



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Шемарулин, Контактные симметрии и законы сохранения некоторых уравнений газовой динамики,

*Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 154–156

<https://www.mathnet.ru/mzm3346>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.88

23 апреля 2025 г., 20:42:40



# КОНТАКТНЫЕ СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В. Е. Шемарулин

Рассматриваются квазилинейные уравнения

$$(\varphi_x^2 - c^2) \cdot \varphi_{xx} + (\varphi_y^2 - c^2) \cdot \varphi_{yy} + (\varphi_z^2 - c^2) \cdot \varphi_{zz} + 2\varphi_x \varphi_y \cdot \varphi_{xy} + 2\varphi_x \varphi_z \cdot \varphi_{xz} + 2\varphi_y \varphi_z \cdot \varphi_{yz} = 0, \quad (1)$$

$$c^2 = \frac{k-1}{2} \cdot (w^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 - \varphi_z^2), \quad k = \text{const}, \quad w = \text{const},$$

$$(\varphi_x^2 - c^2) \cdot \varphi_{xx} + (\varphi_y^2 - c^2) \cdot \varphi_{yy} + \varphi_{tt} + 2\varphi_x \varphi_y \cdot \varphi_{xy} + 2\varphi_x \cdot \varphi_{xt} + 2\varphi_y \cdot \varphi_{yt} - \frac{v \cdot c^2 \varphi_y}{y} = 0, \quad (2)$$

$$c^2 = -(k-1) \left( \varphi_t + \frac{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}{2} \right), \quad k = \text{const}, \quad v = 0, 1,$$

к которым сводятся системы уравнений, описывающие безвихревые изэнтропические течения политропного газа с показателем адиабаты  $k$  [1]. Уравнение (1) описывает трехмерные установившиеся потоки, а уравнение (2) — двумерные неустановившиеся плоские ( $v = 0$ ) и осесимметричные ( $v = 1$ ) потоки. В уравнениях (1), (2)  $\varphi$  — потенциал скоростей,  $c$  — скорость звука;  $w, k \in R$ .

Физическими являются требования  $c^2 > 0, k > 1$ . Однако формально результаты работы справедливы для любого вещественного  $k \neq \pm 1$ .

Ниже используются обозначения, терминология и факты, принятые и доказанные в [2, 3]. Контактные симметрии и законы сохранения вычисляются в соответствии с методом, изложенным в [3].

Уравнения (1), (2) являются уравнениями на трехмерном многообразии  $M = R^3(q_1, q_2, q_3)$ , где  $q_1 \equiv x, q_2 \equiv y, q_3 \equiv z$  для (1) и  $q_3 \equiv t$  для (2). Пусть  $\Phi = P^1M$  — многообразие 1-джетов гладких функций на  $M$ ;  $\Phi \cong R^7(q_i, u, p_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ );  $\omega$  — эффективная 3-форма на  $\Phi$ , представляющая уравнения (1), (2),  $\omega \in \Lambda^3(R^7)$ ;  $X_f$  — контактное векторное поле на  $\Phi$  с производящей функцией  $f \in C^\infty(\Phi)$ .

Алгебру симметрий  $X_f$  уравнения с представляющей формой  $\omega$  будем обозначать  $\text{sym}(\Delta_\omega)$ . Функция  $f \in \text{sym}(\Delta_\omega)$  тогда и только тогда, когда

$$h \cdot \omega + d_p i_f \omega + i_f d_p \omega + f \cdot L_1 \omega = 0, \quad (3)$$

где  $h$  — гладкая функция на  $\Phi$ ,  $d_p$  — проекция внешнего дифференциала,  $i_f \omega = X_f \lrcorner \omega$ ,  $L_1 \omega$  — производная Ли вдоль поля  $X_1$  [3].

Законы сохранения на  $\Phi$  находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями  $g$  следующего уравнения [3]:

$$E(g \cdot \omega) \equiv g \cdot E(\omega) + X_1(g) \cdot \omega + d_p g \wedge \perp d_p \omega + d_p i_g \omega = 0, \quad (4)$$

$$E(\omega) \equiv L_1(\omega) + d_p \circ \perp \circ d_p(\omega).$$

Решения  $g \in C^\infty(\Phi)$  уравнения (4) называют производящими функциями законов сохранения, отвечающих им в силу отмеченного взаимно однозначного соответствия. Процедура восстановления закона сохранения по его производящей функции описана в [3].

**Предложение 1.** Если  $k \neq 1$ , то контактные симметрии уравнений (1), (2) являются точечными.

Уравнения (1), (2) при  $k \neq 1$  являются уравнениями Эйлера — Лагранжа, отвечающими лагранжианам  $L_1 = i^{k/(k-1)}$ ,  $i = w^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 - \varphi_z^2$

и  $L_2 = y^v \cdot i^{k/(k-1)}$ ,  $i = \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)$ , соответственно. Поэтому клас-

сическая теорема Э. Нётер обуславливает связь между производящими функциями симметрий и законов сохранения для этих уравнений. Ее точный вид устанавливается в следующих двух предложениях.

**Предложение 2.** Пусть  $g$  — производящая функция закона сохранения для уравнения, задаваемого эффективной формой  $\omega$ , и функция  $a \neq 0$  удовлетворяет соотношению  $d_p(a \cdot \omega) = 0$ . Тогда  $a^{-1}g \in \text{sumc}(\Delta_\omega)$ . Более того, если  $f \in \text{sumc}(\Delta_\omega)$ , то  $g \equiv a \cdot f$  является производящей функцией закона сохранения тогда и только тогда, когда для функции  $h$  из (3) выполнено равенство

$$h = X_1(f) + a^{-1} \cdot f \cdot L_1 a + a^{-1} \cdot i f d_p a.$$

**Предложение 3.** В качестве функции  $a$ , фигурирующей в предложении 2, для уравнения (1) можно взять функцию  $a = i^{-(k-2)/(k-1)}$ ,  $i = w^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$ , а для уравнения (2) — функцию  $a = q_2^N \cdot i^{-(k-2)/(k-1)}$ ,

$$i = p_3 + \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2).$$

Ниже под  $a$  понимается одна из функций, описанных в предложении 3.

При  $k \neq \pm 1$  справедливы следующие теоремы.

**ТЕОРЕМА 1.** Алгебра контактных симметрий уравнения (1) как линейное пространство имеет базис

$$f_0 = 1; \quad f_i = p_i; \quad f_{ij} = p_i q_j - p_j q_i; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j,$$

$$f_4 = u - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3.$$

Базис пространства контактных законов сохранения образует законы сохранения массы (энергии), импульса и момента импульса с производящими функциями

$$g_0 = a; \quad g_i = a p_i; \quad g_{ij} = a (p_i q_j - p_j q_i); \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j.$$

**ТЕОРЕМА 2.** Алгебра контактных симметрий уравнения (2) в плоском случае ( $v = 0$ ) как линейное пространство имеет базис:

$$a) \text{ при } k \neq 2 \quad B_1 = \{f_0 = 1; \quad f_1 = p_1, \quad f_2 = p_2, \quad f_3 = p_3; \quad f_4 = p_1 q_2 - p_2 q_1; \quad f_5 = q_1 - q_3 p_1, \quad f_6 = q_2 - q_3 p_2; \quad f_7 = u - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3, \quad f_8 = u + q_3 p_3\};$$

$$б) \text{ при } k = 2 \quad B_2 = B_1 \cup \{f_9^0\}, \text{ где } f_9^0 = \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) - q_1 q_3 \cdot p_1 - q_2 q_3 \cdot p_2 - q_3^2 \cdot p_3.$$

Базис пространства контактных законов сохранения при  $k \neq 2$  образует законы сохранения массы, импульса, энергии, момента импульса, теоремы о движении центра масс с производящими функциями

$$g_i = a \cdot f_i, \quad i = 0, 1, \dots, 6, \quad (5)$$

и дополнительный закон сохранения с производящей функцией, зависящей от  $k$ ,

$$\bar{g}_k = a \cdot \left[ -\frac{k+1}{3(k-1)} \cdot f_7 + f_8 \right], \quad (6)$$

при  $k = 2$  система (5), (6) дополняется функцией  $g_9^0 = a \cdot f_9^0$ .

**ТЕОРЕМА 3.** Алгебра контактных симметрий уравнения (2) в осесимметричном случае ( $v = 1$ ) как линейное пространство имеет базис:

$$a) \text{ при } k \neq 5/3 \quad B_3 = \{f_0 = 1; \quad f_1 = p_1, \quad f_2 = p_3; \quad f_3 = q_1 - q_3 p_1; \quad f_4 = u - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3, \quad f_5 = u + q_3 p_3\};$$

$$б) \text{ при } k = 5/3 \quad B_4 = B_3 \cup \{f_6^0\}, \text{ где}$$

$$f_6^0 = \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) - q_1 q_3 \cdot p_1 - q_2 q_3 \cdot p_2 - q_3^2 \cdot p_3.$$

Базис пространства контактных законов сохранения при  $k \neq 5/3$  образует законы сохранения массы, импульса, энергии, теоремы о движении центра масс с производящими функциями

$$g_i = a \cdot f_i; \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (7)$$

и дополнительный закон сохранения с производящей функцией, зависящей от  $k$ ,

$$\tilde{g}_k = a \cdot \left[ -\frac{k+1}{4(k-1)} \cdot f_4 + f_5 \right], \quad (8)$$

при  $k = 5/3$  система (7), (8) дополняется функцией  $g_6^0 = a \cdot f_6^0$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Все функции  $f_i$  и  $g_i$ , перечисленные в теоремах 1—3, являются производящими функциями симметрий и законов сохранения и для  $k = -1$ . Кроме того, при  $k = -1$  функция  $g = a \cdot (u + q_3 p_3)$  определяет дополнительный закон сохранения для уравнения (2) как в плоском ( $v = 0$ ), так и в осесимметричном ( $v = 1$ ) случае.

**З а м е ч а н и е 2.** Частично результаты, относящиеся к уравнению (2) в плоском случае, приведены в [4].

В заключение автор выражает благодарность В. В. Лычагину за внимание к работе и полезные обсуждения.

Поступило  
18.05.89

### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
2. Лычагин В. В. // УМН. 1975. Т. 30, вып. 1. С. 101—171.
3. Лычагин В. В. // УМН. 1979. Т. 34, вып. 1. С. 137—165.
4. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.