

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ *)

Пусть E — банахово пространство над \mathbb{R} , частично упорядоченное с помощью телесного конуса \mathcal{K} , допускающего оштукатурирование [1], F — банахово пространство над \mathbb{C} . Рассмотрим вполне интегрируемое [2] уравнение

$$y'h = B(x)hy \quad (h \in E) \quad (1)$$

($y: E \rightarrow F$, $B: E \rightarrow L(E; L(F; F))$), штрих — производная Фреше). Следуя [3], назовем это уравнение ε -дихотомическим, если F допускает такое разложение $F = F_1 \oplus F_2$, что $\|y(x)\| \leq N_1 e^{-\nu_1(x-u)} \|y(u)\|$ ($x \geq u$) для $y(0) \in F_1$, $\|y(x)\| \leq N_2 e^{-\nu_2(u-x)} \|y(u)\|$ ($x \leq u$) для $y(0) \in F_2$ и $\text{Sp}(W(x)F_1, W(x)F_2) \geq \text{const} > 0$, где $N_j = \text{const} > 0$, $W(x)$ — фундаментальный оператор [2], ν_j — равномерно положительные функционалы [1], Sp — взаимный наклон подпространств [3].

Пусть B не зависит от x , т. е. $B(x) \equiv A$. Спектром $\text{Sp} A$ оператора A назовем образ пространства характеров $X(\mathcal{A}_A)$ замкнутой наполненной алгебры $\mathcal{A}_A \subset L(F; F)$, порожденной семейством $(Ah)_{h \in E}$, при отображении $\chi \rightarrow \chi A$. Множество $\text{Sp} A \neq \emptyset$ и слабо компактно.

Теорема 1. Если $\text{Sp} A$ состоит из двух непустых спектральных множеств, одно из которых равномерно положительно, а другое равномерно отрицательно, то уравнение (1) ($B(x) \equiv A$) ε -дихотомично.

Доказательство вытекает из оценки $\ln \|e^{Ax}\| = \max_{\lambda \in \text{Sp} A} \text{Re } \lambda x + o(\|x\|)$ и того факта, что F разлагается в прямую топологическую сумму инвариантных относительно A подпространств.

Если уравнение (1) приводимо в смысле Ляпунова [2] и приведенное уравнение ε -дихотомично, то ε -дихотомично и уравнение (1).

Пусть неоднородное уравнение

$$y'h = B(x)hy + f(x)h \quad (h \in E) \quad (2)$$

вполне интегрируемо и C^r -функция ($r \geq 1$) f ограничена. Возьмем $g \in \mathcal{K}$, $\|g\| = 1$, и какое-либо дополнение E_g^\perp подпространства Rg (т. е. $x = (tx)g + ax$, $ax \in E_g^\perp$ для любого $x \in E$). Обозначим через $G(g, x; t, s)$ главную функцию Грина уравнения $z' = B(ax + tg)gz + f(ax + tg)g$ [3].

Теорема 2. Если уравнение (1) ε -дихотомично, то уравнение (2) имеет ограниченное решение

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(g, x; tx, s) f(ax + sg) g ds.$$

Следствие. В условиях теоремы 2 уравнение (2) имеет семейство ограниченных на \mathcal{K} решений $\varphi(x, a) = \varphi(x) + W(x)a$, $a \in F_1$.

При $B(x) \equiv A$ ограниченное решение $\varphi(x)$ единственно и все решения $\varphi(x, a)$ экспоненциально приближаются на \mathcal{K} к $\varphi(x)$.

Уравнение (1) называется правильным, если существует такое $Q(x) \in L(F; F)$, что функции $\|Q(x)\|$ и $\|Q(x)^{-1}\|$ имеют только ненулевые характеристические функционалы [2] и преобразование $z = Q(x)y$ переводит уравнение (1) в уравнение $z'h = Ahz$ ($h \in E$) с постоянным оператором. Ясно, что нулевое решение правильного уравнения (1) экспоненциально устойчиво на \mathcal{K} тогда и только тогда, когда $\text{Sp} A$ равномерно отрицателен.

Теорема 3. Если нулевое решение правильного уравнения (1) экспоненциально устойчиво на \mathcal{K} , то этим свойством обладает и нулевое решение нелинейного уравнения $y'h = B(x)hy + S(x, y)h$ ($h \in E$), где S удовлетворяет условиям полной интегрируемости и неравенству $\|S(x, y)\| \leq c\|y\|^\alpha$ ($c = \text{const} > 0$, $\alpha = \text{const} > 1$).

Литература

1. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений.— М.: Физматгиз, 1962.— 396 с.
2. Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения.— Минск: Наука и техника, 1983.— 272 с.
3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1970.— 536 с.

Институт математики АН БССР,
г. Минск

Поступила в редакцию
28 июня 1983 г.

*) Полностью рукопись депонирована в ВИНТИ, № 7232—84 Деп.