается в смысле метрики* $L_2(a_i, b_i)$ (см. теорему 8 на стр. 136).

Кроме этого, в § 1 гл. III доказывается теорема об асимптотическом представлении нулей характеристического определителя матрицы Грина задачи (4), (5) и об оценке снизу этого определителя вне некоторой окрестности полюсов (см. теорему 7 на стр. 112). В частности, при $n=1$, если коэффициенты системы (4) не содержат отрицательных степеней λ, $a^{(i)}(x)=1$ и граничное условие (5) не зависит от параметра λ, справедливость формулы (7) была установлена в совместной работе Биркгофа и Лангера. В этом случае левая часть (7) совпадает с рядом вычетов и получается разложение вектор-функции $f^{(i)}(x)$ в ряд по собственным и присоединенным функциям соответствующей задачи (4), (5).

При аналогичных условиях с помощью формулы (7) в § 2 гл. III доказана (см. теорему 9) справедливость формулы

$$\Phi_k^{(i)}(x) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_\nu \int_{C_\nu} \lambda^{m-1} v_k(x, \lambda, \Phi)\, d\lambda, \quad (k = 0, \dots q-1) \tag{8}$$

в смысле метрики $L_2(a_i, b_i)$, где C_ν — простой замкнутый контур, окружающий только один полюс λ_ν подинтегральной функции и сумма по ν распространена на все полюсы, $v_k^{(i)}(x, \lambda, \Phi)$ $(i = 1, \dots, n)$ есть решение спектральной задачи

$$v_{k+1}^{(i)} - \lambda^m v_k^{(i)} = \Phi_k^{(i)}(x) \quad (k = 0, \dots, q-2),$$

$$\sum_{\substack{mk+l\leqslant p\\ k\leqslant q-1}} \lambda^{mk} A_{kl}^{(i)}(x) \frac{d^l v_k^{(i)}}{dx^l} - \lambda^m v_{q-1}^{(i)} = \Phi_{q-1}^{(i)}(x) \tag{9}$$

$$\text{при } x \in (a_i, b_i), \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{l\leqslant p-1\\ k\leqslant q}} \lambda^{mk} \left\{ \alpha_{kl}^{(i)} \frac{d^l v_k^{(i)}}{dx^l}\Bigg|_{x=a_i} + \beta_{kl}^{(i)} \frac{d^l v_k^{(i)}}{dx^l}\Bigg|_{x=b_i} \right\} = 0, \tag{10}$$

p, q, m — натуральные числа, $p = mq$, $A_{kl}^{(i)}(x)$ — квадратная матрица порядка r, $\alpha_{kl}^{(i)}$, $\beta_{kl}^{(i)}$ — постоянные матрицы размеров $nrp \times r$.

Заметим, что (8) является основной формулой разложения. Она, с одной стороны, выражает факт q-кратной полноты системы собственных и присоединенных функций (в смысле М. В. Келдыша) задачи (9), (10), с другой стороны, дает возможность вычислить коэффициенты разложения.

Из этой формулы, в частности, при $\Phi_k(x) \equiv 0$ $(k=0, \dots, q-2)$ получается формула типа (3), обобщающая формулу Пуанкаре — Биркгофа на случай системы уравнений с разрывными коэффициентами, когда граничные условия задачи связывают производные искомой вектор-функции в точках разрыва коэффициентов (см. теорему 10).

Глава IV посвящена применению вычетного метода автора к решению в основном двух классов одномерных смешанных задач. При этом в § 1 гл. IV рассматривается следующая смешанная задача с неразделяющимися переменными x и t для системы уравнений с разрывными коэффициентами:

$$\frac{\partial^q u^{(i)}}{\partial t^q} = \sum_{\substack{mk+l\leqslant p\\ k\leqslant q}} A_{kl}^{(i)} x \frac{\partial^{k+l} u^{(i)}}{\partial t^k \partial x^l} + f^{(i)}(x, t) \tag{11}$$

$$\text{при} \quad x \in (a_i, b_i) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{l\leqslant p-1\\ k\leqslant q-1}} \left\{ \alpha_{kl}^{(i)} \frac{\partial^{k+l} u^{(i)}}{\partial t^k \partial x^l}\bigg|_{x=a_i} + \beta_{kl}^{(i)} \frac{\partial^{k+l} u^{(i)}}{\partial t^k \partial x^l}\bigg|_{x=b_i} \right\} = 0, \tag{12}$$

где

$$\frac{\partial^k u^{(i)}}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} = \Phi_k^{(i)}(x) \text{ при } x \in (a_i, b_i) \tag{13}$$

$$(k = 0, \ldots, q-1), \ (i = 1, \ldots, n),$$

где $A_{kl}^{(i)}(x)$, $\alpha_{kl}^{(i)}$, $\beta_{kl}^{(i)}$ имеют тот же смысл, что и в соответствующей спектральной задаче (9) — (10). В предложении справедливости формулы (8) доказывается представимость достаточно гладкого решения* задачи (11) — (13) в виде полного вычета некоторой мероморфной функции, определяемой по решению соответствующей спектральной задачи (см. теорему 11 на стр. 171).

В § 2 гл. IV доказывается, что если граничные условия (12) не содержат производных по времени, то вычетное представление достаточно гладкого решения задачи (11) — (13) может быть получено при помощи формулы разложения типа (3) — Пуанкаре — Биркгофа (см. теорему 12 на стр. 205).

В § 3 гл. IV рассматривается смешанная задача для системы вида

$$M_1\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) u^{(i)} = M_2\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) L^{(i)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{(i)} + f^{(i)}(x, t) \tag{14}$$

при граничном условии, не содержащем производных по времени, и с помощью формулы (8) доказывается представимость достаточно гладкого решения $u(i)(x, t)$ в виде полного вычета определенной мероморфной функции (см. теоремы 13, 14 на стр. 219, 223—224)

$$u^{(i)}(x, t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{\nu} \int_{C_\nu} d\lambda \sum_{j=1}^{n} \int_{a_j}^{b_j} G^{(i, j)}(x, \xi, \lambda) y^{(j)}(t, \xi, \lambda) d\lambda, \tag{15}$$

где $G^{(i, j)}(x, \xi, \lambda)$ есть матрица Грина соответствующей спектральной задачи для дифференциального выражения $L^{(i)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda$, $y^{(i)}(t, \xi, \lambda)$ — решение задачи Коши

$$M_1\left(t, \frac{d}{dt}\right) y^{(i)} - \lambda M_2\left(t, \frac{d}{dt}\right) y^{(i)} = f^{(i)}(\xi, t), \tag{16}$$

$$\frac{d^k y^{(i)}}{dt^k}\bigg|_{t=0} = \Phi_k^{(i)}(\xi). \tag{17}$$

Следует отметить, что из этих утверждений непосредственно следует единственность решений рассматриваемых в гл. IV смешанных задач в классе достаточно гладких функций в вышеуказанном смысле.

Глава V посвящена применению вычетного метода к решению многомерных задач.

В § 1 гл. V показывается, что в предположении основной формулы разложения (8) для соответствующей спектральной задачи, аналогичная вычетная формула имеет место также для многомерной смешанной задачи.

В § 2 гл. V дается вычетный метод разделения переменных, являющийся обобщением обычного метода разделения переменных в случае не ортогональных собственных функций. Для рассматриваемых смешанных задач с разделяющимися переменными доказывается представимость достаточно гладких решений в виде кратного интегрального вычета (см. теоремы 15, 16, 17 на стр. 232—233, 234, 238).

---

* Еще предполагается перестановочность матрицы Грина с операторами $M_i\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)$.

С помощью данного в § 2 вычетного метода разделения переменных в § 3 гл. V доказывается справедливость формулы (3) для многомерной спектральной задачи с разделяющимися переменными, в предложении справедливости формулы (3) для каждой из одномерных задач, получаемых разделением переменных (см. теоремы 18, 19 на стр. 240, 242).

§ 4 гл. V посвящена применению вычетного метода разделения переменных к смешанным задачам подземной гидромеханики и теории теплопроводности, решения которых отсутствуют в литературе.

Вторая часть книги (гл. VI—X) посвящена систематическому изложению метода контурного интеграла автора и его применению к исследованию одномерных и многомерных смешанных задач.

Шестая и седьмая главы посвящены применению этого метода к исследованию одномерных смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов с разрывными коэффициентами.

Главы IX и X посвящены применению метода контурного интеграла к исследованию многомерных смешанных задач для уравнений параболического типа.

В отличие от вычетного метода, метод контурного интеграла применим также к решению задач с непрерывным спектром и позволяет доказать существование решений рассматриваемых смешанных задач, представимых в виде контурного интеграла. Этим методом доказана корректность смешанных задач, рассматриваемых во второй части книги.

По сравнению с методом преобразования Лапласа он имеет следующее преимущество: он применим также к уравнениям, коэффициенты которых зависят от времени, и в случае смешанных задач для параболических уравнений легко поддается обоснованию благодаря большой быстроте сходимости контурных интегралов.

Наконец, комбинируя вычетный метод с методом контурного интеграла, удается указать необходимые и достаточные условия разрешимости задач, рассматриваемых во второй части книги.

В § 1 гл. VI ставится одномерная смешанная задача для уравнений второго порядка параболического типа с разрывными коэффициентами:

$$\frac{\partial v^{(i)}}{dt} = c_{02}^{(i)}(x)\frac{\partial^2 v^{(i)}}{\partial x^2} + c_{01}^{(i)}(x)\frac{\partial v^{(i)}}{\partial x} + c_{00}^{(i)}(x)v^{(i)} + f^{(i)}(x,\ t), \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\left\{\alpha_{slk}^{(i)}\frac{\partial^{l+k} v^{(i)}}{\partial t^k \partial x^l}\Big|_{x=a_i} + \beta_{slk}^{(i)}\frac{\partial^{k+l} u^{(i)}}{\partial t^k \partial x^l}\Big|_{x=b_j}\right\} = \gamma_s, \tag{19}$$

$$v^{(i)}(x,\ 0) = \Phi^{(i)}(x), \qquad x \in (a_i,\ b_i), \qquad (i = 1,\ \ldots,\ 2n), \tag{20}$$

где $\alpha_{slk}^{(i)}$, $\beta_{slk}^{(i)}$, γ_s — постоянные.

В § 2 гл. VI при условиях регулярности граничных условий и некоторой гладкости коэффициентов уравнений (21) на интервале $[a_i,\ b_i]$ дается асимптотическое представление решения спектральной задачи

$$c_{02}^{(i)}(x)\frac{d^2 y^{(i)}}{dx^2} + c_{01}^{(i)}(x)\frac{dy^{(i)}}{dx} + (c_{00}^{(i)}(x) - \lambda^2)\,y^{(i)} = \Phi^{(i)}(x) \tag{21}$$

$$\text{при} \quad x \in (a_i,\ b_i) \quad (i = 1,\ \ldots,\ n),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\left\{\alpha_{slk}^{(i)}\lambda^k\frac{d^l y^{(i)}}{dx^l}\Big|_{x=a_i} + \beta_{slk}^{(i)}\lambda^k\frac{d^l y^{(i)}}{dx^l}\Big|_{x=b_i}\right\} = \gamma_s \quad (s = 1,\ \ldots,\ 2n) \tag{22}$$

вне некоторой δ-окрестности спектра, причем предполагается, что аргументы ϑ-корней характеристического уравнения

$$c_{02}^{(i)}\vartheta^2 - 1 = 0 \tag{23}$$

не зависят от x (см. теоремы 21, 22, 23 на стр. 265, 270 и 278). Следует отметить, что полученные асимптотические представления решения задачи (21), (22) имеют не только вспомогательное значение. Ими можно пользоваться также при решении соответствующих задач без начальных условий.

При условиях § 2 гл. VI и условиях достаточной гладкости $f^{(i)}(x,\ t)$, $\Phi^{(i)}(x)$ при $x \in [a_i,\ b_i]$ в § 3 гл. VI доказывается, что если

$$-\frac{\pi}{2} < \arg c_{02}^{(i)}(x) < \frac{\pi}{2}, \tag{24}$$

то задача (18) — (20) имеет решение $v^{(i)}(x, t)$, представимое в виде контурного интеграла (см. теоремы 24, 25 на стр. 281, 287).

В этом же параграфе, при условии (24), доказывается корректность смешанной задачи (18)—(20) (см. теоремы 26, 27, 28 на стр. 313, 316).

Более того, в § 4 гл. VI доказывается, что если

$$\frac{\pi}{2} < \arg c_{02}^{(i)}(x) < \frac{3\pi}{2},$$

то задача (18)—(20) независимо от условий гладкости данных не может иметь решения (см. теорему 29 на стр. 319).

Пятый параграф гл. VI посвящен применению метода контурного интеграла к исследованию одномерных смешанных задач для уравнений 2-го порядка типа Ковалевской (уравнения содержат чистые производные второго порядка по x и по t):

$$\frac{\partial^2 v^{(i)}}{\partial t^2} - \sum_{\substack{k+l\leqslant 2\\ k\leqslant 1}} c_{kl}^{(i)}(x)\frac{\partial^{k+l} v^{(i)}}{\partial t^k \partial x^l} = f^{(i)}(x, t), \quad x\in(a_i, b_i) \quad (i=1, \ldots, n), \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{1}\left\{\alpha_{sl}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^l v^{(i)}}{\partial x^l}\Big|_{x=a_i} + \beta_{sl}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^l v^{(i)}}{\partial x^l}\Big|_{x=b_i}\right\} = 0, \tag{26}$$

$$(s=1, \ldots, 2n),$$

$$v^{(i)}(x, 0) = \Phi_0^{(i)}(x), \quad \frac{\partial v^{(i)}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \Phi_1^{(i)}(x), \tag{27}$$

$$x\in(a_i, b_i) \quad (i=1, \ldots, n),$$

где $\alpha_{sl}^{(i)}(z)$, $\beta_{sl}^{(i)}(z)$ — многочлены от z с постоянными коэффициентами.

В этом параграфе сначала получено более точное асимптотическое представление решения соответствующей спектральной задачи вне некоторой δ-окрестности спектра (см. теорему 30 на стр. 325—326).

С помощью полученного асимптотического представления решения спектральной задачи при некоторых условиях гладкости данных и регулярности граничных условий соответствующей спектральной задачи доказывается, что если аргументы θ-корней характеристических уравнений

$$c_{02}^{(i)}(x)\vartheta^2 + c_{11}^{(i)}(x)\vartheta - 1 = 0, \quad x\in[a_i, b_i] \quad (i=1, \ldots, n) \tag{28}$$

не зависят от x и если корни действительны, то задача (25)—(27) имеет единственное решение, представимое в виде контурного интеграла по комплексному параметру.

При решении смешанных задач для уравнений гиперболического типа в отличие от уравнений параболического типа выбираются замкнутые контуры.

Кроме того, доказывается, что при условиях теоремы 31 для существования решения смешанной задачи (25)—(27) действительность θ-корней характеристических уравнений (28) необходима, независимо от степени гладкости данных (см. теорему 32 на стр. 341).

В § 1 гл. VII получено подходящее асимптотическое представление для решения спектральной задачи

$$\begin{gathered}\sum_{\substack{mk+l\leqslant p\\ 0\leqslant k\leqslant q-1}} \lambda^{mk} A_{kl}^{(i)}(x)\frac{d^l y^{(i)}}{dx^l} - \lambda^{mq} y^{(i)} = F^{(i)}(x, \Phi, \lambda^m),\\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{k\leqslant q\\ l\leqslant mq-1}} \lambda^{mk}\left\{\alpha_{slk}^{(i)}\frac{d^l y^{(i)}}{dx^l}\Big|_{x=a_i} + \beta_{slk}^{(i)}\frac{d^l y^{(i)}}{dx^l}\Big|_{x=b_i}\right\} = \gamma_s\end{gathered} \tag{29}$$

вне δ-окрестности спектра, где m—натуральное число (см. теоремы 33, 34 на стр. 355, 369).

В § 2 гл. VII рассматривается смешанная задача

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial t} = \sum_{l=0}^{p} A_{0l}^{(i)}(x)\frac{\partial^l u^{(i)}}{\partial x^l} + f^{(i)}(x, t), \tag{30}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k<1 \\ l<p-1}} \left\{ \alpha_{skl}^{(i)} \frac{\partial^{k+l} u^{(i)}}{\partial t^k \partial x^l} \Big|_{x=a_i} + \beta_{skl}^{(i)} \frac{\partial^{k+l} u^{(i)}}{\partial t^k \partial x^l} \Big|_{x=b_i} \right\} = 0, \tag{31}$$

$$u^{(i)}(x, 0) = \Phi^{(i)}(x) \quad \text{при} \quad x \in (a_i, b_i) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{32}$$

Доказывается, что в условиях гладкости данных задачи и регулярности граничных условий (29) соответствующей спектральной задачи (при $m=p$, $q=1$),) если при отображении

$$\lambda^m = z \tag{33}$$

все лучи d_k $(k = 1, \ldots, 2\mu \leqslant 2p)$ комплексной λ-плоскости, определяемые уравнениями

$$\operatorname{Re} \lambda \varphi_j^{(i)}(x) = 0^*,$$

перейдут в лучи, лежащие в левой полуплоскости (и не совпадающие с мнимыми полуосями), задача (30)—(32) имеет единственное решение, представимое в виде контурного интеграла от определенной функции комплексного параметра (см. теоремы 35, 36 на стр. 372, 377).

Кроме того, доказано, что если при отображении (33) один из лучей d_j плоскости λ перейдет в луч, лежащий в правой части плоскости z (и не совпадающий с мнимыми полуосями), то задача (30)—(32) при условии регулярности граничных условий (29), независимо от степени гладкости данных, не имеет решения (см. теорему 37 на стр. 378).

Главы VIII и IX посвящены применению метода контурного интеграла к решению многомерной смешанной задачи

$$c(x) M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + f(x, t), \tag{34}$$

$$\lim_{x \to y} B\left(y, \frac{d}{dn_y} M\right) u(x, t) = \psi(y) \exp\left(-\int_0^t b_0^{-1}(\tau) b_1(\tau) d\tau\right), \tag{35}$$

$$y \in \Gamma.$$

$$u(x, 0) = \Phi(x), \qquad x \in D, \tag{36}$$

где

$$M = b_0(t) \frac{\partial}{\partial t} + b_1(t),$$

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + a_i(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + a(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}, M\right) = \alpha_1(y) \frac{d}{dn_y} + \alpha_2(y) M\left(\frac{d}{dn_y} + \alpha_3(y)\right) + \alpha_4(y),$$

$c(x)$, $a_i(x)$ — непрерывно дифференцируемы в замыкании трехмерной области D с границей Γ, являющейся поверхностью Ляпунова (D кончена, если ставится внутренняя задача, D бесконечна, если ставится внешняя задача), $c(x) > 0$ при $x \in D + \Gamma$, n_y — направление внутренней нормали к Γ в точке y, ψ_y, $a_i(y)$ непрерывны на Γ и $\alpha_1(y)$, $\alpha_2(y)$ одновременно не обращаются в нуль на Γ, $b_k(t)$ непрерывны при $t \in [0, T]$ и $b_0(t) > 0$.

Задаче (34) — (36) сопоставляется следующая спектральная задача и задача Коши с параметром

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v - \lambda^2 c(x) v = F(x), \tag{37}$$

$$\lim_{x \to y} B\left(y, \frac{d}{dn_y}, \lambda^2\right) v(x, \lambda) = \psi(y), \quad y \in \Gamma, \tag{38}$$

---

* $\varphi_j^{(i)}(x)$ — ϑ-корни характеристических уравнений

$$A_{0p}^{(i)}(x) \vartheta^p - 1 = 0.$$

$$M\left(t, \frac{d}{dt}\right) y - \lambda^2 y = f(\xi, t), \tag{39}$$

$$y(0) = \Phi(\xi)\, c(\xi). \tag{40}$$

Пусть R — достаточно большое положительное число, а $\delta > 0$ достаточно малое.

Доказываются следующие утверждения:

1. В области R_δ значений λ, удовлетворяющих неравенствам

$$|\lambda| \geqslant R, \quad \cos(\arg\lambda) \geqslant \delta,$$

решение спектральной задачи (37)—(38) существует и является аналитической функцией, хорошо убывающей с ростом $\lambda \in R_\delta$ (см. лемму 1, § 3 и лемму 3, §4, гл. VIII).

2. При указанных ограничениях на данные, решение смешанной задачи (34) — (36) существует и представляется в виде контурного интеграла

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_S \left\{ \frac{y_1(t, \lambda)}{\lambda} v_1(x, \lambda) + \lambda \int\limits_D G(x, \xi, \lambda)\, y(t, \xi, \lambda)\, d_\xi D \right\} d\lambda,$$

где S—бесконечный контур, расположенный в области R_δ, ветви контура S асимптотически приближаются к лучам $\cos(\arg\lambda) = \delta$, $y_1(t, \lambda)$ —решение однородного уравнения задачи (39), (40), удовлетворяющее условию $y_1(0, \lambda) = 1$, $v_1(x, \lambda)$ — решение задачи (37), (38) для однородного уравнения, $G(x, \xi, \lambda)$ — функция Грина задачи (37), (38), $y(t, \xi, \lambda)$— решение задачи (39), (40). (См. теорему 38, § 1 и теорему 39, § 2, гл. IX).

Этим же методом в главе X аналогичные результаты получены для смешанной задачи вида (34)—(36), для уравнения с разрывными коэффициентами (см. леммы 1, § 2; 2, § 3 и теоремы 40, 41, § 4, гл. X).

Книга М. Л. Расулова кроме систематического изложения вычетного метода и метода контурного интеграла содержит еще ряд новых интересных результатов по спектральной теории линейных дифференциальных операторов.

Одним из достижений книги является то, что в ней не только развиты исследования Коши, Пуанкаре, Биркгофа, Тамаркина и других авторов, относящихся к спектральной теории дифференциальных операторов, но даны также новые эффективные методы решения широких классов смешанных задач, содержащих в граничных условиях производные по времени, не рассмотренных в литературе.

Книга является ценным вкладом в теорию дифференциальных уравнений с частными производными и полезным пособием по уравнениям математической физики.

Нам кажется, что многие результаты, содержащиеся в книге М. Л. Расулова, будут полезны не только в теоретическом отношении, но будут применяться также для решения частных практических задач.

Доктор физико-математических наук В. И. КРЫЛОВ