МАЙ 1995 г., ТОМ 31, № 5

УДК 517.95

В. Н. МАСЛЕННИКОВА, И. М. ПЕТУНИН

АСИМПТОТИКА ПРИ $t\to\infty$ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

В работе исследуются асимптотические по времени свойства решения первой начально-краевой задачи для уравнения гравитационно-гироскопических волн

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta-\beta^2)u+\left[N^2\Delta_2+\omega^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\beta^2\right)\right]u=0,$$
$$x\in\mathbf{R}^3_+=\{x:x'=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2,\ x_3>0\},\ t>0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0}=u_0(x),\ \partial u/\partial t|_{t=0}=u_1(x) \tag{2}$$

и граничным условием

$$u|_{x_3=0}=0. \tag{3}$$

Рассматриваемая задача возникает при описании малых колебаний стратифицированной вращающейся несжимаемой невязкой жидкости в случае, когда стационарное распределение плотности является экспоненциальной функцией [1—3]. Здесь постоянные N, ω и $\beta>0$ — частота Вейселя — Брента, параметр Кориолиса и параметр, характеризующий распределение плотности соответственно; Δ, Δ_2— операторы Лапласа по трем и первым двум пространственным переменным.

Качественные свойства решений задач динамики стратифицированных жидкостей при $\omega=0$ исследовались в целом ряде работ (см., например, [2, 3]). В частности, в [3] анонсирован результат об асимптотическом поведении при $t\to\infty$ решения задачи Коши для уравнения гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска, т. е. при $\beta=0$, а именно утверждается при условии принадлежности начальных данных классу $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbf{R}^3)$, что решение задачи Коши ведет себя как $O(t^{-1/2})$ при $t\to\infty$ на произвольном компакте $K\subset\mathbf{R}^3$. Особенно подробно исследовались асимптотические свойства при $t\to\infty$ решений задачи Коши и начально-краевых задач для уравнений и систем Соболева ($\beta=N=0$) и задачи Коши для уравнения внутренних волн ($\beta=\omega=0$) (см. [4—8], где можно найти другие ссылки).

Рассмотрим задачу (1)—(3). Пусть $\rho(x')=1+|x'|$. Определим функциональное пространство $\overset{\circ}{W}{}^l_{1,\rho}(\mathbf{R}^3_+)$: функция $\varphi(x)\in\overset{\circ}{W}{}^l_{1,\rho}(\mathbf{R}^3_+)$, если $\varphi(x)\in\overset{\circ}{W}{}^l_1(\mathbf{R}^3_+)$ и норма $\|\varphi,\overset{\circ}{W}{}^l_{1,\rho}\|=\sum_{|\alpha|\leqslant l}\|\rho(x')D^\alpha\varphi(x),\ L_1(\mathbf{R}^3_+)\|<\infty$.

Целью настоящей работы является доказательство следующей основной теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $N^2\neq\omega^2$. *Если* $u_j(x)\in\overset{\circ}{W}{}^8_{1,\rho}(\mathbf{R}^3_+)\cap W^{10}_1(\mathbf{R}^3_+)$, $j=0,1$, *то при* $t\geqslant t_0>0$ *для любого* x, *принадлежащего произвольному* *компакту $K \subset \mathbf{R}^3_+$, решение задачи (1)—(3) удовлетворяет оценке $|u(x, t)| \leqslant C\rho(x')/t$, где C — абсолютная постоянная.*

Если $u_j(x) \in \overset{\circ}{C}{}^8(\mathbf{R}^3_+)$, $j=0, 1$, то при $t \to \infty$ решение задачи (1)—(3) имеет асимптотическое представление $u(x, t) = A_0(x_3)(\sin \omega t)/t + A_1(x_3)(\cos \omega t)/t + (\rho(x')/t)H(x, t)$, где равномерно по x, принадлежащих произвольному компакту $K \subset \mathbf{R}^3_+$, функция $H(x, t) = o(1)$ при $t \to \infty$, а функции $A_n(x_3)$, $n=0, 1$, равномерно ограничены по $x_3 \in \mathbf{R}^1_+$ и имеют вид

$$A_n(x_3) = \omega^{1-n}(-1)^n \int_{\mathbf{R}^3_+} [B(x_3 - y_3) - B(x_3 + y_3)] [1 + (\Delta - \beta^2)^4] u_n(y) dy,$$

$$n=0, 1,$$

$$B(x_3) = [2\pi^2(\omega^2 - N^2)]^{-1} \int_\beta^\infty \frac{\eta^3}{1+\eta^6} \frac{\cos(x_3\sqrt{\eta^2-\beta^2})}{\sqrt{\eta^2-\beta^2}} d\eta.$$

З а м е ч а н и е. Из приведенной теоремы следует, что наличие в уравнении (1) членов, характеризующих вращение, обусловливает колебательный характер решения, как и в случае задач теории вращающихся жидкостей [4—8].

Работа состоит из двух пунктов: в первом построено классическое решение рассматриваемой задачи и доказана теорема единственности в классе обобщенных решений, т. е. в более широком классе, во втором приведено доказательство теоремы 1.

1. Построение решения. Предполагая начальные данные (2) гладкими и достаточно быстро убывающими при $|x| \to \infty$ и применяя преобразование Фурье по x' и синус-преобразование Фурье по x_3, получаем решение задачи (1)—(3) в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=0}^{1} \int_{\mathbf{R}^3_+} e^{i(x', \xi')} \sin(x_3\xi_3)\Omega^{-j}(\xi)\hat{u}_j(\xi) \times$$
$$\times \cos(t\Omega(\xi) - (\pi/2)j) d\xi, \tag{4}$$

где $\hat{u}_j(\xi) = F_{x' \to \xi'} F^s_{x_3 \to \xi_3}[u_j(x)]$, $j=0, 1$; $\xi \in \mathbf{R}^3_+$, $\Omega(\xi) = \Omega(|\xi'|, \xi_3) = [(N^2|\xi'|^2 + \omega^2(\xi_3^2 + \beta^2))/(|\xi|^2 + \beta^2)]^{1/2}$.

Справедлива следующая

Л е м м а 1. *Если $u_0, u_1 \in \overset{\circ}{W}{}^6_1(\mathbf{R}^3_+) \cap W^8_1(\mathbf{R}^3_+)$, то формула (4) определяет классическое решение задачи (1)—(3).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства леммы достаточно проверить, что функция $u(x, t)$, определенная формулой (4), имеет в $Q_T = (0, T] \times \mathbf{R}^3_+$ все непрерывные производные, входящие в уравнение (1).

Из того что $u_j(x) \in \overset{\circ}{W}{}^6_1(\mathbf{R}^3_+) \cap W^8_1(\mathbf{R}^3_+)$, в силу свойств преобразования Фурье следует оценка $|\hat{u}_j(\xi)| \leqslant C_j(1 + |\xi|^6)^{-1}$, $j=0, 1$. Используя очевидное неравенство $\min(N^2, \omega^2)(|\xi|^2 + \beta^2) \leqslant N^2|\xi'|^2 + \omega^2(\xi_3^2 + \beta^2) \leqslant \max(N^2, \omega^2)(|\xi|^2 + \beta^2)$, оценим производную $\partial_x^m \partial_t^n u(x, t)$, где $m = (m', m_3) \in \mathbf{N}_0^3$, $|m| \leqslant 2$, $0 \leqslant n \leqslant 2$:

$$|\partial_x^m \partial_t^n u(x, t)| = \frac{1}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \sum_{j=0}^{1} \int_{\mathbf{R}^3_+} (i\xi')^{m'} \xi_3^{m_3} e^{i(x', \xi')} \times \right.$$
$$\left. \times \sin(x_3\xi_3 + m_3\pi/2)\Omega^{n-j}(\xi)\hat{u}_j(\xi) \cos(t\Omega(\xi) + \pi(n-j)/2) d\xi \right| \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{j=0}^{1} \int_{\mathbf{R}^3_+} |\xi|^{|m|} |\hat{u}_j(\xi)| d\xi \leqslant C_1 \int_{\mathbf{R}^3_+} \frac{|\xi|^{|m|}}{1+|\xi|^6} d\xi < \infty.$$

Отсюда следует равномерная сходимость интеграла (4) и его производных по x и t, что и доказывает законность дифференцирования интеграла. Лемма 1 доказана.

Пусть $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\mathbf{R}^3_+)$, $\partial_k=\partial/\partial x_k$, $\nabla_k u$ — градиент $(\partial_1 k, \dots, \partial_k u)$ функции $u(x)$, $k=2, 3$, $\nabla_3 u\equiv\nabla u$. Введем в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\mathbf{R}^3_+)$ новое скалярное произведение $[u, v]_\beta = (\nabla u, \nabla v)_{L_2}+\beta^2(u, v)_{L_2}$.

Обозначим через V_T множество функций вида $V_T=\{u(x, t): u\in C([0, T]; \overset{\circ}{W}{}^1_2(\mathbf{R}^3_+)), u_t\in L_2((0, T); \overset{\circ}{W}{}^1_2(\mathbf{R}^3_+))$.

Определение. Функция $u(x, t)\in V_T$ называется обобщенным решением задачи (1)—(3), если она удовлетворяет начальному условию $u|_{t=0}=u_0(x)$ и интегральному тождеству

$$\int_0^T \{[u_t, \eta_t]_\beta - N^2(\nabla_2 u, \nabla_2\eta)_{L_2} - \omega^2(\partial_3 u, \partial_3\eta)_{L_2} - \beta^2\omega^2(u, \eta)_{L_2}\}dt = $$
$$= -[u_1, \eta(\cdot, 0)]_\beta \tag{5}$$

для всех $\eta\in V_T$, для которых выполняется условие $\eta(x, T)=0$.

Приведем доказательство единственности решения задачи (1)—(3) в классе V_T в нашем случае неограниченной области.

Теорема 2. *Задача (1)—(3) не может иметь более одного обобщенного решения.*

Доказательство. Обозначим через $\Omega_\tau=\{x\in\mathbf{R}^3_+, t=\tau\}$ сечение цилиндра Q_T плоскостью $t=\tau$. Пусть u — обобщенное решение задачи (1)—(3) при $u_0\equiv u_1\equiv 0$. Докажем, что $u\equiv 0$ в Q_T.

Возьмем произвольное $\tau\in(0, T)$ и рассмотрим функцию

$$\eta(x, t)=\begin{cases}\int_t^\tau u(x, \theta)d\theta, & 0<t<\tau,\\ 0, & \tau\leqslant t<T.\end{cases}$$

Очевидно, что $\eta(x, t)$ имеет в Q_T обобщенные производные

$$\eta_t(x, t)=\begin{cases}-u(x, t), & 0<t<\tau,\\ 0, & \tau<t<T,\end{cases}\qquad \partial_k\eta(x, t)=\begin{cases}\int_t^\tau \partial_k u(x, \theta)d\theta, & 0<t<\tau,\\ 0, & \tau<t<T.\end{cases}$$

Подставим функцию η в тождество (5), в результате получим

$$\int_0^\tau\Big\{[u_t, u]_\beta + N^2\Big(\nabla_2 u(x, t), \int_t^\tau \nabla_2 u(x, \theta)d\theta\Big)_{L_2} +$$
$$+\omega^2\Big(\partial_3 u(x, t), \int_t^\tau \partial_3 u(x, \theta)d\theta\Big)_{L_2} + \beta^2\omega^2\Big(u(x, t), \int_t^\tau u(x, \theta)\,d\theta\Big)_{L_2}\Big\}dt=0. \tag{6}$$

Справедливы равенства

$$\int_{Q_\tau}\partial_k^s u(x, t)\int_t^\tau \partial_k^s u(x, \theta)d\theta dt dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3_+}\Big(\int_0^\tau \partial_k^s u(x, t)dt\Big)^2dx,$$
$$1\leqslant k\leqslant 3,\ s=0, 1. \tag{7}$$

Действительно, при $s=0$ имеем

$$\int_{\mathbf{R}^3_+}\int_0^\tau u(x, t)\Big[\int_t^\iota u(x, \theta)d\theta\Big]dt dx = \int_{\mathbf{R}^3_+}\int_0^\tau u(x, \theta)\Big(\int_0^\theta u(x, t)dt\Big)dx d\theta =$$
$$=\int_{\mathbf{R}^3_+}\int_0^\tau u(x, \theta)d\theta\int_0^\tau u(x, t)dt dx - \int_{\mathbf{R}^3_+}\int_0^\tau u(x, \theta)\Big(\int_\theta^\tau u(x, t)dt\Big)dx d\theta =$$
$$=\int_{\mathbf{R}^3_+}\Big(\int_0^\tau u(x, t)dt\Big)^2dx - \int_{\mathbf{R}^3_+}\int_0^\tau u(x, t)\Big[\int_t^\tau u(x, \theta)d\theta\Big]dt dx.$$

При этом при перестановке порядка интегрирования, которая приводит к последнему интегралу, использовалась симметрия подынтегральной функции $u(\cdot, t)u(\cdot, \theta)$ по t и θ.

Случай $s=1$ рассматривается аналогичным образом. Используя равенство (7), можем представить (6) в виде

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |\nabla u|^2 dx + \beta^2 \int\limits_{\Omega_\tau} u^2 dx + N^2 \int\limits_{\mathbf{R}^3_+} \Big| \int\limits_0^\tau \nabla_2 u(x,t)\,dt \Big|^2 dx +$$

$$+ \omega^2 \int\limits_{\mathbf{R}^3_+} \Big(\int\limits_0^\tau \partial_3 u(x,t)\,dt\Big)^2 dx + \omega^2\beta^2 \int\limits_{\mathbf{R}^3_+} \Big(\int\limits_0^\tau u(x,t)\,dt\Big)^2 dx = 0,$$

откуда следует, что $\int\limits_{\Omega_\tau} u^2 dx = 0$. В силу произвольности $\tau \in (0, T)$ $u \equiv 0$ в Q_T. Теорема 2 доказана.

Лемма 2. *При выполнении условий леммы 1 функция $u(x, t)$, определенная формулой (4), является обобщенным решением задачи (1)—(3).*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно доказать, что $u(x, t)$ принадлежит классу V_T. Убедимся, что $u(x,t) \in C([0, T]; W_2^1(\mathbf{R}^3_+))$. В силу равенства Парсеваля будем иметь $u(x, t) \in C([0, T]; W_2^1(\mathbf{R}^3_+))$, если $\xi_k^s \hat{u}(\xi, t) \in C([0, T]; L_2(\mathbf{R}^3_+))$, $1 \leqslant k \leqslant 3$, $s = 0, 1$. Последнее следует из непрерывности по $t \in [0, T]$ функции $\hat{u}(\xi, t)$, вложения $W_1^8(\mathbf{R}^3_+) \to W_q^5(\mathbf{R}^3_+)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, и оценки

$$\max_{t\in[0,T]} \|\xi_k^s \hat{u}(\xi,t)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^3_+)} = \max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\mathbf{R}^3_+} \xi_k^{2s} \hat{u}^2(\xi,t)\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{\mathbf{R}^3_+} \xi_k^{2s} [\hat{u}_0^2(\xi) + \hat{u}_1^2(\xi)]\,d\xi \leqslant C_1 [\|u_0\|^2_{W_2^1} + \|u_1\|^2_{W_2^1}] < \infty.$$

Принадлежность $u_t \in L_2((0, T); W_2^1(\mathbf{R}^3_+))$ доказывается аналогичным образом. Лемма 2 доказана.

2. Асимптотика решения задачи при $t \to \infty$. Преобразуем представление (4) к более удобному для дальнейших исследований виду, используя формулы для свертки в $\mathbf{R}^3_+$. Для этого начальные функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ продолжаем для $x_3 < 0$ нечетным образом, тогда с помощью формулы Эйлера, учитывая, что $\Omega(\xi)$ — четная функция от ξ_3, а также предполагая $u_0(x), u_1(x) \in \mathring{W}_1^8 \cap W_1^{10}(\mathbf{R}^3_+)$, решение (4) задачи (1)—(3) записываем в виде

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{1} \int\limits_{\mathbf{R}^3_+} [K_j(x-y,t) - K_j(x-y^*,t)]\,(1 + (\Delta - \beta^2)^4) \times$$
$$\times u_j(y)\,dy, \quad y^* = (y_1, y_2, -y_3), \tag{8}$$

$$K_j(x,t) = \frac{1}{4\pi^3} \int\limits_{\mathbf{R}^3_+} e^{i(x',\xi')} \frac{\cos(x_3\xi_3)\,\Omega^{-j}(|\xi'|,\xi_3) \cos(t\Omega(|\xi'|,\xi_3) - (\pi/2)j)}{1 + (|\xi|^2 + \beta^2)^4}\,d\xi,$$
$$j = 0, 1. \tag{9}$$

Введем функцию

$$g(x,z) = \frac{z^2}{2\pi^2} \int\limits_0^{1/\beta} \frac{\xi^4}{1 + (z\xi)^8} J_0\Big(|x'| \frac{\sqrt{1-z^2}}{z\xi}\Big) \times$$
$$\times [\cos(x_3\sqrt{1-\beta^2\xi^2}/\xi)] / \sqrt{1-\xi^2\beta^2}\,d\xi, \tag{10}$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Справедлива

Л е м м а 3. *Функция* $g(x, z) \in C(\mathbf{R}_+^3 \times [0, 1])$, *ее производная* $\partial_z g(x, z) \in C(\mathbf{R}_+^3 \times [0, 1))$ *и справедливы оценки*

$$|\partial_z^k g(x, z)| \leqslant C(1+|x'|)^k (1+(1-z^2)^{-1/2})^k, \quad k=0, 1, \tag{11}$$

где C *— абсолютная постоянная.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $k=0$ формула (11) очевидна. Производная $g_z(x, z)$ представляет собой сумму двух равномерно сходящихся относительно z интегралов, один из которых будет иметь при себе множитель $(1-z^2)^{-1/2}$. Лемма 3 доказана.

Л е м м а 4. *Если* $N^2 \neq \omega^2$, *то при* $t > 0$ *ядра* $K_j(x, t)$, $j=0, 1$, *могут быть представлены в виде*

$$K_j(x, t) = [G_j(x_3) \sin(\omega t + \pi j/2) + \rho(x') D_j(x, t)]/t, \tag{12}$$

где

$$G_j(x_3) = \frac{(-1)^j \omega^{1-j}}{2\pi^2(\omega^2 - N^2)} \int\limits_\beta^\infty \frac{\eta^3}{1+\eta^8} \frac{\cos(x_3\sqrt{\eta^2-\beta^2})}{\sqrt{\eta^2-\beta^2}} d\eta,$$

функции $D_j(x, t) = O(1)$ *равномерно по* $x \in \mathbf{R}_+^3$, $t > 0$ *и* $D_j(x, t) = o(1)$ *при* $t \to \infty$ *для всех* x, *принадлежащих компакту* $K \subset \mathbf{R}_+^3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку ядра $K_j(x, t)$ однотипны, докажем лемму для одного из них: $K_1(x, t)$. Используя формулу Бохнера для преобразования Фурье, представим $K_1(x, t)$ в виде

$$K_1(x, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^\infty \eta J_0(|x'|\eta) \left(\int\limits_0^\infty \frac{\cos(x_3\xi_3)}{1+(\eta^2+\xi_3^2+\beta^2)^4} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\sin(t\Omega(\eta, \xi_3))}{\Omega(\eta, \xi_3)} d\xi_3 \right) d\eta,$$

где $\Omega(\eta, \xi_3) = [(N^2\eta^2 + \omega^2(\xi_3^2+\beta^2))/(\eta^2+\xi_3^2+\beta^2)]^{1/2}$. Сделаем замену переменной $\xi_3 \to \theta : \xi_3 = \sqrt{\theta^2-\beta^2}$. Тогда

$$K_1(x, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^\infty \eta J_0(|x'|\eta) \int\limits_\beta^\infty \frac{\cos(x_3\sqrt{\theta^2-\beta^2})}{1+(\eta^2+\theta^2)^4} \frac{\sin(t\Omega(\eta, \sqrt{\theta^2-\beta^2}))}{\Omega(\eta, \sqrt{\theta^2-\beta^2})} \times$$

$$\times \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta^2-\beta^2}} d\eta.$$

Переходя к полярным координатам по формулам $\eta = r\sin\varphi$, $\theta = r\cos\varphi$, будем иметь

$$K_1(x, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi \frac{\sin(t\sqrt{N^2\sin^2\varphi+\omega^2\cos^2\varphi})}{\sqrt{N^2\sin^2\varphi+\omega^2\cos^2\varphi}} \times$$

$$\times \int\limits_{\beta/\cos\varphi}^\infty \frac{r^3}{1+r^8} J_0(|x'|r\sin\varphi) \frac{\cos(x_3\sqrt{r^2\cos^2\varphi-\beta^2})}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi-\beta^2}} dr d\varphi.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменных $\varphi \to z$, $r \to y$: $\cos\varphi = z$, $r = \beta/y$, получим

$$K_1(x, t) = \frac{\beta^3}{2\pi^2} \int\limits_0^1 z \frac{\sin(t\sqrt{N^2+(\omega^2-N^2)z^2})}{\sqrt{N^2+(\omega^2-N^2)z^2}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^z \frac{y^4}{\beta^8+y^8} J_0\left(|x'| \frac{\beta}{y} \sqrt{1-z^2}\right) \frac{\cos(x_3(\beta/y)\sqrt{z^2-y^2})}{\sqrt{z^2-y^2}} dy \right) dz.$$

Окончательно, делая замену переменных $y \to \xi : y = \beta z \xi$ и используя введенную в (10) функцию $g(x, z)$, можем представить ядро $K_1(x, t)$ в виде

$$K_1(x, t) = \int_0^1 g(x, z) z^3 \frac{\sin(t\sqrt{N^2 + (\omega^2 - N^2) z^2})}{\sqrt{N^2 + (\omega^2 - N^2) z^2}}\, dz.$$

В силу леммы 3, интегрируя по частям по z в последнем интеграле, будем иметь

$$K_1(x, t) = \frac{g(x, 1)}{(N^2 - \omega^2) t} \cos(\omega t) + \frac{1}{(\omega^2 - N^2) t} \int_0^1 \cos(t\sqrt{N^2 + (\omega^2 - N^2) z^2}) \times$$

$$\times \partial_z (z^2 g(x, z))\, dz. \tag{13}$$

Введем обозначения (считая $N^2 \neq \omega^2$): $G_1(x_3) = g(x, 1)/(N^2 - \omega^2)$;

$$D_1(x, t) = \frac{1}{\rho(x')(\omega^2 - N^2)} \int_0^1 \cos(t\sqrt{N^2 + (\omega^2 - N^2) z^2})\, \partial_z (z^2 g(x, z))\, dz, \quad \text{где}$$

функция $g(x, z)$ определена формулой (10) и $\rho(x') = 1 + |x'|$. Искомое асимптотическое разложение (12) получаем из представления (13) ядра $K_1(x, t)$. При этом утверждение о том, что $D_1(x, t) = O(1)$ равномерно по $x \in \mathbf{R}^3_+$, $t > 0$, следует из явного вида функции D_1 и оценок (11) леммы 3, а для доказательства того, что $D_1(x, t) = o(1)$ при $t \to \infty$ равномерно по x, принадлежащих компакту $K \subset \mathbf{R}^3_+$, достаточно в интеграле, определяющем D_1, сделать замены переменных $z \to \eta : z = \sqrt{(N^2 - \eta^2)/(N^2 - \omega^2)}$ при $\omega^2 < N^2$ или $z = \sqrt{(\eta^2 - N^2)/(\omega^2 - N^2)}$ при $\omega^2 > N^2$ и применить лемму Римана — Лебега. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. Используя представление (8) решения рассматриваемой задачи (1)—(3) и лемму 4, будем иметь

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^{1} \frac{\sin(\omega t + (\pi/2) j)}{t} \int_{\mathbf{R}^3_+} [G_j(x_3 - y_3) - G_j(x_3 + y_3)]\, P(\partial) u_j(y)\, dy +$$

$$+ \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{1} \int_{\mathbf{R}^3_+} \rho(x' - y') [D_j(x - y, t) - D_j(x - y^*, t)]\, P(\partial) u_j(y)\, dy, \tag{14}$$

где $P(\partial) = 1 + (\Delta - \beta^2)^4$ и функции $G_j(x_3)$, $D_j(x, t)$ определены в лемме 4.

Утверждение теоремы следует из представления (14) решения задачи, явного вида функций $G_j(x_3)$ и свойств функций $D_j(x, t)$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Из представления (4) решения задачи следует, что при $N^2 = \omega^2$

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{1} u_k(x) \bar{\omega}^k \cos(\omega t - \pi k/2),$$

и, следовательно, оно является осциллирующей функцией t.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 93—011—1771.

Литература

1. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М., 1982.

2. Габов С. А., Свешников А. Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М., 1986.

3. Габов С. А., Свешников А. Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М., 1990.

4. Масленникова В. Н. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1968. Т. 103. С. 117—141.

5. Масленникова В. Н., Боговский М. Е. // Дифференциальные уравнения с частными производными. (Тр. сем. С. Л. Соболева). Новосибирск, 1976. Т. 2. С. 49—68.

6. Петунин И. М. // Дифференциальные уравнения с частными производными. (Тр. сем. С. Л. Соболева). Новосибирск, 1981. Т. 2. С. 54—77.

7. Масленникова В. Н., Петунин И. М. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 3. С. 489—500.

8. Масленникова В. Н., Гиниатуллин А. И. // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 157—171.

Российский университет дружбы народов

Поступила в редакцию 28 марта 1994 г.