УДК 514.822

СТРУКТУРА КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

В. Р. Кайгородов

ВВЕДЕНИЕ

Содержание данной статьи составляет: (1) краткое изложение структуры строения связанных рекуррентными соотношениями операторов тензора кривизны и его ковариантных производных для n-мерных римановых пространств произвольной сигнатуры; (2) установление структуры их совершенных алгебр голономии; (3) рассмотрение полусимметрических и s-симметрических пространств, не сводимых к симметрическим; (4) сводка результатов по классификации полей тяготения в ОТО с рекуррентной структурой тензора Римана.

Все рассмотрения в основном ведутся в рамках римановых многообразий V_n класса C^r, где $r=s+4$, s — порядок ковариантного дифференцирования тензора кривизны R_{ijkl} или тензора Риччи $R_{ik}=g^{jl}R_{ijkl}$ исследуемого пространства с фундаментальным метрическим тензором g_{ik}. В тех случаях, когда $r=\infty$ или V_n имеет структуру аналитического многообразия, оговариваемся особо. Всюду ниже ковариантная производная обозначается запятой, в остальном придерживаемся стандартных обозначений, принятых в теории римановых многообразий.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Определение 1. Пространства V_n назовем строго рекуррентными s-го порядка и обозначим символом $\mathcal{D}_n{}^s$, если тензор кривизны пространств удовлетворяет условию:

$$R_{ijkl,m_1m_2\ldots m_s}=\Omega_{m_1m_2\ldots m_s}R_{ijkl}+\Omega_{m_2\ldots m_s}R_{ijkl,m_1}+$$
$$+\Omega_{m_3\ldots m_s}R_{ijkl,m_1m_2}+\ldots+\Omega_{m_s}R_{ijkl,m_1m_2\ldots m_{s-1}}, \qquad (1.1)$$

где $\Omega_{m_1m_2\ldots m_s}\neq 0$, $\Omega_{m_2\ldots m_s},\ldots,\Omega_{m_s}$ — априори произвольные тензоры соответствующей валентности.

Определение 2. Предельный случай $\mathcal{D}_n{}^s$-пространств, когда тензоры рекуррентности $\Omega_{m_2\ldots m_s}$, $\Omega_{m_3\ldots m_s},\ldots,\Omega_{m_s}$ тождественно равны нулю и соотношения (1.1) имеют вид:

$$R_{ijkl,m_1m_2\ldots m_s}=\Omega_{m_1m_2\ldots m_s}R_{ijkl}, \quad \Omega_{m_1\ldots m_s}\neq 0, \tag{1.2}$$

называем $\mathcal{K}_n^s$-пространствами или пространствами s-рекуррентной кривизны.

Тождества Бианки, продифференцированные ковариантно $(s-1)$ раз, с использованием (1.1) приводят к соотношениям:

$$R_{ij[kl}\Omega_{m_1]m_2\ldots m_s}=0. \tag{1.3}$$

Если ввести в рассмотрение n^{s-1} векторов вида:

$$\underset{(a)}{t}_m=\Omega_{mm_2\ldots m_s}\underset{a_2}{h}^{m_2}\ldots\underset{a_s}{h}^{m_s}, \tag{1.4}$$

где $\{\underset{a}{h}^m\}$—векторы репера в точке общего положения пространства V_n, (a)—собирательный индекс, $a_2,\ldots,a_s=\overline{1,n}$, и символом $\mathcal{L}$ обозначить линейную оболочку, натянутую на систему векторов $\{\underset{(a)}{t}\}$, то из (1.3) следует, что любой вектор $t\in\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям:

$$R_{ij[kl}t_{m]}=0. \tag{1.5}$$

Расширим класс рассматриваемых римановых многообразий, объединяя класс $\mathcal{D}_n^s$-пространств и класс пространств V_n, удовлетворяющих условию (1.1), когда $\Omega_{m_1m_2\ldots m_s}=0$, но оставляя в силе выполнение соотношений (1.5).

Определение 3. Пространства V_n, для которых выполнено (1.1), где $\Omega_{m_1m_2\ldots m_s}=0$, а тензоры рекуррентности $\Omega_{m_2\ldots m_s},\ldots$ $\ldots,\Omega_{m_s}$—априори произвольные тензоры соответствующей валентности, и существует, по крайней мере, одно не нулевое векторное поле, удовлетворяющее условиям (1.5), назовем слабо рекуррентными пространствами s-го порядка.

Класс V_n, состоящий из строго рекуррентных и слабо рекуррентных пространств s-го порядка, обозначим символом $\overset{*}{\mathcal{D}}_n^s$.

Частным случаем слабо рекуррентных пространств, когда все тензоры рекуррентности равны нулю и, следовательно, кроме (1,5), выполнено:

$$R_{ijkl,\,m_1m_2\ldots m_s}=0, \tag{1.6}$$

являются s-симметрические пространства V_n, обладающие $\mathcal{L}$-оболочкой.

Класс пространств, состоящий из $\mathcal{K}_n^s$-пространств и s-симметрических V_n с оболочкой $\mathcal{L}$, обозначим, следуя Уолкеру, символом $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^s$.

С одной стороны, пространства $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^s$ составляют предельный частный случай $\overset{*}{\mathcal{D}}_n^s$-пространств и поэтому результаты, касающиеся пространств $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s$ как общего класса, справедливы и для $\overset{*}{\mathscr{K}}_n{}^s$-пространств. С другой стороны, их особое предельное положение приводит к тому, что определенные выводы имеют место лишь для рассматриваемого класса $\overset{*}{\mathscr{K}}_n{}^s$-пространств, что будет каждый раз отмечаться особо.

Определение 4. Тензоры и скаляры вида:

$$H_{ijklm_1m_2\ldots m_{2p-1}m_{2p}}=2^pR_{ijkl,\,[m_1m_2][m_3m_4]\ldots[m_{2p-1}m_{2p}]},$$

$$K_{ikm_1m_2\ldots m_{2p-1}m_{2p}}=g^{jl}H_{ijklm_1m_2\ldots m_{2p-1}m_{2p}},$$

$$\Phi_p=H_{ijklm_1\ldots m_{2p}}H^{ijklm_1\ldots m_{2p}},$$

$$\Psi_p=K_{ikm_1\ldots m_{2p}}K^{ikm_1\ldots m_{2p}},$$

при условии, что $2p$ может принимать значение $0, 2, 4, \ldots$, называются, соответственно, тензорами и скалярами Бохнера I и II рода порядка p.

Римановы пространства подразделяются на классы в зависимости от тождественного обращения в нуль тензора Бохнера I рода порядка p.

Определение 5. Пространство V_n называется $1/2p$-симметрическим ($p=1, 2, \ldots$), если тензор Бохнера 1 рода порядка p на многообразии тождественно равен нулю.

В частности, когда $p=1$ и, следовательно, выполнены условия:

$$R_{klq[j}R^{q}_{\cdot i]m_1m_2}+R_{ijq[l}R^{q}_{\cdot k]m_1m_2}=0, \tag{1.7}$$

римановы пространства называют полусимметрическими.

Переходя к обзору работ, посвященных исследованию пространств $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s$, сразу же отметим, что большинство авторов цитируемых ниже статей занималось рассмотрением при $s=1$ и $s=2$ пространств $\overset{*}{\mathscr{K}}_n{}^s$-предельного частного случая общего класса пространств $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s$. Известна лишь работа Кумера [43], где решаются вопросы установления инвариантно-тензорных признаков для строго рекуррентных пространств $\mathscr{D}_n{}^2$ с положительно определенной метрикой.

Что же касается порядка рекуррентности $s>2$, то имеется ряд статей Такено [85]—[89], рассматривавшего обладающие сферической симметрией четырехмерные пространства $\overset{*}{\mathscr{K}}_4{}^s$ $(s\geqslant 2)$ сигнатуры Лоренца и H-пространства $\overset{*}{\mathscr{K}}_4{}^s$, фигурирующие в общей теории относительности под названием пространств Переса. Такено удалось записать определяющие уравнения рекуррентности для выделенных специальных типов лоренцевых пространств и показать существование пространств $\mathscr{K}_4{}^s$ $(s>2)$, не сводимых к рекуррентным многообразиям порядка $s_1<s$.

В более поздней работе [90] Такено решил подобную задачу для класса лоренцевых пространств V_4, допускающих абелеву трехчленную группу изометрических движений с трехмерными времениподобными орбитами.

История исследования пространств $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^1$ начинается с рассмотрения и изучения класса симметрических римановых многообразий. Симметрические римановы пространства впервые отметил и исследовал П. А. Широков [20]. В последующие годы важность изучения такого класса пространств была подтверждена известными работами Э. Картана, показавшего, какую существенную роль играют симметрические пространства в теории полупростых групп Ли [17]. В работах [21], [22] П. А. Широковым были изучены и найдены симметрические конформно плоские V_n произвольной сигнатуры, а также симметрические пространства первого класса погружения.

Вопрос о симметрических пространствах Эйнштейна лоренцевой сигнатуры был решен А. З. Петровым [19]. В 1968 году были указаны все симметрические V_4 сигнатуры ± 2 [28]. В последнее время эта задача была решена для римановых многообразий сигнатуры $\pm(n-2)$ в общем случае [3]. Что касается симметрических V_n с сигнатурой, отличной от лоренцевой, то здесь можно указать на работы Уолкера [96], [97], где определялись метрики четырехмерных симметрических гармонических пространств нулевой сигнатуры, и В. Н. Абдуллина [1], рассматривавшего вопрос о метриках симметрических V_4 произвольной сигнатуры.

Интерес к пространствам рекуррентной кривизны возник в связи с задачей Адамара: нельзя ли развить теорию гравитастатики и электростатики в духе законов Ньютона и Кулона в рамках римановых многообразий? Ее решение привело к рассмотрению гармонических римановых пространств, которые были разделены Уолкером на центрально-гармонические, вполне гармонические и простогармонические.

Простогармонические V_n при $n=2$ и $n=3$ являются плоскими пространствами. При $n=4$ Рузе [73] указал метрики простогармонических пространств, отличных от плоского пространства и тензор кривизны которых удовлетворял рекуррентному соотношению: $R_{ijkl,m}=\varkappa_m R_{ijkl}$, $\varkappa_m \neq 0$. Так был поставлен вопрос об изучении пространств рекуррентной кривизны, которые Рузе назвал «каппа-пространствами». Он же первый нашел все $\mathcal{K}_3^1$-пространства [74] и все простогармонические пространства $\mathcal{K}_4^1$ [75].

К этим работам тесно примыкает работа Уолкера [96], где решалась задача установления вида тензора кривизны $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^1$-пространств, допускающих систему из r $(r \leqslant n-2)$ ковариантно постоянных векторных полей. Уолкер разбил пространства $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^1$ в зависимости от числа ковариантно постоянных векторов допускаемых пространством, на простые $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^1$ ($r=n-2$) и не простые $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^1$ ($r<n-2$). Вслед за работой Уолкера Моджи [56] исследовал не простые $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^1$-пространства, являющиеся пространствами Эйнштейна с нулевым тензором Риччи.

Перенося идею рекуррентности тензора кривизны многообразия V_n на более высокие порядки, А. Лихнерович ввел в литературу и стал рассматривать пространства $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^2$, ограничиваясь положительным мероопределением. Он доказал [46], что каждое компактное с ненулевой скалярной кривизной $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^2$-пространство ($ds^2>0$) является $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^1$-пространством. Позднее Ротер показал [69], что все $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^2$-пространства с положительно определенной метрикой являются $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^1$-пространствами, отказавшись от дополнительных условий компактности многообразия и не обращения в нуль скалярной кривизны. Он же положил начало исследованиям пространств $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^2$ с неопределенной метрической формой, перенося задачи Уолкера на случай $s=2$ [70]. Для пространств $\mathcal{K}_n^2$ ($R_{ijkl,\,pq}=a_{pq}R_{ijkl}$, $a_{pk}\neq 0$) Ротер устанавливает, что, если один из скаляров $\theta_1=a_{pq}a^{pq}$ или $\theta_2=a_p^p$ не обращается в нуль, то тензор кривизны строго 2-рекуррентного пространства с ненулевой скалярной кривизной R может быть выражен только через R и тензор Риччи.

Чаудхури в статье [31] показывает, что если риманово пространство V_n, представляющее собой приводимое многообразие $V_m\times V_{n-m}$ ($m>0$, является $\mathcal{K}_n^2$-пространством, то при $m>2$ имеем: $V_n=\mathcal{K}_m^2\times E_{n-m}$, где E_{n-m} суть плоское пространство, а при $m=2$ — $V_n=V_2\times E_{n-2}$, где V_2 — любое класса C^r двумерное риманово пространство не постоянной кривизны, E_{n-2} — плоское пространство. Там же доказывается утверждение, что всякое конформно плоское $\mathcal{K}_n^2$-пространство имеет скалярную кривизну, равную нулю. В 1968 году Прованович [68] обобщает эти результаты на случай полуприводимых $\mathcal{K}_n^2$-пространств.

В работе [32] Чаудхури исследует $\mathcal{K}_n^2$-пространства, являющиеся в то же время конформно симметрическими: $C_{ijkl,\,m}=0$, где C_{ijkl} — тензор Вейля конформной кривизны, и доказывает, что они непременно являются конформно плоскими. В этой же статье рассмотрены свойства пространств $\mathcal{K}_n^2$, допускающих конкуррентные и конциркулярные векторные поля.

В последнее время наиболее важные результаты в исследовании структуры кривизны $\mathcal{K}_n^2$-пространств сигнатуры $\pm(n-2)$ были получены Томпсоном [91]—[93]. В первой работе, опираясь на результат Чаудхури об обращении в нуль скалярной кривизны для каждого конформно плоского пространства $\mathcal{K}_n^2$

и на тот факт, что след тензора рекуррентности равен нулю, он доказал теорему: всякое конформно плоское пространство $\mathcal{K}_n^2$ ($n \geqslant 3$) с неопределенной метрикой является однорекуррентным, а каждое конформно плоское $\mathcal{K}_n^2$-пространство с положительным мероопределением суть плоское пространство.

Этой работой было положено начало решению важной задачи в теоряии $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^s$-пространств с неопределенной метрикой о нахождении классов исследуемых многообразий, для которых имела бы место теорема Лихнеровича—Ротера. Указанная проблема частично была решена Томпсоном для четырехмерных пространств 2-рекуррентной кривизны лоренцевой сигнатуры. Он доказал: если скалярная кривизна R пространства-времени $\mathcal{K}_4^2$ отлична от нуля, то теорема Лихнеровича—Ротера справедлива. Такой же результат был получен Томпсоном и для n-мерных $\mathcal{K}_n^2$-пространств сигнатуры равной $\pm(n-2)$.

В случае, когда скалярная кривизна равна нулю, вопрос о пространствах $\mathcal{K}_n^2$, сводящихся к $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^1$-пространствам, остался открытым. Для четырехмерных пространств-времен с нулевой скалярной кривизной Томпсону удалось лишь показать, что они относятся к классу пространств комплексно рекуррентной конформной кривизны: $\Gamma_{ijkl,\,m} = \Phi_m \Gamma_{ijkl}$, где $\Gamma_{ijkl} = C_{ijkl} + iC^*_{ijkl}$, C_{ijkl} — тензор Вейля конформной кривизны, C^*_{ijkl} — однодуальный тензор Вейля, Φ_m — некоторый комплексный вектор рекуррентности.

В 1972 году МакЛенаган и Лерой [51], а затем МакЛенаган и Томпсон [52] предприняли более подробное исследование пространств-времен с комплексно рекуррентной структурой тензора конформной кривизны. Было показано, что искомые пространства относятся к типам $\mathcal{D}$ и $\mathcal{N}$ диаграммы Петрова—Пенроуза, и была решена задача определения метрик исследуемых пространств в случае, когда вектор рекуррентности Φ_m является вещественным. Тем самым, были получены обобщения плосковолновых решений уравнений поля Эйнштейна в ОТО, предложенных в свое время Пересом, Кундтом, Элерсом [6].

Перечисленный цикл работ затрагивает, на наш взгляд, одно из основных направлений в проблеме исследования пространств $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^1$ и $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^2$, состоящее в установлении структуры строения тензора кривизны, нахождении инвариантно-тензорных характеристик и свойств рассматриваемых пространств, в решении вопроса: при выполнении каких условий $\overset{*}{\mathcal{K}}_n^2$-пространства являются пространствами рекуррентной кривизны более низкого порядка. К упомянутому циклу исследований необходимо отнести работы ряда других авторов (см., например, [5], [34]—[37], [45], [57], [58]). Однако мы не останавливаемся на хотя бы кратком описании их результатов по той причине, что в данных статьях, как правило, предлагаются методически улучшенные доказательства теорем и утверждений, полученные ранее в работах, выделенных нами в приводимом обзоре.

Второе направление, связанное с вопросами рекуррентности кривизны пространства и изучением более широкого класса пространств, чем симметрические многообразия, вылилось в рассмотрение конформно симметрических, конформно рекуррентных первого ($C_{ijkl,m}=\omega_m C_{ijkl}$) и второго ($C_{ijkl,mn}=\omega_{mn} C_{ijkl}$) порядков римановых многообразий $C\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$, проективно рекуррентных пространств $W\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^1$ ($W^l_{\cdot jkl,m}=\omega_m W^l_{\cdot jkl}$, $W^l_{\cdot jkl}$ — тензор проективной кривизны), рекуррентных пространств аффинной связности, рекуррентных пространств Финслера. К этому направлению относятся работы Моура [59], Мургеску [60], Гупта [40], Адати и Миязавы [24]—[26], Матсумото [49], [50], Прованович [67] и других [27], [29], [33], [44], [54]. В цитируемых работах устанавливаются условия того, чтобы $C\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$, $W\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$-пространства ($s=1, 2$) были либо пространствами рекуррентной кривизны либо Риччи-рекуррентными, разбираются вопросы метризуемости рекуррентных пространств аффинной связности, решаются задачи существования рекуррентных гиперповерхностей в пространствах рекуррентной кривизны. Ряд работ посвящен исследованию свойств искомых многообразий, допускающих торсовидные, конциркулярные, конкурентные или рекуррентные векторные поля [30]—[37], [39], [47], [42], [48], [49], [53], [55], [61]—[63], [65], [66], [71], [95].

Третье направление в теории многообразий рекуррентной кривизны составляет цикл работ, связанный с инвариантно групповым исследованием пространств $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$, $C\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$, $W\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$ ($s=1, 2$) и пространств аффинной связности с рекуррентным тензором кривизны. Здесь необходимо отметить работу Главатого [41], рассмотревшего группы голономии и группы изометрических движений пространств $\mathcal{K}_n{}^1$, работы Ротера и Глодека [38], [39], [72], изучавших группы проективных и конформных движений, допускаемых рекуррентными пространствами, Такано [80]—[84], исследовавшего вопрос о группах аффинных движений в пространствах с рекуррентной структурой кривизны различных типов и ряда других авторов [67], [72], [77]—[79].

В данном обзоре не приводятся упоминания и ссылки на многочисленные работы, которые посвящены различным теоретико-групповым обобщениям симметрических многообразий, основанным на отказе от инволютивного характера автоморфизмов группового пространства. Причина заключается в том, что вопросы аналитической характеристики тензора кривизны и ковариантных производных тензора кривизны исследуемых классов пространств еще мало изучены. Поэтому вопрос о том, имеется ли какая-либо связь между групповыми подходами к обобщению симметрических многообразий и подходом, основанным на выполнении более слабых требований для ковариантных производных тензора кривизны (как это принимается в случае пространства $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s$), остается пока открытым.

В заключение обзора необходимо подчеркнуть следующее. Доказательства и выводы цитируемых выше авторов в теории $\mathscr{K}_n{}^2$-пространств существенным образом опираются на тот факт, что порядок рекуррентности $s=2$. Низкий порядок рекуррентности позволяет прямым счетом проверить выполнение тех или иных тензорных условий. Однако этот путь приводит к весьма громоздким выкладкам и неприемлем при исследовании рекуррентных многообразий при $s>2$. По этой же причине ими не были включены в рассмотрение 2-симметрические пространства.

Нами [7]—[16] предложен метод алгебраической классификации $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s$-пространств, который позволяет установить структуру кривизны разбитых на определенные подклассы строго и слабо рекуррентных многообразий. Использование полученных результатов позволяет установить независимо от сигнатуры метрики и порядка рекуррентности ряд положений, из которых в качестве следствия вытекают утверждения вышеупомянутых авторов. Приведем в сжатой форме выводы о структуре кривизны $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s$-пространств.

§ 2. СХЕМА АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ И СТРУКТУРА КРИВИЗНЫ

1°. Ряд полезных соотношений для тензора кривизны, тензора Риччи и тензора рекуррентности $\Omega_{m_1 m_2 \ldots m_s}$ пространств $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s$ может быть получено непосредственно из условий рекуррентности (1.1) и условий (1.5).

Теорема 2.1. Для пространств $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s$ выполнено:

$$\left.\begin{array}{l}(a)\ R_{ijkl}R^{ijkl}-4R_{ij}R^{ij}+R^2=0,\\ (b)\ R^{ijkl}(R_{i[k}R_{l]j}-RR_{ijkl})=0,\\ (c)\ \Phi_1-8M^{ijkl}M_{ijkl}+4\Psi_1=0,\\ (d)\ \Psi_1-4T^{ij}T_{ij}=0,\end{array}\right\},$$

где $M_{ijkl}=2R_{i[k}R_{l]j}-R_i{}^mR_{mjkl}$, $T_{ij}=\frac{1}{2}RR_{ij}-R_i{}^mR_{mj}$.

Докажем, например, выполнение первого условия. Свернув (1.5) с R^{ijkl} и используя свертку (1.5) с g^{im}, $g^{jl}g^{im}$, получим:

$$t_m\Phi_0+4R^{l[j}t^{i]}R_{ijlm}=0,$$

откуда, в силу следствия: $t^mR_{mjkl}=2R_{j[l}t_{k]}$, вытекает равенство: $t_m(\Phi_0+R^2-4\Psi_0)=0$, что эквивалентно (a).

Теорема 2.2. Если для пространства $\mathscr{D}_n^s$ тензор рекуррентности $\Omega_{m_2 m_3 \dots m_s}$ равен нулю, то первый тензор рекурентности симметричен по первой паре индексов: $\Omega_{m_1 m_2 m_3 \dots m_s} = \Omega_{m_2 m_1 m_3 \dots m_s}$. Данное условие всегда имеет место для $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^s$-пространств.

Действительно, из дифференциальных тождеств Риччи для любого V_n следует (легко убедиться непосредственной проверкой), что $H_{ijklm_1m_2} + H_{klm_1m_2ij} + H_{m_1m_2ijkl} = 0$. Если предварительно продифференцировать эти соотношения ковариантно $(s-2)$ раза и использовать (1.1), то получим:

$$R_{ijkl} \underset{(b)}{U}_{m_1m_2} + R_{klm_1m_2} \underset{(b)}{U}_{ij} + R_{m_1m_2ij} \underset{(b)}{U}_{kl} = 0,$$

где $\underset{(b)}{U}_{m_1m_2} = \Omega_{]m_1m_2]m_3 \dots m_s} h^{m_3}_{b_3} \dots h^{m_s}_{b_s}$.

Применяя собирательные индексы бивекторного пространства $\left(A,\ B,\ C = 1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}\right)$, имеем:

$$R_{AB} \underset{(b)}{U}_C + R_{BC} \underset{(b)}{U}_A + R_{CA} \underset{(b)}{U}_B = 0. \qquad (2.1)$$

Покажем, что $\underset{(b)}{U}_A = 0$, когда имеется хотя бы одна компонента R_{BC}, отличная от нуля. Если предположить обратное, т. е. $U_\alpha \neq 0$ (α — фиксированный индекс), то из (2.1) при $A = B = C = \alpha$ получим, что $R_{\alpha\alpha} = 0$, а при $B = C = \alpha$ (A — произвольный индекс) — $R_{A\alpha} = 0$. Наконец, когда $C = \alpha$, A и B — произвольные индексы, из (2.1) с учетом равенства нулю компонент $R_{A\alpha}$ получим, что $R_{AB} = 0$. Пришли к противоречию. Следовательно, все $\underset{(b)}{U}_A = 0$. Последние соотношения эквивалентны условиям симметричности.

Следствие 2.1. Для пространств $\mathscr{K}_n^1$ вектор рекуррентности Ω_m суть градиент.

Следствие 2.2. Пространства $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^s$ относятся к классу $1/2p$-симметрических многообразий.

Из определения пространств $\overset{*}{\mathscr{D}}_n^s$ непосредственно следуют два следующих утверждения:

(1) Не существует строго рекуррентных s-го порядка пространств V_n со скалярной кривизной $R = \mathrm{const} \neq 0$.

(2) Если пространства $\overset{*}{\mathscr{D}}_n^s$ $(n > 2)$ являются пространствами Эйнштейна ($R_{ij} = \varkappa g_{ij}$, $\varkappa$ — const), то необходимо следует, что $\varkappa = 0$.

Нижеследующая теорема решает вопрос о размерности оболочки $\mathscr{L}$, натянутой на совокупность векторов $\{\underset{(a)}{t}\}$, полученных с помощью правила (1.4).

Теорема 2.3. Максимальное число линейно независимых векторов среди системы $\{\underset{(a)}{t}\}$ в неплоском $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s$-пространстве не превышает двух.

Доказательство этого факта вытекает из анализа условий (1.5). Предполагая, что число линейно независимых векторов в системе $\{\underset{(a)}{t}\}$ превышает 2, скажем, равно трем, и выбирая репер таким образом, чтобы линейно независимые векторы $t^m_{(\sigma)}$ $(\sigma=1, 2, 3)$ имели вид: $t_{(\sigma)m} \overset{*}{=} \delta^\sigma_m$, из (1.5) получим, что $R_{ijkl} \overset{*}{=} 0$. Если же $\sigma \leqslant 2$, то система уравнений (1.5) допускает нетривиальные решения.

2^0. Доказанная теорема является решающей для предлагаемой ниже алгебраической классификации $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s$-пространств. Те пространства, для которых $\dim \mathscr{L}=2$, называем $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(A)$-пространствами. Если же $\dim \mathscr{L}=1$, то употребляем термин $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(B)$-пространства. Можно доказать [11], что пространства $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(A)$ подразделяются на три непересекающихся класса в зависимости от следующих ситуаций: (1) базис оболочки $\mathscr{L}$ составляют два неизотропных и ортогональных между собою вектора ($\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(A_1)$-пространства). В этом случае двумерная метрика $\mathscr{L}$ является невырожденной; (2) базис $\mathscr{L}$ составляют два взаимно ортогональных вектора, один из которых изотропен, другой единичен ($\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(A_2)$-пространства). Двумерная метрика $\mathscr{L}$ является вырожденной ранга 1; (3) базис $\mathscr{L}$ состоит из двух ортогональных изотропных векторов ($\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(A_3)$—пространства). Метрика $\mathscr{L}$ вырожденная ранга 0.

Пространства $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(B)$ по аналогичному принципу подразделяются на два типа в зависимости от того, является ли базисный вектор t неизотропным ($\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(B_1)$-пространства) или изотропным ($\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(B_2)$-пространства).

3^0. Как показано нами в [10], [11], для $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(A_i)$-пространств $(i=1, 2, 3)$ характеристика Сегре тензора Риччи определяется однозначным образом. В случае же пространств $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(B_k)$ $(k=1, 2)$ приходится дополнительно выделять подклассы в зависимости от вида характеристики λ-матрицы для тензора Риччи. С использованием указанной классификации для каждого из типов A_i, B $(i=1, 2, 3;\ k=1, 2)$ могут быть доказаны следующие утверждения.

Теорема 2.4. Скалярная кривизна R пространств $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(A_1)$ необходимо отлична от нуля, а тензор кривизны и тензор

Риччи связаны условиями:

$$\frac{1}{2} R R_{ijkl} = R_{ik} R_{jl} - R_{il} R_{jk}. \tag{2.2}$$

Их структура строения следующая:

$$(a)\ R_{ijkl} = \frac{1}{2} R e_1 e_2 V_{ij} V_{kl}; \quad (b)\ R_{ij} = \frac{1}{2} R (e_1 k_i k_j + e_2 l_i l_j), \tag{2.3}$$

где $V_{ij} = 2k_{[i} l_{j]}$, $\{k, l\}$ — базис $\mathscr{L}$, $k^2 = e_1 = \pm 1$, $l^2 = e_2 = \pm 1$, $(k, l) = 0$.

Теорема 2.5. Скалярная кривизна R пространств $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(A_2)$ необходимо равна нулю. Структура кривизны описывается соотношениями:

$$(a)\ R_{ijkl} = \varepsilon V_{ij} V_{kl}; \quad (b)\ R_{ij} = e k_i k_j, \tag{2.4}$$

где $V_{ij} = 2k_{[i} l_{j]}$, $\{k, l\}$ — базис $\mathscr{L}$, $k^2 = 0$, $l^2 = e_2 = \pm 1$, $(k, l) = 0$, $\varepsilon = \pm 1$, $e = \pm 1$.

Теорема 2.6. Пространства $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(A_3)$ необходимо являются пространствами Эйнштейна с нулевым тензором Риччи. Их тензор кривизны имеет строение вида (2.4a), где $V_{ij} = 2k_{[i} l_{j]}$, $\{k, l\}$ — базис $\mathscr{L}$, $k^2 = 0$, $l^2 = 0$, $(k, l) = 0$.

Отметим три следующих факта, имеющих место для общего класса $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(A)$-пространств.

Теорема 2.7. Пространства $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(A)$ принадлежат к классу полусимметрических многообразий. Тензор кривизны и его ковариантная производная связаны с первым и вторым тензором рекуррентности следующим соотношением:

$$R_{ijkl} \Omega_{[m_1 m_2] m_3 \ldots m_s} + R_{ijkl,\,[m_1} \Omega_{m_2] m_3 \ldots m_s} = 0.$$

Теорема 2.8. Если первый тензор рекуррентности пространств $\mathscr{D}_n{}^s(A)$ симметричен по первой паре индексов, то он представим в виде:

$$\Omega_{m_1 m_2 m_3 \ldots m_s} = k_{m_1} k_{m_2} \overset{(1)}{A}_{m_3 \ldots m_s} + 2k_{(m_1} l_{m_2)} \overset{(2)}{A}_{m_3 \ldots m_s} + $$

$$+ l_{m_1} l_{m_2} \overset{(3)}{A}_{m_3 \ldots m_s}, \tag{2.5}$$

где $\{k, l\}$ — базис $\mathscr{L}$, соотношения (2.5) с необходимостью имеют место для $\mathscr{K}_n{}^s(A)$-пространств.

Теорема 2.9. В $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(A)$-пространствах существует система из $(n-2)$ взаимно ортогональных векторов, являющихся базисными векторами ортогонального дополнения к оболочке $\mathscr{L}$, удовлетворяющих условию: $\underset{\sigma}{h}{}^m R_{mjkl} = 0$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, n-2)$.

Отметим, что для пространств $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(A_2)$ в их число входит изотропный базисный для $\mathscr{L}$ вектор k, для $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(A_3)$-пространств оба изотропных базисных для $\mathscr{L}$ вектора k и l.

4°. Что касается структуры кривизны пространств типа B, то укажем на две теоремы, благодаря которым удается в дальнейшем добиться подразделения рассматриваемых типов многообразий на подклассы в зависимости от характеристики Сегре тензора Риччи.

Теорема 2.10. Тензор кривизны $\overset{*}{\mathcal{D}}_n^s(B_1)$-пространств имеет следующее строение:

$$R_{ijkl}=2\varepsilon(t_l R_{k[i}t_{j]}+t_k R_{l[j}t_{i]}, \tag{2.6}$$

где R_{ik} — тензор Риччи, $t^2=\varepsilon=\pm 1$, t — базисный вектор $\mathcal{L}$.

Теорема 2.11. В случае пространств $\overset{*}{\mathcal{D}}_n^s(B_2)$ всегда существует такой симметричный тензор S_{ik} ранга $r<n$, что выполнено:

$$R_{ijkl}=2(t_l S_{j[i}t_{k]}+t_j S_{i[k}t_{l]})\ (t^2=0). \tag{2.7}$$

Равенства (2.6) позволяют уточнить структуру строения тензора кривизны в репере за счет одновременного приведения пары форм, порождаемых метрическим тензором и тензором Риччи.

Для пространств $\overset{*}{\mathcal{D}}_n^s(B_1)$ сигнатуры $\pm(n-2)$ (сигнатура Лоренца для n-мерных пространств) имеем 5 подклассов в зависимости от характеристики тензора Риччи и нормы вектора t.

Для тензора кривизны может быть дано его конкретное представление через $(n-1)$ простых бивекторов вида: $\underset{\sigma}{V}_{ij}=t_i\underset{\sigma}{h}_j-\underset{\sigma}{h}_i t_j$, где $\{t, \underset{\sigma}{h}\}$ $(\sigma=2, \ldots, n)$ — векторы канонического репера.

Приведем сводку результатов.

I. $R_{ijkl}=\sum\limits_{\sigma=2}^{n}\lambda_\sigma \underset{\sigma}{V}_{ij}\underset{\sigma}{V}_{kl}$,

где $\sum\limits_{\sigma=2}^{n}\lambda_\sigma=-\frac{1}{2}R$.

II. $R_{ijkl}=\lambda_2\underset{2}{V}_{ij}\underset{2}{V}_{kl}-\sum\limits_{\tau=3}^{n}\lambda_\tau\underset{\tau}{V}_{ij}\underset{\tau}{V}_{kl}$,

где $\sum\limits_{\sigma=2}^{n}\lambda_\sigma=-\frac{1}{2}R$.

III. $$R_{ijkl}=(\alpha-\beta)\underset{2}{V}_{ij}\underset{2}{V}_{kl}+\sqrt{2}\,\beta(\underset{2}{V}_{ij}\underset{3}{V}_{kl}+\underset{3}{V}_{ij}\underset{2}{V}_{kl})-$$
$$-(\alpha+\beta)\underset{3}{V}_{ij}\underset{3}{V}_{kl}+\sum_{\tau=4}^{n}\lambda_\tau\underset{\tau}{V}_{ij}\underset{\tau}{V}_{kl},$$

где $2\alpha+\sum\limits_{\tau=4}^{n}\lambda_\tau+\frac{1}{2}R=0$.

IV. $R_{ijkl}=\lambda(\underset{2}{V}_{ij}\underset{3}{V}_{kl}+\underset{3}{V}_{ij}\underset{2}{V}_{kl})+e\underset{3}{V}_{ij}\underset{3}{V}_{kl}-\sum_{\tau=4}^{n}\lambda_\tau \underset{\tau}{V}_{ij}\underset{\tau}{V}_{kl}$,

где $2\lambda+\sum_{\tau=4}^{n}\lambda_\tau+\frac{1}{2}R=0,\ e=\pm1$.

V. $R_{ijkl}=\lambda(\underset{2}{V}_{ij}\underset{4}{V}_{kl}+\underset{4}{V}_{ij}\underset{2}{V}_{kl}-\underset{3}{V}_{ij}\underset{3}{V}_{kl})+e(\underset{3}{V}_{ij}\underset{4}{V}_{kl}+\underset{4}{V}_{ij}\underset{3}{V}_{kl})-$
$-\sum_{\tau=5}^{n}\lambda_\tau \underset{\tau}{V}_{ij}\underset{\tau}{V}_{kl}$,

где $3\lambda+\sum_{\tau=5}^{n}\lambda_\tau+\frac{1}{2}R=0,\ e=\pm1$.

Аналогичная классификация может быть проведена для $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_1)$-пространств с другими типами сигнатуры фундаментальной метрической формы.

Согласно теореме (2.7), класс пространств $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(A)$ относится к классу полусимметрических римановых многообразий, являющемуся, в свою очередь, подклассом $1/2p$-симметрических V_n $(p\geqslant 2)$. Поэтому важно выяснить, не принадлежат ли $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_1)$-пространства к классу $1/2p$-симметрических пространств при каком-либо конкретном значении номера p? Ответ отрицателен. Имеет место

Т е о р е м а 2.12. $1/2p$-симметрических пространств $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s$, относящихся к типу B_1, не существует ни при каком значении номера p $(p=1, 2, \ldots)$.

Поскольку пространства $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$ относятся к $1/2p$-симметрическим пространствам, то как следствие данной теоремы получаем, что пространств $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$, относящихся к типу B_1, также не существует.

Для пространств $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_2)$ из (2.7) следует, что тензор Риччи имеет строение вида:

$$R_{ik}=St_it_k-2S_{(i}t_{k)}, \tag{2.8}$$

где $S=g^{ik}S_{ik}$, $S_j=S_{jk}t^k$. Ранг тензора Риччи $r\leqslant 2$ и поэтому представляется целесообразным разбить класс пространств $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_2)$ на подклассы в зависимости от характеристики Сегре λ-матрицы $(R_{ij}-\lambda g_{ij})$ и ранга матрицы (R_{ij}). Рассматривая последовательно все три возможности, когда ранг (R_{ij}) равен нулю, единице и двум, приходим в случае произвольной сигнатуры к шести подклассам пространств $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_{2k})$ $(k=1, 2, \ldots, 6)$, относительно которых могут быть сформулированы и доказаны следующие результаты.

Теорема 2.13. Пространства $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_{2i})$ $(i=1,2)$ принадлежат к классу полусимметрических многообразий. Их тензор кривизны может быть представлен как квадратичная форма лишь от $(n-2)$ линейно независимых простых бивекторов $\underset{\sigma}{V}_{ij}=t_i \underset{\sigma}{h}_j - \underset{\sigma}{h}_i t_j$ $(\sigma=3,\ldots n)$:

$$R_{ijkl}=\sum_{\sigma,\tau=3}^{n} H^{\sigma\tau}\underset{\sigma}{V}_{ij}\underset{\tau}{V}_{kl}.$$

При этом $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_{21})$-пространства суть пространства Эйнштейна (в (2.8) $S=0$, $S_j=0$), $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_{22})$-пространства с тензором Риччи вида $R_{ij}=St_it_j$ $(S\neq0)$. Скаляры Бохнера первого и второго рода любого порядка $p=0,1,2,\ldots$ тождественно равны нулю.

Пространства $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_{23})$, $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_{24})$ характеризуются тем, что для них скалярная кривизна $R\neq0$ и в (2.8) $S_j=\frac{1}{2}Rh_j$, где $h^2=0$, $(h,t)=-1$. Пространства $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_{23})$ выделяются тем, что для них инвариант $S=0$.

Для пространств $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_{25})$, $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_{26})$ как скалярная кривизна, так и инвариант S в (2.8) равны нулю, но в случае подкласса B_{25} S_j суть единичный вектор, ортогональный к базисному вектору t, а в случае $B_{26}-S_j$—изотропный вектор, ортогональный к базисному вектору.

Во всех четырех перечисленных подклассах тензор кривизны суть квадратичная форма лишь от $(n-1)$ линейно независимых простых бивекторов. Используя этот факт, удается доказать, что пространств $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_{2k})$ $(k=3, 4, 5, 6)$, относящихся к классу $1/2p$-симметрических V_n, не существует.

Как следствие последнего результата и на основании теорем (2.7), (2.12), (2.13) получаем важнейшую теорему в теории $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$-пространств.

Теорема 2.14. Пространства $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$ суть полусимметрические многообразия, для них всегда выполнены условия (1.7).

5⁰. Наконец, приведем основные результаты, касающиеся конформно плоских $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s$-пространств и пространств $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$.

Теорема 2.15. Если конформно плоские пространства $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s$ $(n>2)$ имеют скалярную кривизну, отличную от нуля, то они относятся к типу B_1. Тензор кривизны и тензор Риччи имеют следующее строение:

$$R_{ijkl}=\frac{2R}{n-1}et_{[j}g_{i][k}t_{l]},\quad R_{ij}=\frac{(n-2)R}{2(n-1)}e\left(t_it_j+\frac{e}{n-2}g_{ij}\right),$$

где $t^2=e=\pm1$.

Теорема 2.16. Всякое конформно плоское пространство $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s$ $(n>2)$, имеющее скалярную кривизну, равную нулю, необходимо относится к подклассу B_{22}. Тензор кривизны и тензор Риччи имеют вид:

$$R_{ijkl}=4\Lambda t_{[j}g_{i][k}t_{l]}, \quad R_{ij}=(n-2)\Lambda t_i t_j,$$

где $t^2=0$. Вектор t задает изотропно геодезическую конгруэнцию.

Как указывалось, выше, тензор рекуррентности $\mathcal{K}_n{}^s$-пространств $(s\geqslant 2)$ симметричен по первой паре индексов и для пространств типа A он имеет вид (2.5), а для пространств типа B он представим в виде $\Omega_{m_1 m_2 \ldots m_s}=t_{m_1}t_{m_2}\Phi_{m_3\ldots m_s}$, где t — базисный вектор $\mathcal{L}$, $\Phi_{m_3\ldots m_s}$ — априори произвольный тензор.

Каковы пространства $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$ в зависимости от того, равна нулю скалярная кривизна или отлична от нуля?

Теорема 2.17. Если $R\neq 0$, то $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$-пространства суть пространства $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s(A_1)$. Их тензор кривизны удовлетворяет условиям (2.2). Если же $R=0$, то $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$-пространства являются либо пространствами Эйнштейна и относятся к подклассам A_3, B_{21}, либо $R_{ij}=St_it_j$ и они относятся к подклассу B_{22}.

Впервые на формулу (2.2) в случае пространств 2-рекуррентной кривизны указал Ротер [69]. Однако, кроме требования не обращения в нуль скалярной кривизны, при доказательстве равенства (2.2) им были выдвинуты дополнительные условия, чтобы был отличен от нуля, по крайней мере, один из двух инвариантов: $\theta_1=\Omega_{m_1m_2}\Omega^{m_1m_2}$, $\theta_2=\Omega^m_m$. Как следует из заключения первой части теоремы (2.17), дополнительные требования совершенно не нужны и результат Ротера переносится на случай пространств $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$ для любого натурального s лишь при единственном условии не обращения в нуль скалярной кривизны.

В свое время Прованович [67], используя метод Яно и Бохнера [23], доказала, что всякое компактное $(ds^2>0)$ пространство $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s\subset R\neq 0$, являющееся пространством Эйнштейна и допускающее не гомотетическое инфинитезимальное конформное преобразование, суть пространство постоянной кривизны.

Из теоремы (2.17) легко может быть получен в качестве следствия результат Прованович, но уже без дополнительных требований компактности многообразия и существования однопараметрической нетривиальной конформной группы Ли преобразований.

Обратимся к рассмотрению конформно плоских s-рекуррентных и s-симметрических пространств.

Учитывая, что конформно плоских $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(A)$-пространств не существует, а также тот факт, что пространства $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$ не могут принадлежать к типу B_1, приходим к следующему выводу.

Теорема 2.18. Всякое конформно плоское пространство $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$ необходимо имеет скалярную кривизну равную нулю. Оно относится к типу B_{22}.

Данная теорема обобщает результат Чаудхури [31], [32] о равенстве нулю скалярной кривизны конформно плоских $\mathcal{K}_n{}^2$-пространств на случай произвольного порядка рекуррентности s, включая также и s-симметрические многообразия.

Следствие. Всякое конформно плоское $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$-пространство с положительно определенной метрикой суть плоское пространство.

Действительно, поскольку отличные от плоских конформно плоские пространства $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$ принадлежат к типу B_{22}, то их метрика с необходимостью индефинитная, так как базисный вектор оболочки $\mathcal{L}$ суть изотропный вектор.

Таким образом, результат, указанный Томпсоном в работе [91] для конформно плоских $\mathcal{K}_n{}^2$-пространств с $ds^2>0$, справедлив для всех с положительным мероопределением конформно плоских s-симметрических пространств с линейной оболочкой $\mathcal{L}$ и пространств s-рекуррентной кривизны при любом значении s.

В заключение этого пункта приведем пример класса s-симметрических многообразий $(R_{ijkl,m_1 \ldots m_s}=0)$ лоренцевой сигнатуры, не сводимых к $(s-r)$-симметрическим V_n $(r=1, 2, \ldots, s-1)$. Их линейный элемент имеет вид:

$$ds^2=-dx^{2^2}-dx^{3^2}+2dx^4\left[dx^1+(\alpha_{pq}x^p x^q+\beta_p x^p)\,dx^4\right],$$

где β_p — произвольные функции от x^4, а функции α_{pq} суть полиномы степени $(s-1)$:

$$\alpha_{pq}=\overset{(1)}{m}_{pq}(x^4)^{s-1}+\overset{(2)}{m}_{pq}(x^4)^{s-2}+\ldots+\overset{(s-1)}{m}_{pq}x^4+\overset{(s)}{m}_{pq},$$

где, в свою очередь, $\overset{(l)}{m}_{pq}$ — произвольные константы $l=1, \ldots, s$; $p, q=2,3$), причем $\overset{(1)}{m}_{pq}\neq 0$.

§ 3. ГРУППЫ ГОЛОНОМИИ ПРОСТРАНСТВ $\overset{*}{\mathcal{D}}{}_n^s$

Метод групп голономии является наиболее существенным из методов исследования структуры кривизны римановых многообразий, так, согласно теореме Амброса—Зингера, операторы тензора кривизны и его ковариантных производных принадлежат алгебре голономии пространства. В данном разделе мы приведем ряд результатов исследования того класса строго рекуррентных и слабо рекуррентных пространств $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s$, для которых группы голономии являются совершенными.

Всюду в дальнейшем рассматриваемые пространства считаем односвязными. Известно [18], что в этом случае группа голономии G_ρ связана как образ связного пространства петель при непрерывном отображении и поэтому вместо G_ρ можно рассматривать алгебру Ли голономии Γ_ρ.

Говорят, что риманово многообразие обладает совершенной группой голономии, если вся алгебра голономии Γ_ρ порождается лишь операторами кривизны $R(x, y)$ для любых $x, y \in T_M$.

Результаты исследования структуры кривизны многообразий $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s$ [10]—[12] позволяют полностью решить вопрос о классе $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s$-пространств с совершенной группой голономии. Приведем основные утверждения.

Теорема 3.1. Если группа G_ρ является совершенной группой голономии пространства $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s$, то ее порядок удовлетворяет неравенству $1 \leqslant \rho \leqslant n-1$, а генераторами являются простые бивекторы вида: $\underset{\alpha}{B}_{ij} = 2t_{[i}\underset{\alpha}{h}_{j]}$, где $t \in \mathcal{L}$, $\{\underset{\alpha}{h}\}$—система ρ линейно независимых ковекторов.

Теорема 3.2. Если группа голономии пространства $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(A)$ совершенна, то $\rho = 1$ исходное многообразие суть пространство $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^1(A)$.

Тем самым вопрос о рекуррентных многообразиях типа A с совершенной алгеброй голономии полностью решен, так как виды линейных элементов для $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(A)$-пространств при $s=1, 2$ установлены в работе [12] (см. § 4).

Требование, чтобы группа голономии для многообразий класса B_1 была совершенной, приводит нас к противоречивому условию: $\dim \mathcal{L} > 1$, в то время как для рассматриваемых пространств $\dim \mathcal{L} = 1$. Таким образом, для пространств $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_1)$ группа голономии не может быть совершенной.

Рекуррентные многообразия $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_2)$ в зависимости от вида характеристики Сегре тензора Риччи, как нами показано выше, делятся на 6 непересекающихся подклассов. Для них могут быть доказаны следующие утверждения.

Теорема 3.3. Если группа голономии G_ρ пространства $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_{2i})$ $(i=1, 2)$ совершенна, то она абелева и ее порядок $1 < \rho \leqslant n-2$. Аналитические многообразия $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_{2i})$ $(i=1, 2)$ в данном случае необходимо допускают поле абсолютно параллельного изотропного вектора, отличающегося скалярным множителем от базисного вектора $t \in \mathcal{L}$. При этом $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s(B_{21})$ суть пространства Эйнштейна с нулевым тензором Риччи, а пространства $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(B_{22})$ относятся к классу риччи-рекуррентных римановых многообразий первого порядка рекуррентности. Если $\rho<n-2$, то на указанных многообразиях существует ровно $(n-2-\rho)$ абсолютно параллельных векторных полей, ортогональных полю t.

Теорема 3.4. Если группа голономии G_ρ пространства $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(B_{2k})$ $(k=3, 4, 5, 6)$ совершенна, то $1<\rho\leqslant n-1$ и в некотором базисе ее структурные константы имеют вид:

$$C^1_{1\alpha}=0, \quad C^\gamma_{1\alpha}=\delta^\gamma_\alpha, \quad C^\gamma_{\alpha\beta}=0 \quad (\alpha, \beta, \gamma=2, 3, \ldots, \rho).$$

Исследуемые многообразия необходимо допускают существование поля изотропного строго рекуррентного ковектора, являющегося базисным для $\mathscr{L}$ $(t_{m,k}=\omega_k t_m,\ \omega_k\neq 0)$. Если $\rho<n-1$ и многообразие $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s(B_{2k})$ $(k=3, 4, 5, 6)$ является аналитическим, то на многообразии существует ровно $(n-1-\rho)$ абсолютно параллельных векторных полей.

§ 4. РЕКУРРЕНТНОСТЬ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

Ранее мы не фиксировали конкретное значение порядка рекуррентности исследуемых пространств $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s$, так как предложенная алгебраическая классификация $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s$-пространств не зависит от порядка дифференцирования тензора кривизны многообразия.

Однако если s зафиксировано, то исследуемый класс пространств $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s$ при данном значении s может обладать дополнительными свойствами по отношению к тем, что были установлены в предыдущих параграфах. Это обстоятельство объясняется тем, что, с одной стороны, представляется возможность использовать конкретные тождества для ковариантных производных тензора кривизны порядка s; с другой стороны, при некоторых конкретных значениях s без особых громоздких вычислений может быть проведен непосредственный анализ уравнений рекуррентности, что, как правило, приводит к установлению дополнительных инвариантно тензорных признаков для кривизны искомых пространств $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s$.

В данном разделе остановимся на рассмотрении рекуррентных многообразий, когда порядок рекуррентности s равен либо единице либо двум. В этом случае наиболее полно раскрывается преимущество использования алгебраического анализа рекуррентных пространств по сравнению с методами, применявшимися при исследовании $\overset{*}{\mathscr{K}}_n{}^2$-пространств Лихнеровичем, Ротером, Томпсоном и другими. Знание структуры кривизны $\overset{*}{\mathscr{D}}_n{}^s$-пространств на основе их алгебраической классификации позволяет кратчайшим путем получить ряд основных теорем, из которых в качестве следствия вытекают не только результаты работ Уолкера, Лихнеровича, Ротера, Томпсона для $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^1$- и $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^2$-пространств с положительным мероопределением или с метрикой сигнатуры $\pm(n-2)$, но и следуют подобного рода заключения для пространств $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^s$ и $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^s$ $(s=1, 2)$ произвольной сигнатуры.

Теорема 4.1. Пространства $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^2(A)$ необходимо являются $\overset{*}{\mathcal{K}}_n{}^1(A)$-пространствами и представляют собою, соответственно: (1) для типа $A_1 - V_2 \times E_{n-2}$, где V_2 — произвольное двумерное риманово пространство, E_{n-2} — плоское пространство размерности $(n-2)$; (2) для типа $A_2 - V_3 \times E_{n-3}$, где V_3 суть трехмерное пространство, допускающее поле ковариантно постоянного изотропного вектора, E_{n-3} — плоское $(n-3)$-мерное пространство; (3) для типа $A_3 - V_4 \times E_{n-4}$, где V_4 суть четырехмерное пространство Эйнштейна $(R_{ij}=0)$ нулевой сигнатуры, допускающее два взаимно ортогональных ковариантно постоянных векторных поля, E_{n-4} — плоское пространство $(n-4)$-измерений.

Тем самым вопрос о пространствах $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^2$ типа A полностью решен. В локальной карте их линейные элементы имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l}
(1)\ ds^2 = A(x^1, x^2)(e_1 dx^{1^2} + e_2 dx^{2^2}) + \sum\limits_{\sigma=3}^{n} e_\sigma (dx^\sigma)^2 \\
(2)\ ds^2 = e_1 dx^{2^2} + 2dx^3(dx^1 + A(x^2, x^3)dx^3) + \sum\limits_{\sigma=4}^{n} e_\sigma (dx^\sigma)^2 \\
(3)\ ds^2 = 2dx^4(dx^1 + dx^2 + A(x^3, x^4)dx^4) + \sum\limits_{\sigma=5}^{n} e_\sigma (dx^\sigma)^2
\end{array}\right\},$$

где A — произвольная функция своих аргументов, $e_k = \pm 1$.

Пример пространства, приведенного в конце второго параграфа показывает, что для пространств $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^2(B)$ в общем случае теоремы о сведении $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^2(B)$-пространств к классу однорекуррентных многообразий не существует.

Так, например, для пространств $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^2(B_{2k})$ $(k=1, 2)$ с использованием условий полусимметричности может быть доказана

Теорема 4.2. Пространства $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^2(B_{2k})$ $(k=1, 2)$ необходимо допускают поле изотропного ковариантно постоянного вектора, причем пространства $\overset{*}{\mathcal{D}}_n{}^2(B_{22})$ относятся к классу риччи-рекуррентных V_n $(R_{ij,k}=\Omega_k R_{ij})$.

Однако для конформно плоских $\overset{*}{\mathscr{D}}_n^2$-пространств можно показать, что всякое конформно плоское пространство $\overset{*}{\mathscr{D}}_n^2$ суть симметрическое или однорекуррентное пространство.

Томпсон доказал подобную теорему для конформно плоских $\mathscr{K}_n^2$-пространств (два-симметрические пространства им не рассматривались). Но каждое конформно плоское пространство $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^s$ при любом s имеет скалярную кривизну равную нулю и относится к типу B_{22} (теорема (2.18)). Следовательно, результат Томпсона есть следствие указанного более общего факта.

Аналогично может быть поставлен вопрос о снижении порядка рекуррентности для $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^2$-пространств.

Как показано во втором параграфе, при любом s $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^s$-пространства необходимо относятся к классу полусимметрических римановых многообразий и принадлежат к одному из следующих пяти типов: $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^s(A_i)$ $(i=1, 2, 3)$, $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^s(B_{2k})$ $(k=1, 2)$. Следует также заметить, что среди пространств $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^s$ пространства $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^s(A_1)$ и только они имеют скалярную кривизну отличную от нуля, пространства $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^s(A_3)$, $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^s(B_{21})$ являются пространствами Эйнштейна $(R_{ij}=0)$, а для пространств $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^s(A_2)$, $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^s(B_{22})$ скалярная кривизна равна нулю и тензор Риччи имеет строение вида: $R_{ij}=S(x)\,t_i t_j$, где t — изотропный вектор, $S(x)\neq 0$.

Учитывая данное замечание и выводы теоремы (4.1), имеющие место и для $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^2$-пространств, получаем следующее утверждение, из которого, в частности, вытекают результаты работ Лихнеровича, Ротера, Томпсона о снижении порядка рекуррентности для $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^2$-пространств.

Теорема 4.3. Если скалярная кривизна R пространства $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^2$ отлична от нуля, то независимо от сигнатуры такие пространства являются однорекуррентными $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^1$-пространствами.

Тем самым дополнительные требования компактности, положительности мероопределения или наличия сигнатуры $(+-\dots$ $\dots-)$ для пространств $\overset{*}{\mathscr{K}}_n^2$ со скалярной кривизной не равной нулю, при которых доказывалась данная теорема в свое время Лихнеровичем, Ротером и Томпсоном, полностью снимаются.

В заключение обратимся к работе Номидзу [63], где был поставлен вопрос, не сводится ли класс полусимметрических римановых многообразий лишь к классу симметрических V_n?

Анализ результатов, полученных в данном параграфе, и примеры s-симметрических пространств, указанные в § 2, приводят к выводу, что ответ на поставленный вопрос отрицателен, так как, даже ограничиваясь порядком рекуррентности $s=1, 2$, видим, что класс полусимметрических римановых пространств содержит в себе помимо симметрических V_n также $\mathcal{K}_n^1$-пространства, 2-симметрические V_n, не сводящиеся к симметрическим, $\overset{*}{\mathcal{D}}_n^2$-пространства типов B_{21}, B_{22}.

Таким образом, проблема, что же собою представляет класс полусимметрических V_n, остается пока нерешенной. В связи с этим возникает вопрос, не эквивалентен ли класс полусимметрических пространств объединению класса симметрических пространств и пространств $\overset{*}{\mathcal{D}}_n^s$ типов A_i $(i=1, 2, 3)$, B_{2k} $(k=1, 2)$, относящихся, как нами установлено, к полусимметрическим римановым многообразиям?

§ 5. КОМПЛЕКСНО-РЕКУРРЕНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

В теории тяготения Эйнштейна гравитационное поле проявляет себя через тензор кривизны пространства-времени и его ковариантные производные. Этот факт становится особенно наглядным, если выбрать нормальную систему координат с началом в некоторой точке M_0 и рассмотреть разложение метрического тензора в данной системе координат [19]. Если в некоторой области пространства-времени $R_{ijkl,m}=0$ или $R_{ijkl,m}=\Omega_m R_{ijkl}$, то потенциалы поля $g_{ik}(x)$ определяются лишь через компоненты тензора кривизны, вычисленные в точке M_0 и для окрестности этой точки можно говорить о «постоянном» поле гравитации. Следующим шагом является ситуация, когда потенциалы поля в окрестности точки M_0 определяются лишь через тензор Римана и его первую ковариантную производную. Следуя аналогии, основанной на сопоставлении тензора Максвелла в электромагнетизме и тензора Римана в гравитации (см. подробнее в [4], [6]), мы придем к обобщению плоско-волновых решений в теории тяготения Эйнштейна, если будем исследовать поля тяготения с комплексно рекуррентной конформной кривизной

$$\Gamma_{ijkl,m}=\Phi_m\Gamma_{ijkl}, \tag{5.1}$$

где $\Gamma_{ijkl}=C_{ijkl}+i\overset{*}{C}_{ijkl}$, C_{ijkl} — тензор Вейля, $\overset{*}{C}_{ijkl}$ — тензор дуальный к C_{ijkl}, $\Phi_m=(p_m+iq_m)$ — комплексный вектор.

Сначала мы рассмотрим вакуумные поля тяготения (тензор энергии-импульса равен нулю). Для искомых пространств, являющихся пространствами Эйнштейна, условия (5.1) будут эквивалентны следующим:

$$R_{ijkl,m}=p_m R_{ijkl}-q_m \overset{*}{R}_{ijkl}. \tag{5.2}$$

Вопрос о метриках таких полей тяготения решает следующее утверждение.

Теорема 5.1. Пространств Эйнштейна комплексной рекуррентной кривизны, относящихся к типам I и III по классификации Петрова, не существует. Такими пространствами могут быть лишь пространства типа $\mathcal{N}$. Их метрика имеет вид:

$$ds^2 = -dx^{2^2} - dx^{3^2} + 2dx^4(dx^1 + A(x^2, x^3, x^4)dx^4), \qquad (5.3)$$

где функция A удовлетворяет условиям:

$$\partial_{22}A + \partial_{33}A = 0.$$

Рассмотрим поля тяготения с условиями (5.1), когда тензор энергии-импульса $T_{ij} \neq 0$. Имеем следующие результаты.

Теорема 5.2. Поля тяготения I типа Петрова с условиями (5.1) являются полями типа $\mathcal{D}$. Их группа голономии $G_2 = SO(2) \times SO(1, 1)$, а метрика имеет вид:

$$ds^2 = -dx^{1^2} - A^2(x^1, x^2)dx^{2^2} + eB^2(x^3, x^4)dx^{3^2} - edx^{4^2} \qquad (5.4)$$
$$(e = \pm 1).$$

Теорема 5.3. Поля тяготения II типа Петрова с комплексной конформной рекуррентной кривизной являются полями типа $\mathcal{N}$. Если Φ_m не является градиентом, то их группа голономии суть группа G_4 и метрика имеет вид [2]:

$$ds^2 = -e^{2f}(dx^{2^2} + dx^{3^2}) + 2dx^4(dx^1 + g_i dx^i) \quad (i = 2, 3, 4), \qquad (5.5)$$

где $f = f(x^2, x^3, x^4)$, $g_k = g_k(x^2, x^3, x^4)$ $(k = 2, 3)$, $g_4 = g_4(x^1, \ldots, x^4)$.

Если Φ_m является градиентом, то их группа голономии двумерна, а метрика имеет частный вид метрики (5.5) при (a) $f = 0$, $g_k = 0$ $(k = 2, 3)$, $g_4 = g_4(x^2, x^3, x^4)$ и при (b) $f = 0$, $g_k = 0$ $(k = 2, 3)$, $g_4 = g_4(x^1, x^3, x^4)$.

Полей тяготения III типа Петрова с условиями (5.1) не существует.

§ 6. ПРОСТРАНСТВА РЕКУРРЕНТНОЙ КРИВИЗНЫ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ПЛОСКИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

Решим конкретную задачу об источниках гравитационных волн и движении пробных частиц, ограничиваясь рассмотрением указанных в § 5 рекуррентных многообразий типа $\mathcal{N}$ по Петрову, группа голономии которых двумерна. Согласно результатам § 5, они допускают поле абсолютно параллельного изотропного вектора l^i, и так как $R = 0$, то из уравнений поля $R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$, где G — гравитационная постоянная, c — скорость света, T_{ij} — тензор энергии-импульса, с учетом структуры строения тензора Риччи рассматриваемых многообразий получим, что $T_{ij} = \sigma l_i l_j$ [64]. Это означает, что T_{ij} суть тензор энергии-импульса для изотропного электромагнитного излучения, порождающего гравитационные волны. Из уравнений Эйнштейна—Максвелла для метрики (5.5), описывающей рассматриваемые гравитационные поля ($f=g_2=g_3=0$, $g_4=g_4(x^2, x^3, x^4)$), следует, что гравитационные волны имеют тот же двумерный фронт, что и электромагнитная волна.

Рассмотрим тот случай, когда источником служит плоское монохроматическое электромагнитное излучение.

После преобразования координат $x^1=\frac{1}{\sqrt{2}}(ct+x)$, $x^2=y$, $x^3=z$, $x^4=\frac{1}{\sqrt{2}}(ct-x)$, когда метрика примет вид:

$$ds^2=\left(-1+\frac{1}{c^2}\Phi\right)dx^2-dy^2-dz^2-\frac{2}{c}\Phi dxdt+$$
$$+\left(1+\frac{1}{c^2}\Phi\right)c^2dt^2 \tag{6.1}$$

уравнения поля Эйнштейна для $\Phi(y, z, ct-x)$ сводятся лишь к одному уравнению:

$$\Delta\Phi=\frac{8\pi G}{c^2}\varepsilon T(u), \tag{6.2}$$

где $T(u)=\frac{1}{4\pi}(\alpha^2\cos^2 u+2\gamma\sin 2u+\beta^2\sin^2 u)$ — единственная существенная компонента тензора энергии-импульса T_{ik}, $u=\frac{\omega}{c}(ct-x)$, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\varepsilon=1$ для области с источником, $\varepsilon=0$ — вне источника, α, β, γ — const, ω — частота электромагнитных волн.

Из (6.2) видно, что гравитационная волна, как и электромагнитная, распространяется вдоль оси x в сторону ее положительного направления с фундаментальной скоростью c [76]. Следовательно, электромагнитное излучение можно задать в виде бесконечного цилиндрического пучка с направляющей осью вдоль оси x. Сечение пучка $x=\text{const}$, $t=\text{const}$ есть некоторая область $\mathcal{D}$ плоскости $\{y, z\}$, которую мы выберем в виде круга радиуса a.

Решим внутреннюю и внешнюю задачи Дирихле в плоскости $\{y, z\}$ с граничным условием на Γ.

Целесообразно ввести полярные координаты $y=\rho\cos\theta$, $z=\rho\sin\theta$ и обозначить $\Phi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, ct-x)=\Phi^*(\rho,\theta, ct-x)$. Функция Φ^*, как функция ρ и θ, должна удовлетворять уравнениям (6.2):

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi^*}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\theta^2}=\begin{cases}\frac{8\pi G}{c^2}T(u), & \rho<a,\\ 0, & \rho>a\end{cases} \tag{6.3}$$

с граничным условием: $\Phi^*(\rho, \theta, ct-x)|_{\rho=a}=f(\theta, ct-x)$.

Решение ищем в виде $\Phi^*=U+W$, где U — логарифмический потенциал:

$$U(y,\ z,\ ct-x)=\frac{4\pi G}{c^2}T(u)\iint\limits_{\mathscr{D}}\ln\sqrt{(y-\eta)^2+(z-\xi)^2}\,d\eta\,d\xi,$$

а $W(\rho,\ \theta,\ ct-x)$ — потенциал двойного слоя.

Решение внутренней и внешней краевых задач выражается через интеграл Пуассона следующим образом:

$$\Phi^*=\begin{cases}\dfrac{4\pi G}{c^2}T(u)\,a^2\ln\dfrac{\rho}{a}+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{(\rho^2-a^2)\,f(\varphi,\ ct-x)}{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\varphi)}\,d\varphi, & \rho>a,\\ \dfrac{2\pi G}{c^2}T(u)(\rho^2-a^2)+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{(a^2-\rho^2)\,f(\varphi,\ ct-x)}{\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\varphi)}\,d\varphi, & \rho<a,\\ f(\theta,\ ct-x), & \rho=a.\end{cases}$$

В частном случае, когда функция f зависит лишь от аргумента $(ct-x)$: $f=f^*(u)$, $u=\frac{\omega}{c}(ct-x)$, имеем:

$$\Phi(y,\ z,\ ct-x)=\begin{cases}\dfrac{4\pi G}{c^2}T(u)\,a^2\ln\dfrac{\sqrt{y^2+z^2}}{a}+f^*(u), & \rho\geqslant a,\\ \dfrac{2\pi G}{c^2}T(u)(y^2+z^2-a^2)+f^*(u), & \rho\leqslant a.\end{cases}\tag{6.4}$$

Видим, что решение непрерывным образом сшивается на границе области. Что можно сказать о производных? Пусть n — внешняя нормаль к цилиндру. Тогда

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\begin{cases}\dfrac{4\pi Ga^2}{c^2\rho}T(u), & \rho>a,\\ \dfrac{4\pi G\rho}{c^2}T(u), & \rho<a.\end{cases}$$

Следовательно, имеем:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\rho=a}=\frac{4\pi Ga}{c^2}T(u).$$

Тем самым показано, что нормальные производные непрерывны на границе области. Этот факт говорит об отсутствии ударных гравитационных волн.

Заметив, что $T(u)$ в подробной записи имеет вид:

$$T(u)=\frac{1}{8\pi}\left(\alpha^2+\beta^2+(\alpha^2-\beta^2)\cos\frac{2\omega}{c}(ct-x)+4\gamma\sin\frac{2\omega}{c}(ct-x)\right),$$

из (6.4) при соответствующем выборе функции f^* и постоянных α, β, γ следует вывод о возможности существования гравитационных волн, частота которых равна удвоенной частоте электромагнитных волн, являющихся источником для переменного гравитационного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абдуллин В. Н.*, Симметрические римановы пространства V_4. Изв. вуз. Математика, 1971, № 2, 3—12 (РЖМат, 1971, 6А773)
2. *Алексеевский Д. В.*, Группы голономии и рекуррентные тензорные поля в лоренцевых пространствах. В сб. «Пробл. теории гравитации и элементарн. частиц». Вып. 5. М., Атомиздат, 1974, 5—17 (РЖМат, 1975, 3А740)
3. *Астраханцев В. В.*, Псевдоримановы симметрические пространства с коммутативной группой голономии. Мат. сб., 1973, *90*, № 2, 288—305 (РЖМат, 1973, 7А689)
4. *Гаврилов С. П.*, Римановы пространства с однорекуррентным бивектором. Часть 2. В сб. «Гравитация и теория относительн.» Вып. 10—11. Казань, Казанск. ун-т, 1975 (1976), 158—171 (РЖМат, 1977, 11А648)
5. *Григорьева Л. Б., Захаров В. Д.*, Пространства рекуррентной кривизны в ОТО. Докл. АН СССР, 1972, *207*, № 4, (РЖФиз, 1973, 4Б149)
6. *Захаров В. Д.*, Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М., Наука, 1972, 200 с. (РЖМат, 1972, 7А595К)
7. *Кайгородов В. Р.*, Не конформно плоские релятивистские пространства рекуррентной кривизны. В сб. «Гравитация и теория относительн.», Вып. 8. Казань, Казанск. ун-т, 1971, 109—115 (РЖМат, 1972, 7А598)
8. —, О два-симметрических и два-рекуррентных полях тяготения. Препринт ин-та теор. физ. АН УССР, 1972, 72—46Р, 24 с.
9. —, О кривизне s-рекуррентных и квазисимметрических римановых многообразий. Докл. АН СССР, 1973, *212*, № 4, 796—799 (РЖМат, 1974, 2А652)
10. —, Римановы пространства $\overset{*}{\mathscr{D}}{}_n{}^s$. Структура кривизны пррстранств типа *А*. Изв. вуз. Математика, 1974, № 5, 117—127 (РЖМат, 1975, 1А807)
11. —, Структура кривизны $\overset{*}{\mathscr{D}}{}_n{}^s$-пространств типа *В*. Изв. вуз. Математика, 1975, № 1, 104—107 (РЖМат, 1975, 9А529)
12. —, Римановы пространства $\overset{*}{\mathscr{D}}{}_n{}^s$. Рекуррентность второго порядка. Изв. вуз. Математика, 1975, № 2, 112—115 (РЖМат, 1975, 10А564)
13. —, Рекуррентные многообразия и их приложения в теории групп голономии. Всес. науч. конф. по неевклид. геометрии. «150 лет геометрии Лобачевского». Казань, 1976. М., 1977, 133—141 (РЖМат, 1978, 7А901)
14. —, Полусимметрические лоренцевы пространства с совершенной группой голономии. В сб. «Гравитация и теория относит.» Вып. 14—15. Казань, Казанск. ун-т, 1978, 113—120 (РЖМат, 1979, 2А569)
15. —, О полях тяготения с рекуррентной комплексно-конформной кривизной. В сб. «Гравитация и теория относит.» Вып. 14—15. Казань, Казанск. ун-т, 1978, 180—185 (РЖМат, 1979, 2А647)
16. —, *Пестов А. Б.*, Постоянное векторное поле в пространствах Эйнштейна. В сб. «Гравитация и теория относительн.» Вып. 6. Казань, Казанск. ун-т, 1969, 46—51 (РЖМат, 1970, 9А561)
17. *Картан Э.*, Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М., ИИЛ, 1949, 248 с.
18. *Лихнерович А.* Теория связности в целом и группы голономий. М., ИИЛ, 1960, 216 с. (РЖМат, 1961, 5А538К)
19. *Петров А. З.*, Новые методы в общей теории относительности. М., Наука, 1966, 490 с.
20. *Широков П. А.*, Постоянные поля векторов и тензоров 2-го порядка в римановых пространствах. Изв. ф.-м. общ-ва при КГУ (серия 2), 1925, *XXV*, 86—114
21. —, Симметрические конформно-евклидовы пространства. Изв. ф.-м общ-ва при КГУ (серия 3), 1938, *XI*, 9—27
22. —, Симметрические пространства первого класса. В сб. «Избранные работы по геометрии». Казань, Казанск. ун-т, 1966, 366—383
23. *Яно К., Бохнер С.*, Кривизна и числа Бетти. М., ИИЛ, 1957, 152 с. (РЖМат, 1957, 8927К)

24. *Adati T., Miyasawa T.*, On conformally symmetric spaces. Tensor, 1967, *18*, № 3, 335—342 (РЖМат, 1968, 9А465)
25. —, —, On a Riemannian space with recurrent conformal curvature. Tensor, 1967, *18*, № 3, 348—354 (РЖМат, 1968, 9А466)
26. —, *Yamaguchi S.*, On some transformations in Riemannian recurrent spaces. Tru math., 1967, *3*, 8—12 (РЖМат, 1968, 12А516)
27. *Ahuja L. R., Behari R.*, H-projective-symmetric and recurrent Kähler spaces. Tensor, 1972, *26*, № 1, 102—104 (РЖМат, 1974, 1А678)
28. *Cahen M., McLenaghan R.*, Metriques des espaces lorentziens symétriques à quatre dimensions. C. r. Acad. sci., 1968, *266*, № 22, A1125—A1128 (РЖМат, 1969, 1А643)
29. *Chaki M. C.*, On conformally recurrent Kähler spaces. Tensor, 1972, *25*, № 2, 179—182 (РЖМат, 1974, 1А679)
30. —, *Chowdhury Roy A. N.*, An conformally recurrent spaces of second order. J. Austral. Math. Soc., 1969, *10*, № 1—2, 155—161 (РЖМат, 1970, 3А821)
31. *Chowdhury Roy A. N.*, Some theorems on recurrent spaces of second order. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron., et phys., 1967, *15*, № 3, 171—176 (РЖМат, 1967, 12А588)
32. —, On recurrent spaces of second order. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1968, *16*, № 12, 955—959 (РЖМат, 1969, 7А537)
33. *Cochina A.*, Spatii cu conexinne afină cu tensor de curbură recurrent. Stud. si. cerc. mat., 1971, *23*, № 8, 1187—1191 (РЖМат, 1972, 3А693)
34. *Datta D. K.*, Some theorems on symmetric recurrent tensors of the second order. Tensor, 1964, *15*, № 1, 61—65 (РЖМат, 1965, 10А406)
35. —, Notes on Ricci-recurrent spaces. Rend. circ. mat. Palermo, 1965, *14*, № 3, 281—286 (РЖМат, 1967, 12А589)
36. —, On the recurrence covector. Rev. roum. math. pures et appl., 1972, *17*, № 2, 229—235 (РЖМат, 1972, 12А545)
37. *Enghis P.*, Sur les espaces V_n recurrents et ricci recurrents. Stud. Univ. Bades-Bolyai. Ser. math.-mech., 1972, *17*, № 1, 3—6 (РЖМат, 1972, 9А555)
38. *Glodek E.*, On Riemannian conformally symmetric spaces admitting projective collineations. Colloq. Math., 1972, *26*, 123—128 (РЖМат, 1973, 5А704)
39. —, *Roter W.*, On torse-forming vector fields in Ricci-recurrent and second order recurrent spaces. Fasc. math., 1969, № 4, 15—24 (РЖМат, 1971, 8А520)
40. *Gupta B.*, On projective-symmetric spaces. J. Austral. Math. Soc., 1964, *4*, № 1, 113—121 (РЖМат, 1964, 9А428)
41. *Hlavaty V.*, Rigid motion in a Riemannian space V_n. I. A recurrent V_n. Rend. Circolo. mat. Palermo, 1960, *2*, № 9, 51—77 (РЖМат, 1962, 1А408)
42. *Kumar G. R.*, On recurrent spaces of second order. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1972, *58*, № 4, 481—492 (РЖМат, 1973, 5А699)
43. *Kumar R. A.*, On generalised 2-recurrent tensors in Riemannian spaces. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1972, *58*, № 2, 220—228 (РЖМат, 1973, 3А694)
44. *Lal K. B., Singh S. S.*, On Kählerian spaces with recurrent Bochner curvature Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1971, *51*, № 3—4, 213—220 (РЖМат, 1972, 11А537)
45. *Liang You-dong*, Characterizations of certain K^*-space. Chinese Math., 1967, *9*, № 3, 383—389 (РЖМат, 1969, 5А527)
46. *Lichnerowicz A.*, Courburc, nombres de Betti et espaces symmetriques. Proc. Int. Cong. Math., 1952, *2*, 216—233
47. *Marziale M. L.*, Caratteristica di Eulero—Poincare delle varieta ricorrenty. Rend. math., 1971, *4*, № 2, 295—301 (РЖМат, 1972, 4А806)
48. *Mathur S. B.*, On recurrent spaces. Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1968, *A34*, № 1, 40—49 (РЖМат, 1969, 6А445)
49. *Matsumoto M.*, On Riemannian spaces with recurrent projective curvature. Tensor, 1968, *19*, № 1, 11—18 (РЖМат, 1968, 10А483)

50. —, On *h*-isotropic and C^h-recurrent Finsler spaces. J. Math. Kyoto Univ., 1971, *11*, № 1, 1—9 (РЖМат, 1972, 1А1081)
51. *McLenaghan R. G., Leroy J.,* Complex recurrent space-times. Proc. Roy. Soc., London, 1972, *A327*, № 1569, 229—249 (РЖФиз, 1972, 8Б116)
52. —, *Thompson A. H.,* Second order recurrent space-times in general relativity. Lett. Nuovo, Cinr., 1972, *5*, № 7, 563—564 (РЖФиз, 1973, 3Б183)
53. *Mishra R. S., Pokhariyal G. P.,* Curvature tensors in Riemannian manifold. Indian. J. Pure and Appl. Math., 1971, *2*, № 3, 529—532 (РЖМат, 1972, 2А904)
54. *Misra R. B.,* A symmetric Finsler space. Tensor, 1972, *24*, 346—350 (РЖМат, 1974, 2А638)
55. *Miyasawa T.,* On conformal transformations of Riemannian spaces with recurrent conformal curvature. Tru Math., 1967, *3*, 19—24 (РЖМат, 1968, 12А517)
56. *Mogi I.,* A remark on recurrent curvature spaces. Kodai Math. Sem. Rep., 1950
57. *Moor A.,* Räume von zweifach rekurrenter Krümmung. Publs. math., 1971, *18*, № 1—4, 165—169 (РЖМат, 1973, 6А762)
58. —, Untersuchungen in Räumen mit rekurrenter Krümmung. J. Reine und angew. Math., 1958, *199*, № 1—2, 91—99 (РЖМат, 1961, 1А461)
59. —, Über Finslerraume von zweifach rekurrenter Krümmung. Acta math. Acad. sci. hung., 1972, *22*, № 3—4, 453—465 (РЖМат, 1972, 12А525)
60. —, Über die Konstruktion von metrisch-affinen Räumen von rekurrenter Krümmung. Colloq. math., 1972, *26*, 109—113 (РЖМат, 1973, 7А688)
61. *Nagaraj M.,* On some conformal properties of recurrent Riemannian spaces. Tensor, 1968, *19*, № 1, 19—26 (РЖМат, 1969, 1А615)
62. *Navez J.,* Riemannian spaces with second order recurrent tensor of conformal curvature. Bull. Soc. roy. sci. Liege, 1971, *40*, № 3—4, 110—115 (РЖМат, 1972, 1А1097)
63. *Nomizu K.,* On hupersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensors. Tôhoku Math. J., 1968, *20*, № 1, 46—59 (РЖМат, 1969, 2А693)
64. *Öktem F.,* Are the neutrinos an aspect of Riemannian geometry. Nuovo Cim., 1971, *A1*, № 1, 38—48 (РЖФиз, 1971, 7Б147)
65. *Prakash N.,* Some remarks on recurrent and Ricci-recurrent spaces. Ganita, 1961, *12*, № 2, 105—114 (РЖМат, 1966, 10А413)
66. *Prasad B. N.,* On a Kählerian space with recurrent Bochner curvature tensor. Atti Acad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur, 1972 (1973), *53*, № 1—2, 87—93 (РЖМат, 1974, 3А527)
67. *Prvanovitch M.,* Projective and conformal transformations in recurrent and Ricci-recurrent Riemannian spaces. Tensor, 1962, *12*, № 3, 219—226 (РЖМат, 1963, 10А363)
68. —, Poludekomponovani rekurentni rimanovi prostori. Годишн. Филоз. фак. Новом саду, 1968, *11*, № 2, 717—720 (РЖМат, 1970, 6А552)
69. *Roter W.,* Some remarks on second order recurrent spaces. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1964, *12*, № 4, 207—211 (РЖМат, 1965, 1А408)
70. —, A note on second order recurrent spaces. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math.. astron. et phys., 1964, *12*, № 10, 621—626 (РЖМат, 1965, 12А544)
71. —, On conformally symmetric 2-Ricci-recurrent spaces. Colloq. Math., 1972, *26*, № 1, 116—122 (РЖМат, 1973, 5А703)
72. —, Some remarks on infinitesimal projective transformations in recurrent and Ricci-recurrent spaces. Colloq. math., 1966, *15*, № 1, 121—127 (РЖМат, 1967, 1А437)
73. *Ruse H. S.,* On simply harmonic spaces. Journ. Lond. Math. Soc., 1946, *21*, part 4
74. —, Three-dimensional spaces of recurrent curvature. Proc. Lond. Math. Soc. (ser. 2), 1949, *50*, part 6

75. —, On simply harmonic «kappa-spaces» of four dimensions. Proc. Lond. Math. Soc. (ser. 2), 1948, *50*, 317—329
76. *Sciama D. W.*, Recurrent radiation in general relativity. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1961, *57*, № 2, 436—439 (РЖМат, 1961, 11А408)
77. *Sen R. N.*, Finsler spaces of recurrent curvature. Tensor, 1968, *19*, № 3, 291—299 (РЖМат, 1969, 4А563)
78. *Singh S. P.*, A special Kawaguchi space of recurrent curvature tensor field of second order. Tensor, 1972, *23*, № 2, 174—178 (РЖМат, 1972, 12А530)
79. *Söler F.*, Sur les variétés recurrentes conformement planes. C. r. Acad. sci., 1973, *277*, № 13, A601—A603 (РЖМат, 1974, 5А741)
80. *Takano K.*, Decomposition of curvature tensor in a recurrent space. Tensor, 1967, *18*, № 3, 343—347 (РЖМат, 1968, 9А474)
81. —, On a space with bi-recurrent curvature. Tensor, 1971, *22*, № 3, 329—332 (РЖМат, 1972, 3А692)
82. —, Some remarks on the affine motion in a space with recurrent curvature. Tensor, 1962, *12*, № 1, 84—89 (РЖМат, 1965, 1А411)
83. —, On the existence of affine motion in a space with recurrent curvature. I. Tensor, 1966, *17*, № 1, 68—73 (РЖМат, 1967, 4А503)
84. —, On the existence of affine motion in a space with recurrent curvature. II. Tensor, 1966, *17*, № 2, 212—216 (РЖМат, 1967, 4А504)
85. *Takeno H.*, On the *n*-recurrency of spherical symmetric space-times. I. Res. Inst. Theor. Phys. Hiroshima Univ., 1970, № RRK-5 (РЖФиз, 1971, 1Б155)
86. —, On the *n*-recurrency of spherical symmetric space-times. II. Res. Inst. Theor. Phys. Hiroshima Univ., 1970, № RRK-6 (РМФиз, 1971, 1Б156)
87. —, On the *n*-recurrency of spherical symmetric space-times. III. Res. Inst. Theor. Phys. Hiroshima Univ., 1970, № RRK-9 (РЖФиз, 1971, 6Б131)
88. —, On the *n*-recurrency *H*-space in general relativity. Res. Inst. Theor. Phys. Hiroshima Univ., 1970, № RRK-11 (РЖФиз, 1971, 6Б132)
89. —, On *n*-recurrent *H* space-times. Tensor, 1971, *22*, № 3, 374—378 (РЖФиз, 1972, 2Б204)
90. —, On the recurrency of the space-times *V*. Res. Inst. Theor. Phys. Hiroshima Univ., 1973, № RRK-3 (РЖФиз, 1973, 7Б139)
91. *Thompson A. H.*, On conformally flat 2-recurrent Riemannian spaces. Quart. J. Math., 1969, *20*, № 80, 505—510 (РЖМат, 1970, 7А678)
92. —, On second order recurrent space-times. I. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math. astron. et phys., 1968, *16*, № 2, 121—124 (РЖМат, 1969, 1А617)
93. —, On second order recurrent space-times. II. Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. math., astron. et phys., 1969, *17*, № 10, 661—670 (РЖМат, 1970, 6А579)
95. —, On riemannian spaces of second-order recurrent curvature. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1970, *18*, № 6, 335—340 (РЖМат, 1971, 1А633)
95. *Vrănceanu G. G.*, Asupra spatiilor cu tensor de curbură recurrent. Stud. sci. cerc. mat., 1970, *22*, № 6, 947—953 (РЖМат, 1971, 3А585)
96. *Walker A. G.*, On Ruse's spaces of recurrent curvature. Proc. Lond. Math. Soc., 1950, *51*, 36—64
97. —, Symmetric harmonic spaces. Journ. Lond. Math. Soc., 1946, *21*, № 81