A. A. Chervyakova, On the order of decrease at infinity of a function whose Fourier transform is localized on a curve,
Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1968, Volume 11, 204–219

А.А.Червякова

О ПОРЯДКЕ УБЫВАНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ КОТОРОЙ ЛОКАЛИЗОВАНО НА КРИВОЙ

Пусть на плоскости $O\alpha\beta$ задано преобразование Фурье $\hat{u}(\alpha,\beta)$ некоторой функции $u(x,y)$. Известно, что для гладких функций $u(x,y)$ порядок убывания на бесконечности связан с гладкостью функции $\hat{u}(\alpha,\beta)$ и зависит от нее: чем глаже функция, тем выше этот порядок. Пусть функция $u(x,y)$ задана своим преобразованием Фурье, являющимся, вообще говоря, обобщенной функцией. Определение прямого и обратного преобразования Фурье от обобщенной функции см. в [I]. Если преобразование Фурье $\hat{u}(\alpha,\beta)$ сосредоточено в одной точке (h_1,h_2), то функция $u(x,y)=(2\pi)^{-2}\exp[-i(xh_1+yh_2)]$ только ограничена на плоскости Oxy. Выясним вопрос о поведении на бесконечности (при $r=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$) функции $u(x,y)$, преобразование Фурье которой локализовано на кривой Γ.

Пусть Γ - замкнутая, гладкая, гомеоморфная окружности кривая, расположенная в плоскости $O\alpha\beta$. На кривой введем параметр S, где $0 \leq S \leq 2\pi$; точки, соответствующие значениям параметра $S=0$ и $S=2\pi$, совпадают.

На ориентированной плоскости при заданном направлении движения по кривой Γ кривизне $\mathcal{K}$ плоской кривой можно приписать знак. Предположим, что $\mathcal{K}$ в каждой точке Γ положительна. В этом случае вращение вектор-касательной при обходе границы в положительном направлении (внутренняя область остается все время слева) происходит против часовой стрелки, а это есть одно из определений выпуклости области (см. [2]). Таким образом, внутренняя область, ограниченная кривой Γ, выпукла.

Пусть на кривой Γ задано гладкое векторное поле, трансверсальное к ней. Продолжим его с сохранением гладкости на некоторую окрестность Γ. Через каждую точку (α,β) указанной окрестности можно провести интегральную кривую. Расстояние вдоль интегральной кривой от рассматриваемой точки до точки ее пересечения с Γ обозначим через W. Множество, на котором $W<\sigma$, назовем σ-окрестностью Γ и обозначим его через Π.

Положение каждой точки области Π может быть определено числами S, W, которые являются криволинейными координатами этой точки. В этом случае для прямоугольных координат α, β будем иметь

$$\begin{cases} \alpha = \alpha(S,W), \\ \beta = \beta(S,W), \end{cases}$$

где $\alpha(S,W)$ и $\beta(S,W)$ имеют непрерывные производные второго порядка, а якобиан $J(s,w)=\dfrac{D(\alpha,\beta)}{D(s,w)}$, не равный нулю, является гладкой функцией.

Рассмотрим функцию u, заданную преобразованием Фурье в координатах (s,w) в области Π по формуле

$$\hat{u}(s,w)=g(s)\,\delta(w), \qquad (I)$$

где $g(s)$ – любая непрерывно дифференцируемая функция, и $g(0)=g(2\pi)$. Вне Π доопределим $\hat{u}$ нулем.

Каждой гладкой функции $g(s)$, $0 \le s \le 2\pi$, и каждому гладкому векторному полю, трансверсальному к Γ, соответствует некоторая функция $\hat{u}(s,w)$.

Переходя в формуле

$$u(x,y)=(2\pi)^{-2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(\alpha,\beta)\exp[-i(\alpha x+\beta y)]\,d\alpha\, d\beta$$

для определения функции $u(x,y)$ по ее преобразованию Фурье $\hat{u}(\alpha,\beta)$ к новым переменным интегрирования s и w, получаем :

$$u(x,y)=(2\pi)^{-2}\iint\limits_{\Pi}\hat{u}(s,w)\,J(s,w)\exp\{-i[\alpha(s,w)x+\beta y]\}\,ds\,dw. \qquad (2)$$

Пользуясь заданием (I) функции $\hat{u}(s,w)$, нетрудно убедиться, что

$$u(x,y)=(2\pi)^{-2}\int\limits_{0}^{2\pi} g(s)\,J(s,0)\exp\{-i[\alpha(s,0)x+\beta(s,0)y]\}\,ds \qquad (3)$$

Преобразуем выражение (3), выполнив параллельный перенос системы координат $O\alpha\beta$ в какую-либо точку, лежащую внутри кривой (если $O\alpha\beta$ уже обладает этим свойством, то преобразование излишне). Полученную систему координат обозначим $O_1\alpha_1\beta_1$. Для точек, лежащих на Γ, имеем

$$\begin{cases} \alpha(s) = \alpha_1(s) + a, \\ \beta(s) = \beta_1(s) + b, \end{cases} \tag{4}$$

где a и b обозначают координаты нового начала O_1 относительно старой системы $O\alpha\beta$.

В силу выпуклости области, ограниченной Γ, кривую можно представить уравнением вида $\rho = \rho(\psi)\ (0 \le \psi \le 2\pi)$ в полярной системе координат, у которой полюс помещен в точку O_1, а полярная ось совпадает с осью α. Используя (4), переходя к полярным координатам r, φ (на плоскости Oxy) и ρ, ψ (на плоскости $O_1\alpha_1\beta_1$), интеграл (3) приводим к виду

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) =$$

$$= (2\pi)^{-2} \exp[-ir(a\cos\varphi + b\sin\varphi)] \int_0^{2\pi} h(\psi) \exp[-ir\rho\cos(\psi - \varphi)]\, d\psi, \tag{5}$$

где $h(\psi) = g(\psi)\, J(\psi, 0)$, $\rho = \sqrt{\alpha_1^2(s,0) + \beta_1^2(s,0)}$,

$$\cos\psi = \frac{\alpha_1(s,0)}{\sqrt{\alpha_1^2(s,0) + \beta_1^2(s,0)}}, \quad \sin\psi = \frac{\beta_1(s,0)}{\sqrt{\alpha_1^2(s,0) + \beta_1^2(s,0)}}. \tag{6}$$

Учитывая, что в выборе параметра s на Γ имеется некоторый произвол, мы положили $s = \psi$.

__Замечание.__ Как видно из полученных формул, одна и та же функция $u(x,y)$ может получиться при различных заданиях $\hat{u}$ по формуле (I), если пользоваться разными координатами(s, w).

Для изучения поведения на бесконечности (при $r \to \infty$) функции (5) удобно ее представить в виде

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) =$$

$$= \exp[-ir(a\cos\varphi + b\sin\varphi)] \int_0^{2\pi} \frac{h(\psi)\{\exp[-ir\rho\cos(\psi-\varphi)]\}' d\psi}{-ir[\rho'(\psi)\cos(\psi-\varphi) - \rho(\psi)\sin(\psi-\varphi)]} \qquad (7)$$

Докажем, что при наших предположениях относительно кривой все возможные корни знаменателя

$$\Phi(\psi) = \rho'(\psi)\cos(\psi-\varphi) - \rho(\psi)\sin(\psi-\varphi)$$

подинтегрального выражения (7) имеют только первую кратность и число их конечно.

Предположим, напротив, что ψ_1 – корень знаменателя $\Phi(\psi)$ – имеет вторую кратность.

Тогда
$$\begin{cases} \rho'(\psi_1)\cos(\psi_1-\varphi) - \rho(\psi_1)\sin(\psi_1-\varphi) = 0, \\ [\rho''(\psi_1) - \rho(\psi_1)]\cos(\psi_1-\varphi) - 2\rho'(\psi_1)\sin(\psi_1-\varphi) = 0, \end{cases}$$

или

$$[\rho'(\psi_1)\cos\psi_1 - \rho(\psi_1)\sin\psi_1]\cos\varphi +$$

$$+ [\rho'(\psi_1)\sin\psi_1 + \rho(\psi_1)\cos\psi_1]\sin\varphi = 0,$$

$$\{[\rho''(\psi_1)-\rho(\psi_1)]\cos\psi_1-2\rho'(\psi_1)\sin\psi_1]\}\cos\varphi+$$

$$+\{[\rho''(\psi_1)-\rho(\psi_1)]\sin\psi_1+2\rho'(\psi_1)\cos\psi_1\}\sin\varphi=0.$$

Эту совокупность равенств рассмотрим как однородную систему относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$; она имеет ненулевые решения, так как $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$. Однородная система имеет ненулевые решения лишь при условии обращения в нуль ее определителя, т.е. в данном случае при условии

$$\begin{vmatrix} \rho'(\psi_1)\cos\psi_1-\rho(\psi_1)\sin\psi_1 & \rho'(\psi_1)\sin\psi_1+\rho(\psi_1)\cos\psi_1 \\ [\rho''(\psi_1)-\rho(\psi_1)]\cos\psi_1-2\rho'(\psi_1)\sin\psi_1 & [\rho''(\psi_1)-\rho(\psi_1)]\sin\psi_1+2\rho'(\psi_1)\cos\psi_1 \end{vmatrix}=0$$

или $\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''=0$, а это противоречит тому, что кривизна во всех точках рассматриваемой кривой положительна. Таким образом, корень знаменателя $\Phi(\psi)$ имеет только первую кратность.

Более того, существует постоянная A , зависящая от кривой, такая что $\left|\frac{d\Phi}{d\psi}\right|>A$ в тех точках, где $\Phi(\psi)=0$. Отсюда следует оценка числа корней $\Phi(\psi)$ на Γ : существует такое N , что для любого φ $\Phi(\psi)$ имеет не более, чем N простых корней.

Фиксируем теперь φ и будем считать, что имеется ровно N корней, каждый из которых заключен в некоторый интервал (γ_{k-1}, γ_k), $k = 1, 2, \ldots, N$. При этом $\gamma_0 \equiv \gamma_N \pmod{2\pi}$. Принимая во внимание последние рассуждения, формулы (5) и (7) преобразуем к виду

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \tag{8}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \exp[-ir(a\cos\varphi + b\sin\varphi)] \sum_{k=1}^{N} \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} h(\psi)\exp[-ir\rho\cos(\psi-\varphi)]\, d\psi,$$

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \tag{9}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \exp[-ir(a\cos\varphi + b\sin\varphi)] \sum_{k=1}^{N} \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} \frac{h(\psi)\exp[-ir\rho\cos(\psi-\varphi)]}{-ir\,\Phi(\psi)}\, d\psi.$$

Функция (8) на бесконечности имеет тот же порядок, что и каждое слагаемое, входящее в эту сумму. Разобьем промежуток интегрирования (γ_{k-1}, γ_k) на три: $(\gamma_{k-1}, \psi_k - \varepsilon)$, $(\psi_k - \varepsilon, \psi_k + \varepsilon)$, $(\psi_k + \varepsilon, \gamma_k)$, выделив достаточно малую ε-окрестность корня ψ_k знаменателя $\Phi(\psi)$. Интегрируя по частям, имеем

$$\int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} h(\psi)\exp[-ir\rho\cos(\psi-\varphi)]\, d\psi = \int_{\psi_k-\varepsilon}^{\psi_k+\varepsilon} h(\psi)\exp[-ir\rho\cos(\psi-\varphi)]\, d\psi +$$

$$+\frac{1}{ir}\left\{\frac{h(\gamma_{k-1})}{\Phi(\gamma_{k-1})}\exp\left[-ir\rho(\gamma_{k-1})\cos(\gamma_{k-1}-\varphi)\right]-\frac{h(\gamma_k)}{\Phi(\gamma_k)}\exp\left[-ir\rho(\gamma_k)\cos(\gamma_k-\varphi)\right]\right\}+$$

$$+\frac{h(\psi_k+\varepsilon)}{ir\,\Phi(\psi_k+\varepsilon)}\exp\left[-ir\rho(\psi_k+\varepsilon)\cos(\psi_k+\varepsilon-\varphi)\right]-$$

$$-\frac{h(\psi_k-\varepsilon)}{ir\,\Phi(\psi_k-\varepsilon)}\exp\left[-ir\rho(\psi_k-\varepsilon)\cos(\psi_k-\varepsilon-\varphi)\right]+ \qquad (10)$$

$$+\frac{1}{ir}\left(\int\limits_{\gamma_{k-1}}^{\psi_k-\varepsilon}+\int\limits_{\psi_k+\varepsilon}^{\gamma_k}\right)\frac{h'(\psi)}{\Phi(\psi)}\exp\left[-ir\rho(\psi)\cos(\psi-\varphi)\right]d\psi-$$

$$-\frac{1}{ir}\left(\int\limits_{\gamma_{k-1}}^{\psi_k-\varepsilon}+\int\limits_{\psi_k+\varepsilon}^{\gamma_k}\right)\frac{h(\psi)}{\Phi^2(\psi)}\exp\left[-ir\rho(\psi)\cos(\psi-\varphi)\right]d\psi .$$

Оценим каждое слагаемое правой части (10), кроме внеинтегральных членов в точках γ_{k-1} и γ_k, которые уничтожатся, если выполнить подробное интегрирование по частям в каждом слагаемом суммы (8). Остальные слагаемые суммы (10) обозначим через $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, \mathcal{J}_4, \mathcal{J}_5$ в порядке следования их записи. В целях сокращения записи оценок слагаемых $\mathcal{J}_1-\mathcal{J}_5$ введем обозначение:

$$|h|_1=\max_{0\le\psi\le 2\pi}|h(\psi)|+\max_{0\le\psi\le 2\pi}|h'(\psi)|. \qquad (11)$$

Очевидно, что

$$|\gamma_1| = \left|\int\limits_{\psi_k-\varepsilon}^{\psi_k+\varepsilon} h(\psi)\exp[-i\tau\rho\cos(\psi-\varphi)]d\psi\right| \leq c_1|h|_1\varepsilon. \qquad (12)$$

Для оценки остальных слагаемых воспользуемся представлением функции $\Phi(\psi)$ в окрестности нуля ψ_k:

$$\Phi(\psi) = A_1(\psi-\psi_k) + O((\psi-\psi_k)^2),$$

где $A_1 = [(\rho''-\rho)\cos(\psi-\varphi) - 2\rho'\sin(\psi-\varphi)]_{\psi=\psi_k} \neq 0$.

Учитывая представление $\Phi^{-1}(\psi) = A_1^{-1}(\psi-\psi_k)^{-1} + B$, где B – ограниченная функция ψ, можно доказать, что

$$|\gamma_4| \leq c_4|h|_1|\ln\varepsilon|\tau^{-1}, \qquad (13)$$

$$|\gamma_5| \leq c_5|h|_1(\tau\varepsilon)^{-1}. \qquad (14)$$

Используя $\Phi^{-1}(\psi_k+\varepsilon) = A_1^{-1}\varepsilon^{-1} + B$, имеем

$$|\gamma_2| \leq c_2|h|_1(\tau\varepsilon)^{-1}. \qquad (15)$$

Присоединяя к оценке (13)-(15) аналогичную оценку γ_3 и оценку (12), получим

$$|u(\tau\cos\varphi, \tau\sin\varphi)| \leq |h|_1(c_1\varepsilon + \frac{\mathcal{D}}{\tau\varepsilon}). \qquad (16)$$

Минимизируя по ε правую часть (I6), получаем равномерную по φ оценку:

$$|u(x,y)| \leq \frac{c\|h\|_1}{\sqrt{\tau}}. \tag{I7}$$

Докажем, что оценка (I7) справедлива и в случае, когда Γ – плоская, не замкнутая, гладкая кривая, гомеоморфная отрезку, кривизна которой положительна. За параметр S возьмем длину дуги Γ, отсчитываемую от одного из концов рассматриваемой кривой, при этом $0 \leq S \leq L$. Рассматривая (как в случае замкнутой кривой) гладкое векторное поле, трансверсальное к кривой, продолжая его на некоторую σ –окрестность Γ и задавая в ней преобразование Фурье в координатах (S,W) по формуле (I), где $g(S)$ – любая гладкая функция, которая вместе с производными обращается в нуль в окрестности точек $S=0$ и $S=L$, получаем

$$u(x,y)=(2\pi)^{-2}\int_0^L g(s)J(s,0)\exp\{-i[\alpha(s,0)x+\beta(s,0)y]\}ds, \tag{I8}$$

где уравнения $\alpha=\alpha(S)$, $\beta=\beta(S)$ определяют кривую Γ, а $J(S,0)$ – значение якобиана перехода к новым переменным S,W при $W=0$.

Как и прежде, преобразуем выражение (I8). Но в данном случае кривая, вообще говоря, не может быть определена уравнением $\rho=\rho(\psi)$ ни в одной полярной системе координат, введенной на плоскости $O\alpha\beta$. Однако нетрудно видеть, что любой ее участок достаточно малой длины δ может быть представлен уравнением $\rho=\rho(\psi)$ в локальной полярной системе координат, у которой начало помещено в точку на эволюте кривой Γ, соответствующую середине рассматриваемого участка, а полярная ось направлена параллельно оси $\mathcal{L}$. (Величина δ зависит лишь от максимального значения $\mathcal{K}$).

Возьмем некоторое конечное покрытие одномерными открытыми (относительно Γ) криволинейными интервалами длины, не превосходящей δ, и построим подчиненное этому покрытию гладкое разбиение единицы. Если $\{e_k\}_{k=1}^{m}$ - такое разбиение, то $g(s)$ представимо в виде

$$g(s)=\sum_{k=1}^{m} g_k(s), \quad g_k=g(s)e_k(s),$$

и, соответственно,

$$\hat{u}(s,w)=\sum_{k=1}^{m}\hat{u}_k(s,w), \quad \hat{u}_k(s,w)=g_k(s)\delta(w). \qquad (19)$$

В координатном представлении формуле (19) соответствует такое представление $u(x,y)$:

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{m} u_k(x,y).$$

Достаточно доказать, что $u_k(x,y)$ имеет порядок $(\sqrt{\tau})^{-1}$ на бесконечности, чтобы получить этот же вывод для $u(x,y)$. Но поскольку тот участок Γ, на котором сосредоточен носитель $\hat{u}_k(s,w)$, допускает представление $\rho=\rho(\varphi)$, то оценка $u_k(x,y)$ не будет отличаться по существу от случая замкнутой кривой.

Используя (I8) и переходя к локальным полярным координатам, преобразуем $u_k(x,y)$ к виду

$$u_k(r\cos\varphi, r\sin\varphi) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\exp[-ir(a_k\cos\varphi + b_k\sin\varphi)]\int_{\alpha_k}^{\beta_k} h_k(\psi)\exp[-ir\rho\cos(\psi-\varphi)]\,d\psi, \tag{20}$$

где a_k, b_k – координаты начала локальной полярной системы координат в $O\alpha\beta$, а $h_k(\psi) = g_k(\psi)\,J(\psi,0)$.

Рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены для случая замкнутой кривой, приводят к равномерной по φ оценке

$$|u_k(x,y)| \leqslant \frac{c_k |h|_1}{\sqrt{r}}.$$

Окончательно имеем :

$$|u(x,y)| \leqslant \frac{c|h(s)|_1}{\sqrt{r}}, \tag{2I}$$

где $$h(s) = \sum_{k=1}^{m} h_k(s), \quad h_k = g(s)\,J(s,0)\,e_k(s). \tag{22}$$

Полученный результат сформулируем в следующем виде.

<u>**Теорема**</u>. Пусть Γ – гладкая кривая, гомеоморфная окружности или отрезку, кривизна которой всюду положительна. Пусть преобразование Фурье функции $u(x,y)$ является обобщенной

функцией вида (I), носителем которой служит Γ. Тогда при $r \to \infty$ $u(x,y)$ допускает оценку

$$|u(x,y)| \leq \frac{c|h(s)|_1}{\sqrt{r}},$$

где $h(s) = g(s) J(s,0)$.

Замечание. Рассмотрим по-прежнему плоскую гладкую кривую Γ, гомеоморфную окружности или отрезку, которая представлена уравнением $\rho = \rho(\psi)$. Предположим, что только в одной точке кривой, которая является точкой перегиба, кривизна равна нулю. Пусть производная кривизны в этой точке не равна нулю. Нетрудно убедиться, что при $r \to \infty$ имеет место оценка:

$$|u(x,y)| \leq \frac{c|h|_1}{\sqrt[4]{r}}. \tag{23}$$

Действительно, в этом случае

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} h(\psi)\exp[-ir\rho\cos(\psi-\varphi)]\,d\psi, \tag{24}$$

или

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \frac{h(\psi)}{-ir\Phi(\psi)}\left\{\exp[-ir\rho\cos(\psi-\varphi)]\right\}' d\psi : \tag{25}$$

Предполагая в точке ψ_1 кривизну равной нулю, на основании ранее доказанного получаем, что все возможные корни $\Phi(\psi)$ знаменателя подынтегрального выражения (25), кроме ψ_1, имеют первую кратность, а ψ_1 – вторую.

Разбивая интервал интегрирования в формулах (24) и (25) на два: $(0,\gamma)$ и $(\gamma,2\pi)$ так, чтобы первый содержал корень ψ_1, а второй – все остальные корни, получаем

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\gamma h(\psi)\exp[-ir\rho\cos(\psi-\varphi)]d\psi+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^2}\int_\gamma^{2\pi} h(\psi)\exp[-ir\rho\cos(\psi-\varphi)]d\psi, \qquad (26)$$

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\gamma \frac{h(\psi)}{-ir\Phi(\psi)}\{\exp[-ir\rho\cos(\psi-\varphi)]\}'d\psi+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^2}\int_\gamma^{2\pi} \frac{h(\psi)}{-ir\Phi(\psi)}\{\exp[-ir\rho\cos(\psi-\varphi)]\}'d\psi. \qquad (27)$$

Достаточно определить порядок на бесконечности первого слагаемого функции (26), так как порядок второго слагаемого известен и равен $(\sqrt{r})^{-1}$. С помощью представления вида

$$\Phi(\psi)=A_2(\psi-\psi_1)^2+O((\psi-\psi_1)^3),$$

где $$A_2 = [(\rho''' - 3\rho')\cos(\psi - \varphi) - (3\rho'' - \rho)\sin(\psi - \varphi)]_{\psi = \psi_1} \neq 0,$$

по той же схеме, что и в случае замкнутой кривой, легко установить оценки

$$|\gamma_1| \leq c_1 |h|_1 \varepsilon, \tag{28}$$

$$|\gamma_2| \leq c_2 |h|_1 \tau^{-1} \varepsilon^{-2}, \tag{29}$$

$$|\gamma_4| \leq c_4 |h|_1 \tau^{-1} \varepsilon^{-1}, \tag{30}$$

$$|\gamma_5| \leq c_5 |h|_1 \tau^{-1} \varepsilon^{-3}. \tag{31}$$

Из оценок (28)-(31) следует, что первое слагаемое функции (26) не превосходит

$$\left(c_1 \varepsilon + \frac{\mathcal{D}}{\tau \varepsilon^3}\right)|h|_1 .$$

Минимизируя последнее выражение и учитывая порядок на бесконечности второго слагаемого функции (26), получаем оценку (23).

Оценка типа (23) справедлива и для случая, когда кривая имеет конечное число точек перегиба.

Автор выражает искреннюю благодарность К.К.Головкину, под руководством которого выполнена данная работа.

Литература

I. И.М.Гельфанд и Г.Е.Шилов. Обобщенные функции и действия над ними ("Обобщенные функции", вып.I), М., Физматгиз, 1958.

2. Г.М.Голузин. "Геометрическая теория функций комплексного переменного ". М., "Наука", 1966 г.