Yu. A. Konyaev, Yu. G. Martynenko, N. G. Panfilov, An Asymptotic Analog of Reducibility Theorems for Some Classes of Nonautonomous Linear Systems,
Differ. Uravn., 2004, Volume 40, Number 3, 330–333

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 3, с. 330–333

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМ О ПРИВОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕАВТОНОМНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

© 2004 г. Ю. А. Коняев, Ю. Г. Мартыненко, Н. Г. Панфилов

Доказаны асимптотические аналоги теорем о приводимости некоторых классов неавтономных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), что дополняет или уточняет известные ранее результаты [1–10].

Рассмотрим неавтономную систему ОДУ с полиномиально-периодическими коэффициентами

$$\dot{x} = \left(t^m \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) t^{-k}\right) x \quad (x \in R^n; \quad t \geq t_0 > 1; \quad m \geq 1) \tag{1}$$

(где $A_k(t)$ – T-периодические достаточно гладкие матричные функции) в случае, если спектр $\{\lambda_{0,j}(t)\}_1^n$ матрицы $A_0(t)$ удовлетворяет условиям

$$\sigma_{jk}(t) \equiv \lambda_{0j}(t) - \lambda_{0k}(t) \neq 0 \quad (j \neq k; \quad j,k = \overline{1,n}; \quad t \geq t_0). \tag{2}$$

Для удобства изложения для произвольной квадратной матрицы A введем обозначения: $A = \{a_{jk}\}_1^n$, $\bar{A} = \operatorname{diag}\{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}$, $\bar{\bar{A}} = A - \bar{A}$. Невырожденная достаточно гладкая T-периодическая замена $x = S_0(t)y$, $S_0^{-1}(t)A_0(t)S_0(t) = \Lambda_0(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{01}(t), \ldots, \lambda_{0n}(t)\}$ приводит систему (1) к системе

$$\dot{y} = B(t)y, \quad B(t) = t^m \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) t^{-k}, \quad B_0(t) = \Lambda_0(t),$$

которую невырожденной при достаточно больших $t > 1$ заменой

$$y = H(t)z, \quad H(t) = E + \sum_{k=1}^{m+1} \bar{\bar{H}}_k(t) t^{-k} \tag{3}$$

приводим к системе с почти диагональной матрицей

$$\dot{z} = Q(t)z, \quad Q(t) = t^m \sum_{k=0}^{m+1} \Lambda_k(t) t^{-k} + O(t^{-2}), \tag{4}$$

если имеет место соотношение

$$\dot{H} = B(t)H - HQ(t). \tag{5}$$

Приравнивая в равенстве (5) коэффициенты при одинаковых степенях t, получим простые алгебраические матричные уравнения вида

$$\Lambda_0(t)\bar{\bar{H}}_k(t) - \bar{\bar{H}}_k(t)\Lambda_0(t) = \Lambda_k(t) - P_k(t) \quad (k \geq 1)$$

для последовательного и однозначного определения всех диагональных $\Lambda_k(t)$ и "бездиагональных" $\bar{\bar{H}}_k(t)$ матриц.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Линейная система (1) в случае, если спектр* $\{\lambda_{0,j}(t)\}_1^n$ *матрицы* $A_0(t)$ *удовлетворяет неравенствам (2), может быть с помощью невырожденной при достаточно больших* $t>1$ *замены* $x=S(t)H(t)z$ *преобразована к системе с почти диагональной матрицей вида (4).*

Замечание 1. К системам вида (1) при постоянных матрицах A_k сводится большой класс уравнений гипергеометрического типа $p(t)\ddot{x}+q(t)\dot{x}+\lambda x=0$ (где $q(t)$ и $p(t)$ – полиномы не выше первой и второй степени соответственно, λ – некоторый постоянный параметр), в частности, уравнения Эйри $\ddot{x}-tx=0$, Бесселя $t^2\ddot{x}+t\dot{x}+(t^2-\nu^2)x=0$, Эрмита $\ddot{x}-2t\dot{x}+2\nu x=0$ и ряд других.

Замечание 2. Результаты теоремы 1 позволяют получить асимптотическое представление при $t\to+\infty$ любой гипергеометрической функции. Так, уравнение Бесселя может быть записано в виде системы $\dot{z}=(\sum_{k=0}^2 A_k t^{-k})z$; $z=(x,\dot{x})^{\mathrm{T}}$, где

$$A_0=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0&0\\\nu^2&0\end{pmatrix},$$

и после описанного выше алгоритма и соответствующей замены мы приходим к системе (4) с почти диагональной матрицей, где

$$\Lambda_0=\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix},\quad \Lambda_1=-\frac{1}{2}E,\quad \Lambda_2=\delta_2\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad S_0=\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix},$$

$$\bar{\bar{H}}_1=\frac{i}{4}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad \bar{\bar{H}}_2=b_2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad b_2=\frac{2\nu^2+1}{8},\quad \delta_2=\frac{4\nu^2+1}{8i},$$

что дает возможность (с точностью до постоянного множителя) записать асимптотическое представление (при $t\to+\infty$) функций Ханкеля первого $H_\nu^{(1)}(t)$ и второго $H_\nu^{(2)}(t)$ рода:

$$H_\nu^{(1,2)}(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\left(1\pm\frac{i}{4t}+\frac{b_2}{t^2}+O\left(\frac{1}{t^3}\right)\right)\exp(\mp i(t-\delta_2(t)))$$

и аналогичное представление для функций Бесселя с учетом соотношения $J_\nu(t)=0.5[H_\nu^{(1)}(t)+$ $+H_\nu^{(2)}(t)]$.

Уравнение Эрмита позволяет перейти к системе $\dot{z}=(\Lambda_0 t+B_1)z$, где

$$\Lambda_0=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}0&1\\-2\nu&0\end{pmatrix},$$

и после соответствующих преобразований построить асимптотику общего решения системы

$$z=\left(E+\sum_{k=1}^{3}H_k\frac{1}{t^k}+O\left(\frac{1}{t^4}\right)\right)\exp\left(\frac{1}{2}\Lambda_0 t^2+\Lambda_2\ln t\right)C,$$

где $\Lambda_1=0$, $\Lambda_2=\operatorname{diag}\{\nu,-\nu\}$, $\Lambda_3=0$,

$$H_1=\begin{pmatrix}0&0.5\\\nu&0\end{pmatrix},\quad H_2=0,\quad H_3=\begin{pmatrix}0&-0.25(\nu-1)\\-0.5\nu(\nu+1)&0\end{pmatrix},$$

и общего решения уравнения Эрмита

$$x=C_1\left(1+O\left(\frac{1}{t^4}\right)\right)t^\nu+C_2\left(\frac{1}{2t}-\frac{1}{4t^3}+O\left(\frac{1}{t^4}\right)\right)\frac{1}{t^\nu}e^{t^2},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, которые могут быть найдены из дополнительных условий.

Замечание 3. С помощью предложенного метода были исследованы на устойчивость малые колебания оси гироскопа на стадии разгона с переменным кинетическим моментом [7], которые достаточно точно описываются системой дифференциальных уравнений четвертого порядка: $\dot{x} = (A_0 t + A_1)x$, $x = (\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})^{\mathrm{T}}$, где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ K & (hR) \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

α и β – углы отклонения гироскопа, h определяются начальным кинетическим моментом, слагаемые $(k_{11}\alpha + k_{12}\beta)$ и $(k_{21}\alpha + k_{22}\beta)$ описывают действие позиционных сил. После замены

$$x = S_0\left(E + \sum_{k=1}^{2} H_k t^{-k}\right)y, \quad S_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

в силу теоремы 1 получаем систему с почти диагональной матрицей $\dot{y} = (\Lambda_0 t + \Lambda_1 + Q_2 t^{-1} + {} +O(t^{-2}))y$, где $\Lambda_0 = \operatorname{diag}\{0, 0, i, -i\}$, $\Lambda_1 = h\Lambda_0$,

$$Q_2 = \begin{pmatrix} Q_{21} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad Q_{21} = \begin{pmatrix} k_{21} & k_{22} \\ -k_{11} & -k_{12} \end{pmatrix},$$

$$Q_{22} = (1/2)\operatorname{diag}\{(k_{12} - k_{21} + i(k_{11} + k_{22})), (k_{12} - k_{21} - i(k_{11} + k_{22}))\}.$$

Это позволяет найти область устойчивости $k_{11}k_{22} \geq k_{12}k_{21}$ $(k_{12} = k_{21})$ малых колебаний осей гироскопа.

Покажем возможность приведения линейной T-периодической возмущенной системы

$$\dot{x} = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\varepsilon^k\right)x \equiv A(t,\varepsilon)x \quad (x \in R^n, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad t \geq 0), \tag{6}$$

где $A_k(t)$ – T-периодические достаточно гладкие матричные функции, в случае, если спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ матрицы A_0 удовлетворяет условиям

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq i \cdot 2\pi q T^{-1} \quad (j \neq k, \quad j,k = \overline{1,n}, \quad q = 0, \pm 1, \ldots), \tag{7}$$

к системе с почти постоянной диагональной матрицей вида

$$\dot{z} = Q(t,\varepsilon)z \quad \left(Q(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \Lambda_k \varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}) \quad \forall N \geq 1\right). \tag{8}$$

Действительно, после невырожденной при достаточно малых ε замены

$$x = S_0 H(t,\varepsilon)z \quad \left(H(t,\varepsilon) = E + \sum_{k=1}^{N} H_k(t)\varepsilon^k \quad \forall N \geq 1, \quad S_0^{-1}A_0S_0 = \operatorname{diag}\{\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0n}\} = \Lambda_0\right) \tag{9}$$

нужный результат имеет место, если справедливо соотношение

$$\dot{H} = B(t,\varepsilon)H - HQ(t,\varepsilon), \tag{10}$$

где $B(t,\varepsilon) = S_0^{-1}A(t,\varepsilon)S_0 = \Lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)\varepsilon^k$. Приравнивая коэффициенты в (10) при одинаковых степенях ε, получим простые дифференциальные матричные уравнения для последовательного и однозначного определения каждой из постоянных диагональных матриц Λ_k и T-периодических матриц $H_k(t)$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Система (6) в случае, если спектр* $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ *матрицы* A_0 *удовлетворяет условиям (7), может быть с помощью невырожденной при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *замены (9) преобразована к системе с почти постоянной и диагональной матрицей вида (8).*

Замечание 4. Теорема 2 является асимптотическим и в отличие от ранее известного (см., например, [1–6]) конструктивным аналогом теоремы Флоке–Ляпунова с достаточно простым алгоритмом.

Замечание 5. При наличии у матрицы A_0 кратных точек спектра, удовлетворяющих условиям (7), следует воспользоваться так называемым “срезающим преобразованием” (см., например, [9]), что в общем случае приводит к разложению по некоторым дробным степеням малого параметра ε.

Замечание 6. Ограничения вида (7) на наличие резонансных соотношений не являются существенными и их можно убрать, если на соответствующем шаге матрицу Λ_0 представить в виде $\Lambda_0 = \bar{D}_0 + i\bar{C}_0$ $(\bar{C}_0 = 2\pi T^{-1}\operatorname{diag}\{m_1, \ldots, m_n\})$, где спектр матрицы $\bar{D}_0$ уже удовлетворяет условиям (7), что позволяет после замены $y = \exp(i\bar{C}_0)z$ перейти к системе вида (8).

Для иллюстрации рассмотрим пример. Система регулярно возмущенных линейных уравнений [4]

$$\ddot{x} + a^2x = 2\varepsilon y \sin t, \qquad \ddot{y} + b^2y = 2\varepsilon x \cos t$$

описывает взаимодействие двух линейных осцилляторов при отсутствии резонансов $(a \neq b,$ $ab \neq 0,$ $|a \pm b| \neq 1)$. Замена $x_1 = x,$ $x_2 = \dot{x},$ $x_3 = y,$ $x_4 = \dot{y},$ $z_{1,2} = x_2 \pm iax_1,$ $z_{3,4} = x_4 \pm ibx_3$ позволяет перейти к системе четвертого порядка $\dot{z} = (\Lambda_0 + \varepsilon A_1(t))z,$ где

$$z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T, \quad \Lambda_0 = \operatorname{diag}\{ia, -ia, ib, -ib\},$$

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & b^{-1}N_0 \sin t \\ a^{-1}N_0 \cos t & 0 \end{pmatrix}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

которая с помощью приведенного выше алгоритма может быть преобразована к виду $\dot{v} = (\sum_{k=0}^2 \Lambda_k \varepsilon^k + O(\varepsilon^2))v,$ где

$$\Lambda_1 = O, \quad \Lambda_2 = \operatorname{diag}\{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\}, \quad \nu_1 = \nu_2 = -\nu_3 = -\nu_4 = \frac{1}{2ab}\left(\frac{1}{1-(a+b)^2} - \frac{1}{1-(a-b)^2}\right).$$

Структура спектра матриц Λ_k $(k = \overline{0,2})$ позволяет сделать вывод о неустойчивости тривиального решения исходной системы при любых действительных параметрах a и b.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М., 1950.
2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
3. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., 1972.
4. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. М., 1971.
5. *Морозов В.М., Каленова В.И.* Оценивание и управление в нестационарных линейных системах. М., 1988.
6. *Магницкий Н.А.* Асимптотические методы анализа нестационарных управляемых систем. М., 1992.
7. *Коняев Ю.А., Мартыненко Ю.Г.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1427–1429.
8. *Коняев Ю.А., Мартыненко Ю.Г.* // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 375–381.
9. *Коняев Ю.А.* // Мат. сб. 1993. № 12. С. 133–144.
10. *Коняев Ю.А.* // Изв. вузов. Математика. 2000. № 6. С. 10–15.

Российский университет дружбы народов, г. Москва,
Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
06.01.2001 г.