



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

K. B. Bakiev, The upper estimation of the product of inhomogeneous linear forms for lattices with the small homogeneous minimum, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 106, 5–16

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.169

February 18, 2025, 17:02:20



ОЦЕНКА СВЕРХУ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ
НЕОДНОРОДНЫХ ФОРМ ДЛЯ РЕШЕТОК С МАЛЫМ
ОДНОРОДНЫМ МИНИМУМОМ

§ 1. Введение

Эта работа продолжает исследования [1, 3] по теоремам переноса, связанным с неоднородной гипотезой Минковского. Пусть Λ — точечная решетка в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n ; пусть ее определитель $\det \Lambda = 1$. Рассмотрим неоднородный $\Pi(\Lambda)$ и однородный $L(\Lambda)$ минимумы решетки Λ ; обозначаем: $L(\Lambda) = \sigma^n$, $\sigma(\Lambda) \geq 0$. В заметке [3] было доказано, что

$$\Pi(\Lambda) \leq 2^{-n/2} \cdot n \cdot \exp\left(-\frac{n\sigma}{10}\right). \quad (1)$$

Уже для $\sigma < \frac{10 \log n}{n}$ оценка (1) хуже оценки, содержащейся в работе [2]. Цель нашей работы — получение оценки $\Pi(\Lambda)$ сверху, нетривиальной при меньших значениях σ .

ТЕОРЕМА. Существует такая абсолютная постоянная n_0 , что при всех $n \geq n_0$ для любой решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ определителя $\det \Lambda = 1$, удовлетворяющей условию

$$\frac{1}{n \cdot \log n} \leq \sigma \leq \frac{10(\log n)^{\log \log n + 1}}{n}, \quad (2)$$

имеет место неравенство

$$\Pi(\Lambda) \leq 2^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -n\sigma(\log n)^{\log \log n + 1} \right\}. \quad (3)$$

Эта теорема доказывается (см. ниже, § 3) комбинированием обработанных работ [2, 3]. За библиографией работ по этой теме мы отсылаем к заметке [1]. Приношу глубокую благодарность Б.Ф.Скубенко за постановку задачи и внимание к работе.

§ 2, Леммы

При доказательстве теоремы нам потребуются следующие три леммы.

ЛЕММА I. Пусть G — многогранник, определенный условиями

$$\left. \begin{aligned} \left| m \sum_{i \in J_m} x_i - m' \sum_{i \in J_{m'}} x_i \right| &\leq mm', \\ |x_1 + x_2 + \dots + x_n| &\leq 1, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где пары натуральных чисел (m, m') пробегает все разбиения $m + m' = n$ числа n , причем для данного разбиения (m, m') множество $\{1, 2, \dots, n\}$ индексов разбивается всеми возможными способами на два непересекающихся подмножества: $J_m = \{i\}$ с числом элементов m и $J_{m'} = \{i'\}$ с числом элементов m' . Тогда его объем

$$V(G) = \frac{2^n}{n} \quad (5)$$

Доказательство этой леммы см. [I]

ЛЕММА 2. Пусть $X = (x_1, \dots, x_r, -y_1, \dots, -y_m, z_1, \dots, z_s) \in G$, причем $x_1, \dots, x_r > 0$, $y_1, \dots, y_m > 0$, $r + m \geq 1$. Тогда

$$\frac{x_1 + \dots + x_r + y_1 + \dots + y_m}{r + m} \leq 1 - \frac{r + m}{2n} + \frac{1}{2n(r + m)}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим:

$$\sum_{i=1}^r x_i = U, \quad \sum_{i=1}^m y_i = V, \quad \sum_{i=1}^s z_i = W, \quad U - V + W = \theta.$$

Тогда в силу (4)

$$|\theta| \leq 1,$$

$$|(n-r)U + rV - rW| \leq r(n-r),$$

$$|(n-m)V + mU + mW| \leq m(n-m).$$

Отсюда следует:

$$|nU - r\theta| \leq r(n-r), \quad |nV + m\theta| \leq m(n-m),$$

или

$$U \leq \frac{r(n-r+\theta)}{n}, \quad V \leq \frac{m(n-m-\theta)}{n},$$

$$U+V \leq \frac{(\tau+m)n - (\tau^2+m^2) + (\tau-m)\theta}{n} \leq \frac{(\tau+m)n - (\tau^2+m^2) + |\tau-m|}{n},$$

что приводит к оценке (6).

ЛЕММА 3. Пусть в условиях леммы 2 $\chi \in \Lambda$, причем $|z_i| < 1$. Пусть $1 \leq s_1 \leq s$. Тогда

$$\sum_{i=1}^s z_i^2 \geq (s-s_1) \delta^{2n/(s-s_1)} \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение однородного минимума и неравенство между средними геометрическим и арифметическим, получаем:

$$\delta^{2n} \leq x_1^2 \cdots x_\tau y_1^2 \cdots y_m^2 z_1^2 \cdots z_s^2 \leq \left(\frac{U+V}{\tau+m} \right)^{2(\tau+m)} z_1^2 \cdots z_s^2.$$

Теперь по лемме 2 и неравенству между средними

$$\delta^{2n} \leq z_{s_1}^2 \cdots z_s^2 \leq \left(\frac{z_{s_1}^2 + \cdots + z_s^2}{s-s_1} \right)^{s-s_1},$$

откуда и следует неравенство (7).

§ 3. Доказательство теоремы

Рассмотрим любую решетку $\Lambda_1 \subset \mathbb{R}_n$ с $\det \Lambda_1 = 1/n$ и произвольную точку $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}_n$. Обозначим через δ_1^n однородный минимум решетки Λ_1 . Мы докажем, что множество $\Lambda_1 + d$ содержит точку $z' = (z'_1, \dots, z'_n)$, для которой

$$|z'_1 z'_2 \cdots z'_n| \leq 2^{-n/2} \exp \left\{ -n \delta_1 (\log n)^{\log \log n + 2} - \log n \right\}$$

Ясно, что из этого будет следовать оценка (I) для унимодулярной решетки $\Lambda = n^{1/n} \Lambda_1$ с однородным минимумом $\delta^n = \delta_1^n \cdot n$.

Для простоты считаем, что неоднородный минимум достигается. Тогда, не умаляя общности, можем считать, что множество $\Lambda_1 + d$ содержит точку (a, a, \dots, a) , $a > 0$, так что для любой точки $z'' = (z''_1, z''_2, \dots, z''_n)$ из $\Lambda_1 + d$ выполняется неравенство

$$a^n \leq |z''_1 \cdot z''_2 \cdots z''_n|. \quad (8)$$

Итак, для того чтобы доказать теорему, достаточно показать, что

$$a^n \leq 2^{-n/2} \cdot \exp \left\{ -n \delta_1 (\log n)^{\rho+2} - \log n \right\}, \quad (9)$$

здесь и в дальнейшем для краткости записи положено $\rho = \log \log n$.
Доказывать теорему будем от противного. Предположим, что

$$a > 2^{-1/2} \exp \left\{ -\sigma_1 (\log n)^{\rho+2} - \frac{\log n}{n} \right\} \quad (10)$$

По теореме Минковского о выпуклом теле многогранник G содержит отличную от нуля точку решетки Λ_1 . Можно считать, что эта точка имеет вид $X = (x_1, \dots, x_r, -y_1, \dots, -y_m, z_1, \dots, z_s)$, где $r+m+s = n$. Не умаляя общности, считаем, что координаты точки X удовлетворяют условиям

$$x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, \dots, y_m > a, \quad a > |z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_s|.$$

Так как $\pm X + (a, a, \dots, a) \in \Lambda_1 + d$, то из (4) следует:

$$a^n \leq |(a+x_1) \cdots (a+x_r)(y_1-a) \cdots (y_m-a)(a+z_1) \cdots (a+z_s)|$$

$$a^n \leq |(x_1-a) \cdots (x_r-a)(a+y_1) \cdots (a+y_m)(a-z_1) \cdots (a-z_s)|.$$

Из этих неравенств, по лемме 2 (используя обозначения § 2),

$$\begin{aligned} a^{2n} &\leq \left(\frac{U+V}{r+m} + a \right)^{r+m} \left(\frac{U+V}{r+m} - a \right)^{r+m} (a^2 - z_1^2) \cdots (a^2 - z_s^2) = \\ &= \left\{ \left(\frac{U+V}{r+m} \right)^2 - a^2 \right\}^{r+m} (a^2 - z_1^2) \cdots (a^2 - z_s^2) \leq \left\{ T^2 - a^2 \right\}^t (a^2 - z_1^2) \cdots (a^2 - z_s^2), \end{aligned}$$

где для краткости положено $T = \frac{U+V}{t}$, $t = r+m$. Отсюда выводим:

$$1 \leq \left(\frac{T^2}{a^2} - 1 \right)^t \left(1 - \frac{z_1^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{z_2^2}{a^2} \right) \cdots \left(1 - \frac{z_s^2}{a^2} \right) \quad (11)$$

Из последнего неравенства и из того, что $|z_l| < a$, $l = 1, \dots, s$, получаем

$$a \leq \frac{T}{\sqrt{2}} \quad (12)$$

Из леммы 2 вытекает, что

$$T = \frac{U+V}{t} \leq e^{-\frac{t}{2n}} + \frac{1}{2nt} \leq e^{\frac{1-t}{2n}}.$$

Отсюда и из (12) получаем

$$a^n \leq 2^{-n/2} e^{\frac{1-t}{2}}.$$

Используя последнее неравенство и (10), получаем

$$t \leq 2n\sigma_1(\log n)^{\rho+2} + \log(en^2). \quad (13)$$

Из (13), учитывая условия теоремы $\left(\frac{1}{n^{1+1/m}} \leq \sigma_1 \leq \frac{10(\log n)^{\rho+1}}{n}\right)$, выводим:

$$t \leq 3n\sigma_1(\log n)^{\rho+2} < 30(\log n)^{2\rho+3} \quad (14)$$

Из (14) и из того, что $s+t=n$, следует

$$n - 30(\log n)^{2\rho+3} \leq s \leq n. \quad (15)$$

Далее из (II), используя неравенство (10) и учитывая, что $T \leq 1$, получаем:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left\{ 2 \exp\left(2\sigma_1(\log n)^{\rho+2} + \frac{2 \log n}{n}\right) - 1 \right\}^t \left(1 - \frac{z_1^2}{a^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z_s^2}{a^2}\right) \leq \\ &\leq \exp \left\{ 2t \left(\exp\left(2\sigma_1(\log n)^{\rho+2} + \frac{2 \log n}{n}\right) - 1 \right) - \left(\left(\frac{z_1^2}{a^2}\right) + \cdots + \left(\frac{z_s^2}{a^2}\right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

Оценим сверху выражение

$$\exp\left(2\sigma_1(\log n)^{\rho+2} + \frac{2 \log n}{n}\right) - 1 = \exp\{f(n)\} - 1,$$

где

$$f(n) = 2\sigma_1(\log n)^{\rho+2} + \frac{2 \log n}{n}.$$

Известно, что

$$\exp\{f(n)\} - 1 = f(n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{f(n)\}^{k-1}}{k!} \quad (17)$$

Существует такое число n_0 , что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $f(n) < 1$. Поэтому для всех $n \geq n_0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{f(n)\}^{k-1}}{k!} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} < 2.$$

Отсюда и из (17) выводим:

$$\exp(2\sigma_1(\log n)^{\rho+2} + \frac{2 \log n}{n}) - 1 < 5\sigma_1(\log n)^{\rho+2}. \quad (18)$$

Используя (16), (18) и (14), получаем:

$$1 \leq \exp \left\{ 10 + \sigma_1(\log n)^{\rho+2} - \left(\left(\frac{z_1}{a} \right)^2 + \dots + \left(\frac{z_s}{a} \right)^2 \right) \right\} < \\ < \exp \left\{ 30n\sigma_1^2(\log n)^{2\rho+4} - (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_s) \right\} = \exp \left\{ 30n\sigma_1^2(\log n)^{2\rho+4} - B \right\}.$$

Итак, имеем:

$$1 \leq \exp(30n\sigma_1^2(\log n)^{2\rho+4} - B) \quad (19)$$

где для краткости положено $B = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_s$, $\xi_i = \left(\frac{z_i}{a} \right)^2$, $i = 1, \dots, s$.

Из (19) вытекает, что

$$B \leq 30n\sigma_1^2(\log n)^{2\rho+4}. \quad (20)$$

Так как для любого натурального N , $\pm NX + (a, a, \dots, a) \in \Lambda_1 + \mathcal{L}$, то из (8) следует:

$$a^n \leq |(Nx_1 + a) \dots (Nx_r + a)(Ny_1 - a) \dots (Ny_m - a)(a + Nz_1) \dots (a + Nz_s)|,$$

$$a^n \leq |(Nx_1 - a) \dots (Nx_r - a)(Ny_1 + a) \dots (Ny_m + a)(a - Nz_1) \dots (a - Nz_s)|.$$

Из этих неравенств получаем

$$a^{2n} \leq (N^2 T^2 - a^2)^t \cdot |(a^2 - N^2 z_1^2) \dots (a^2 - N^2 z_s^2)|,$$

или

$$1 \leq \left(\frac{N^2 T^2}{a^2} - 1 \right)^t \cdot \left| \left(1 - \frac{N^2 z_1^2}{a^2} \right) \dots \left(1 - \frac{N^2 z_s^2}{a^2} \right) \right|$$

Используя (10) $T \leq 1$, выводим:

$$1 \leq \left\{ 2N^2 \exp(2\sigma_1(\log n)^{\rho+2} + \frac{2 \log n}{n}) - 1 \right\}^t \cdot |(1 - N^2 \xi_1) \dots (1 - N^2 \xi_s)| \ll \\ \ll \exp \left\{ t \log(2N^2 \exp(2\sigma_1(\log n)^{\rho+2} + \frac{2 \log n}{n})) \right\} \cdot |(1 - N^2 \xi_1) \dots (1 - N^2 \xi_s)| \quad (21)$$

Разбиение чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ на классы. Отрезок $(0, 1]$ разобьем на интервалы:

$$\left(\frac{1}{2^2}, 1\right), \left(\frac{1}{3^2}, \frac{1}{2^2}\right), \dots, \left(\frac{1}{q^2}, \frac{1}{(q-1)^2}\right), \dots$$

Наши числа $1 > \xi_1 > \xi_2 > \dots > \xi_s$ разобьем на классы, объединяя числа ξ_i , содержащиеся в одном интервале, в один класс. Пусть

$$\left(\frac{1}{N_1^2}, \frac{1}{(N_1-1)^2}\right), \dots, \left(\frac{1}{N_k^2}, \frac{1}{(N_k-1)^2}\right), \dots, \left(\frac{1}{N_\nu^2}, \frac{1}{(N_\nu-1)^2}\right), N_{k-1} < N_k,$$

все интервалы, которые содержат хотя бы одно ξ_i . Множество чисел ξ_j , содержащихся в интервале $\left(\frac{1}{N_i^2}, \frac{1}{(N_i-1)^2}\right)$, обозначим через E_i . Обозначим буквой e_i сумму чисел ξ_i из класса E_i . Мы имеем $B = \sum_{i=1}^{\nu} e_i$, где $B = \sum_{i=1}^s \xi_i$, ν - число классов. Положим

$$B_1^{(k)} = \sum_{i=1}^k e_i, \quad B_2^{(k)} = \sum_{i=k+1}^{\nu} e_i,$$

тогда $B = B_1^{(k)} + B_2^{(k)}$

Отметим основные свойства такого разбиения.

- (I) Если $\xi, \xi' \in E_i$, то для любого натурального N или $N^2 \xi, N^2 \xi' > 1$ или $N^2 \xi, N^2 \xi' < 1$.
- (II) Все слагаемые в сумме $N_k^2 B_1^{(k)}$ больше единицы; все слагаемые в сумме $N_k^2 B_2^{(k)}$ меньше единицы;
- (III) Все слагаемые в сумме $(N_{k-1})^2 B_1^{(k-1)}$ больше единицы; все слагаемые в сумме $(N_{k-1})^2 B_2^{(k-1)}$ меньше единицы.

Свойство (I) непосредственно следует из определения классов. Свойства (II) и (III) следуют из (I).

Оценка снизу элементов ξ_i . Пусть $\rho_1 = 8(\rho+3)\rho$,

$$\delta = \log \log n / \log n,$$

$$\left[(\log n)^{2\rho+4}\right] = l_0 \leq q \leq l = \left[s^{1-\delta}\right]. \quad (22)$$

Тогда

$$\xi_q > \frac{\sum_{j=q}^s \xi_j}{q \rho_1} \quad (23)$$

Докажем неравенство (23). Пусть $\xi_q \in E_i$. Оценим сначала число N_i^2 , отвечающее классу E_i . По лемме 3

$$\xi_q(s-q) \geq \sum_{i=q}^s \xi_i \geq (s-q) \sigma_1^{2n/(s-q)} \quad (24)$$

Оценим сверху $n/(s-q)$. Используя (15) и (22), получаем при достаточно большом n

$$s-q \geq n - 30(\log n)^{2\rho+3} - s^{1-\delta} \geq n - 30(\log n)^{2\rho+3} - n^{1-\delta} \geq n \left(1 - \frac{2}{n^\delta}\right) \quad (25)$$

Отсюда

$$\frac{n}{s-q} \leq 1 + \frac{2}{n^{\delta-2}} \quad (26)$$

Поэтому из (24) при достаточно большом n следует

$$\xi_q > \sigma_1^2 \sigma_1^{4(n^\delta-2)} \geq \sigma_1^2/60.$$

Далее, из свойства (III): $(N_i-1)^2 \xi_q < 1$. Из последних неравенств вытекает, что

$$N_i^2 < \frac{120}{\sigma_1^2} \quad (27)$$

Теперь покажем, что

$$B_2^{(i-1)} \geq \frac{n \sigma_1^2}{60} \quad (28)$$

Действительно, так как $B_2^{(i-1)} \geq \sum_{j=q}^s \xi_j$, то из леммы 3:

$$B_2^{(i-1)} \geq \sum_{j=q}^s \xi_j \geq (s-q) \sigma_1^{2n/(s-q)}$$

Из последнего неравенства, используя (25), (26), при достаточно большом n , получим неравенство (28). В силу (21), (14), (27), и условий теоремы

$$\begin{aligned}
1 &< \exp(60(\log n)^{2\rho+4}) \cdot ((N_{i-1})^2 \xi_{i-1}) \cdots ((N_{i-1})^2 \xi_{l_{i-1}}) (1 - (N_{i-1})^2 \xi_{l_{i+1}}) \cdots (1 - (N_{i-1})^2 \xi_s) \leq \\
&\leq \exp(60(\log n)^{2\rho+4}) ((N_{i-1})^2 \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_{l_{i-1}}}{l_{i-1}})^{l_{i-1}} \exp(-(N_{i-1})^2 B_2^{(i-1)}) < \\
&< \exp \left\{ 60(\log n)^{2\rho+4} + l_{i-1} \log \left((N_{i-1})^2 \frac{B_1^{(i-1)}}{l_{i-1}} + 1 \right) - (N_{i-1})^2 B_2^{(i-1)} \right\} \quad (29)
\end{aligned}$$

где l_{i-1} — количество слагаемых в сумме $B_1^{(i-1)}$. Так как $l_{i-1} \geq l_0$, то из (29) вытекает:

$$\begin{aligned}
(N_{i-1})^2 B_2^{(i-1)} &\leq 60(\log n)^{2\rho+4} + l_{i-1} \log \left((N_{i-1})^2 \frac{B_1^{(i-1)}}{l_{i-1}} + 1 \right) \leq \\
&\leq 2l_{i-1} \log \left((N_{i-1})^2 \frac{B_1^{(i-1)}}{l_{i-1}} + 1 \right). \quad (30)
\end{aligned}$$

Отсюда:

$$l_{i-1} \geq \frac{(N_{i-1})^2 B_2^{(i-1)}}{2 \log \left((N_{i-1})^2 \frac{B_1^{(i-1)}}{l_{i-1}} + 1 \right)} \quad (31)$$

Используя (20), (27), (28), (31), будем иметь

$$\begin{aligned}
\log \left((N_{i-1})^2 \frac{B_1^{(i-1)}}{l_{i-1}} + 1 \right) &\leq \log \left\{ (N_{i-1})^2 \frac{B_1^{(i-1)}}{(N_{i-1})^2 B_2^{(i-1)}} 2 \log \left((N_{i-1})^2 \frac{B_1^{(i-1)}}{l_{i-1}} + 1 \right) + 1 \right\} \leq \\
&\leq \log(3600(\log n)^{2\rho+4} \log n^2 + 1) \leq 2(\rho+3) \log \log n = 2(\rho+3)\rho.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\log \left((N_{i-1})^2 \frac{B_1^{(i-1)}}{l_{i-1}} + 1 \right) \leq 2(\rho+3)\rho. \quad (32)$$

Теперь из (30) и (32) получаем, учитывая, что $l_{i-1} \leq q$,

$$(N_i - 1)^2 B_2^{(i-1)} \leq 2l_{i-1} \log((N_i - 1)^2 \frac{B_2^{(i-1)}}{l_{i-1}} + 1) < 4q(\rho+3)\rho,$$

или

$$(N_i - 1)^2 \leq \frac{4q(\rho+3)\rho}{B_2^{(i-1)}}. \quad (33)$$

Из того, что $\xi_q \in E_i$ и свойства (II) выводим: $N_i^2 \xi_q > 1$. Используя (33), получаем:

$$\xi_q > \frac{1}{N_i^2} = \frac{(N_i - 1)^2}{N_i^2} \cdot \frac{1}{(N_i - 1)^2} > \frac{B_2^{(i-1)}}{8q(\rho+3)\rho} \geq \frac{\sum_{j=q}^s \xi_j}{q\rho_i},$$

что и доказывает неравенство (23).

Пусть снова $\rho_i = 8\rho(\rho+3)$, $\delta = \log \log n / \log n$, $l = [s^{1-\delta}]$. Докажем, что

$$B > l^{1 + \frac{1}{2\rho_i}} \sigma_i^2 \frac{1}{(\log n)^{\frac{\rho+2}{\rho_i}}} \quad (34)$$

Действительно, рассмотрим функции $\varphi(x)$ и $\Psi(x)$:

$$1) \varphi(x) = \varphi([x])(1 - \{x\}) + \{x\} \varphi([x] + 1), \quad x = [x] + \{x\},$$

причем $\varphi(q) = \sum_{l=q}^s \xi_l$ при целом $x = q$,

$$[(\log n)^{2\rho+4}] = l_0 \leq q \leq l = [s^{1-\delta}], \quad \delta = \frac{\log \log n}{\log n}; \quad \varphi'(x) = -\xi_{[x]} \text{ при } x \neq [x];$$

$$2) \Psi(x) = e^{1 + \frac{1}{2\rho_i}} \sigma_i^2 x^{-1/2\rho_i}$$

Эти функции монотонно убывают и $\varphi(l) \geq \Psi(l)$.

Докажем, что $\varphi(q) \geq \Psi(q)$ для всех целых чисел $l_0 \leq q \leq l$. Действительно, в противном случае $\varphi(q_0) < \Psi(q_0)$ для некоторого $l_0 < q_0 \leq l$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \varphi(q_0+1) &\leq \varphi(q_0+1) \\ \varphi(q_0) &\geq \varphi(q_0) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Так как

$$\varphi'(x) = - \frac{l^{1 + \frac{1}{2\rho_i}} \sigma_i^2}{2\rho_i} x^{-\frac{1}{2\rho_i} - 1},$$

то

$$\Psi'(q_0) = -\frac{\Psi(q_0)}{2g_1 q_0}$$

Из (35) вытекает, что $|\Delta P| \leq |\Delta \Psi|$, где $\Delta P = P(q_0+1) - P(q_0)$,
 $\Delta \Psi = \Psi(q_0+1) - \Psi(q_0)$. Отсюда

$$\xi_{q_0} \leq \frac{\Psi(x_1)}{2g_1 x_1} \quad (36)$$

где $q_0 \leq x_1 \leq q_0+1$
 Очевидно, что

$$|\Psi(x_1) - \Psi(q_0+1)| \leq |\Psi(q_0) - \Psi(q_0+1)| \leq |\Psi'(x_1)| = \frac{\Psi(x_1)}{2g_1 x_1} \leq \frac{\Psi(x_1)}{2g_1 q_0}$$

Отсюда

$$\Psi(x_1) \leq \frac{2g_1 q_0 \Psi(q_0+1)}{2g_1 q_0 - 1}$$

Поэтому из (36) выводим:

$$\xi_{q_0} \leq \frac{\Psi(q_0+1)}{2g_1 q_0 - 1} \leq \frac{P(q_0)}{2g_1 q_0 - 1}$$

С другой стороны, по неравенству (23)

$$\xi_{q_0} > \frac{P(q_0)}{g_1 q_0}$$

Из последних двух неравенств вытекает, что $g_1 q_0 < 1$, что невозможно. Итак, мы доказали, что $P(q) \geq \Psi(q)$ для всех q .

$$[(\log n)^{2g+4}] \leq q \leq [s^{1-\delta}]$$

Поэтому верна оценка

$$B \geq \varphi(l_0) \geq \Psi(l_0) \geq l^{1+\frac{1}{2}g_1} \sigma_1^2 \frac{1}{(\log n)^{g+\frac{1}{2}g_1}}$$

и мы доказали (34).

При достаточно большом n неравенство (34) противоречит неравенству (20). Это противоречие доказывает теорему.

Литература

1. Бакиев К.Б., Пен А.С., Скубенко Б.Ф. К оценке сверху произведения линейных неоднородных форм. - Мат. заметки, 1978, т.23, № 6, с.789-797.
2. Скубенко Б.Ф. К гипотезе Минковского при больших n . - Труды Мат. ин-та им.В.А.Стеклова АН СССР, 1978, т.148, с.218-224.
3. Скубенко Б.Ф., Бакиев К. Теорема переноса в неоднородной задаче Минковского. - Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1979, т.91, с.119-124.