V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, Iterative procedures for solving ill-posed boundary value problems that preserve the differential equations,
Algebra i Analiz, 1989, Volume 1, Issue 5, 144–170

https://www.mathnet.ru/eng/aa46

В. А. Козлов, В. Г. Мазья

О СОХРАНЯЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕДУРАХ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Для некорректных краевых задач предлагаются итерационные процедуры, на каждом шаге которых приходится решать корректные задачи для исходного дифференциального уравнения. Регуляризующий характер алгоритмов обеспечивается только правильным выбором краевых условий при каждой итерации.

Введение

0.1. Приемам приближенного решения некорректных краевых задач посвящена обширная литература (см. [1–4]). В частности, широко используются методы, основанные на изменении типа или порядка уравнения при помощи малых сингулярных возмущений (см. [5]).

В настоящей статье для некорректных задач предлагаются итерационные процедуры другого типа, на каждом шаге которых приходится решать корректные задачи для исходного дифференциального уравнения. Регуляризирующий характер этих алгоритмов обеспечивается только правильным выбором краевых условий при каждой итерации.

В двух первых параграфах рассматриваются дифференциальные уравнения первого и второго порядков с самосопряженным операторным коэффициентом в гильбертовом пространстве, имитирующие уравнения Лапласа, теплопроводности и волновое. В „эллиптическом" случае речь идет о задаче Коши, в „параболическом" – об обратной задаче и в „гиперболическом" – о задаче Дирихле. Упомянутые краевые задачи не относятся к классу корректных по Адамару.

§ 1 посвящен эллиптическому и параболическому случаям. Используемые здесь алгоритмы являются альтернирующими – четным и нечетным итерациям соответствуют два типа краевых условий.

Ключевые слова: некорректные задачи, итерационные альтернирующие алгоритмы, краевые задачи для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений.

В § 2 решаются некорректные задачи для параболического и эллиптического уравнений. В отличие от § 1 изучаемые здесь итерационные методы сводятся к последовательному обращению оператора одной корректной задачи.

Для всех обсуждаемых в § 1, 2 алгоритмов даны оценки параметров регуляризации и показано, что алгоритмы имеют оптимальный порядок. При этом существенно используются явные представления итераций через начальное приближение и данные задачи, формулируемые в терминах спектрального разложения операторного коэффициента уравнения.

В § 3 рассматривается задача Коши для сильно эллиптической системы порядка $2m$ в ограниченной области Ω. Данные Коши на подмножестве S границы $\partial\Omega$ разбиваются на две группы – Дирихле и Неймана. Для отыскания решения используется следующий „альтернирующий" итерационный алгоритм. На каждом шаге решается смешанная эллиптическая краевая задача, причем на S попеременно задаются исходные данные Дирихле или Неймана. На $\partial\Omega\backslash S$ ставятся соответственно условия Неймана или Дирихле, данные для которых берутся с предыдущего шага. Начальное приближение на $\partial\Omega\backslash S$ выбирается произвольно.

Для уравнения Лапласа и системы Ламе такой алгоритм был исследован в работе авторов и А. В. Фомина (см. [6]). Здесь рассмотрение проводится на основе некоторой абстрактной схемы, возможно представляющей самостоятельный интерес.

Следующий параграф посвящен одной некорректной задаче для волнового уравнения в цилиндре $(0, T)\times\Omega$. Наряду с обычными граничными условиями Дирихле или Неймана на $(0, T)\times\partial\Omega$ задаются данные Коши в некоторые моменты $t=t_j$, $0=t_0<\ldots<t_N=T$, на множествах $G_j\subset\Omega$. Предложен альтернирующий алгоритм приближенного решения этой задачи.

Показано, что итерационные процедуры, изучаемые в § 3, 4, являются регуляризирующими, а также что все рассмотренные в статье алгоритмы являются разрешимыми в смысле работ [7, 8].

Заключительный § 5 стоит несколько особняком в работе. В нем обоснована сходимость некоторых известных итерационных алгоритмов решения операторных уравнений „первого рода" $Ax=f$ без обычных в этом круге вопросов требований компактности или самосопряженности операторов. Последние заменяются некоторым условием „диссипативности". Это достигается за счет применения установленной в начале параграфа леммы о сильной сходимости степеней линейного нерастягивающего оператора C в гильбертовом пространстве H, удовлетворяющего условию $\|v-Cv\|_H^2\leqslant c(\|v\|_H^2-\|Cv\|_H^2)$.

0.2. Приведем несколько используемых на протяжении всей работы определений и результатов теории некорректных задач [1–3], [7].

Пусть X, Y – банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$. Рассмотрим уравнение

$$\mathfrak{A}x=y, \tag{0.1}$$

где $\mathfrak{A}$ – ограниченный линейный оператор из X в Y.

Определение 1. *Семейство ограниченных линейных операторов $R_k: Y\to X$, $k=0, 1, \ldots$, называется регуляризирующим уравнение* (0.1) *на элементе $x_0\in X$, если существует положительное число δ_0 и функции $k(\delta)$, $\epsilon(\delta)$, определенные на $(0, \delta_0)$, такие, что $\epsilon(\delta)\to 0$, при $\delta\to 0$, и из неравенства $\|y-\mathfrak{A}x_0\|_Y\leqslant\delta$ вытекает оценка $\|R_{k(\delta)}y-x_0\|_X\leqslant\epsilon(\delta)$.*

Определение 2. *Семейство ограниченных линейных операторов $R_k: Y\to X$, $k=0, 1, \ldots$, регуляризирует уравнение* (0.1) *на множестве $\mathcal{M}\subset X$, если оно* *регуляризирует уравнение* (0.1) *на каждом элементе* $x_0 \in \mathcal{M}$ *и функции* $k(\delta)$, $\epsilon(\delta)$ *можно выбрать не зависящими от* $x_0 \in \mathcal{M}$.

Определение 3. *Регуляризирующее семейство операторов* $\left\{R_k\right\}_{k\geqslant 0}$ *называется разрешимым, если из сходимости последовательности* $\left\{R_k y\right\}_{k\geqslant 0}$ *к вектору* x *вытекает, что* $y \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{A}x = y$.

Известно и легко проверяется (теорема 1, с. 43, [3]), что семейство линейных ограниченных операторов $\left\{R_k\right\}_{k\geqslant 0}$ регуляризирует уравнение (0.1) на элементе x_0, если $R_k(\mathcal{A}x_0) \to x_0$ при $k \to \infty$.

Пусть δ_0 – положительное число. Методом $\mathcal{P}$ решения уравнения (0.1) назовём семейство отображений $P_\delta : Y \to X$, $\delta \in (0, \delta_0)$. Точность метода $\mathcal{P}$ на множестве $\mathcal{M} \subset X$ принято характеризовать величиной

$$\Delta(\delta, \mathcal{M}, \mathcal{P}) = \sup_{\substack{u\in \mathcal{M}, f \in Y,\\ \|f - \mathcal{A}u\|_Y \leqslant \delta}} \|P_\delta f - u\|_X.$$

Говорят, что метод $\mathcal{P}$ имеет оптимальный порядок на $\mathcal{M}$, если существует такая положительная постоянная c, что для всех $\delta \in (0, \delta_0)$ справедливо неравенство

$$\Delta(\delta, \mathcal{M}, \mathcal{P}) \leqslant c \inf_{\mathcal{S}} \Delta(\delta, \mathcal{M}, \mathcal{S}), \tag{0.2}$$

где inf берется по всевозможным методам решения уравнения (0.1).

Введем функцию

$$\omega(\tau, \mathcal{M}) = \sup\left\{\|x_1 - x_2\|_X : x_1, x_2 \in \mathcal{M}, \|\mathcal{A}(x_1 - x_2)\|_Y \leqslant \tau\right\}.$$

Известно (см. [3]), что

$$\inf_{\mathcal{P}} \Delta(\delta, \mathcal{M}, \mathcal{P}) \geqslant \frac{1}{2}\omega(2\delta, \mathcal{M}). \tag{0.3}$$

Пусть семейство ограниченных линейных операторов $R_k : Y \to X$, $k = 0, 1, \ldots$, регуляризирует уравнение (0.1) на множестве $\mathcal{M}$. Тогда можно определить метод решения уравнения (0.1) $\mathcal{R} = \left\{R_{k(\delta)}\right\}_{0<\delta<\delta_0}$. В силу (0.2), (0.3) $\mathcal{R}$ будет иметь оптимальный порядок, если

$$\epsilon(\delta) \leqslant c\omega(2\delta, \mathcal{M}), \tag{0.4}$$

где c – постоянная, не зависящая от $\delta \in (0, \delta_0)$.

§ 1. Альтернирующие методы решения некорректных задач для дифференциальных уравнений с операторным коэффициентом

1.1. Предварительные сведения. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_H$ и нормой $\|\cdot\|_H$ задан самосопряженный положительный неограниченный оператор A.

Обозначим через H^a, $a \in (-\infty, \infty)$ пополнение множества векторов $v \in H$, для которых

$$\| v \|_{H^a} = \left(\int_0^\infty \lambda^{2a} d(E(\lambda)v, v)_H \right)^{1/2} < \infty,$$

где $E(\lambda)$ – спектральная функция оператора A.

Зафиксируем положительное число T. Пространством $L_2(0, T;\ H^a)$ называется множество функций $u = u(t)$ со значениями в H^a, для которых конечна норма

$$\| u \|_{L_2(0,\, T;\ H^a)} = \left(\int_0^T \| u(t) \|^2_{H^a} dt \right)^{1/2}.$$

Пространство $C(0, T;\ H^a)$ состоит из непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций со значениями в H^a. Норма в нем определяется равенством

$$\| u \|_{C(0,\, T;\, H^a)} = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \| u(t) \|_{H^a}.$$

Пространства $L_2(0, T;\ H^a)$, $C(0, T;\ H^a)$ содержатся в $\mathscr{D}'(0, T;\ H^a)$ – пространстве распределений на $(0, T)$ со значениями в H^a. Поэтому для их элементов определены обобщенные производные по переменной t, принадлежащие $\mathscr{D}'(0, T;\ H^a)$ (см. § 1, гл. 1, [9]).

1.2. **„Эллиптическое" уравнение.** Рассмотрим задачу Коши

$$(\partial_t^2 - A^2) u = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < T, \tag{1.1}$$

$$u(0) = \varphi, \quad \partial_t u(0) = \psi, \tag{1.2}$$

где $\varphi \in H^{1/2}$, $\psi \in H^{-1/2}$. Положим

$$W = \left\{ u \in L_2(0, T;\ H^1) : (\partial_t^2 - A^2) u = 0,\ \ 0 < t < T \right\}.$$

Норма в пространстве W определяется равенством

$$\| u \|_W = \left(\int_0^T (\| u(t) \|^2_{H^1} + \| \partial_t u(t) \|^2_H) dt \right)^{1/2}.$$

Это определение корректно, так как из включения $u \in W$ следует, что $\partial_t^2 u \in$ $\in L_2(0, T;\ H^{-1})$, и поэтому (см. § 2, гл. 1, [9]) $\partial_t u \in L_2(0, T;\ H)$. Кроме того (см. § 2, гл.1, [9]), $\left\{ u(0), \partial_t u(0) \right\}, \left\{ u(T), \partial_t u(T) \right\} \in H^{1/2} \times H^{-1/2}$.

Решением задачи (1.1), (1.2) назовем функцию $u \in W$, для которой выполнены начальные условия (1.2). Задачу (1.1), (1.2) можно записать в операторной форме $\mathfrak{A} u = \left\{ \varphi, \psi \right\}$, где

$$W \ni u \xrightarrow{\mathfrak{A}} \left\{ u(0),\ \partial_t u(0) \right\} \in H^{1/2} \times H^{-1/2}.$$

Из явного представления решения в виде

$$u(t) = \mathrm{ch}(At)\varphi + \mathrm{sh}(At)A^{-1}\psi$$

следует, что задача (1.1), (1.2) не является корректной по Адамару (ср. [1]).

Рассмотрим следующую итерационную процедуру отыскания приближенного решения задачи (1.1), (1.2).

Пусть η – произвольный вектор из пространства $H^{-1/2}$. Начальное приближение $u^{(0)}$ является решением задачи

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - A^2)u^{(0)} = 0 \ \text{ при } \ 0 < t < T, \\ u^{(0)}(0) = \varphi, \quad \partial_t u^{(0)}(T) = \eta. \end{cases}$$

Если построена функция $u^{(2k)}$, то функция $u^{(2k+1)}$ находится как решение задачи

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - A^2)u^{(2k+1)} = 0 \ \text{ при } \ 0 < t < T, \\ \partial_t u^{(2k+1)}(0) = \psi, \quad u^{(2k+1)}(T) = u^{(2k)}(T). \end{cases} \tag{1.3}$$

В свою очередь функция $u^{(2k+2)}$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - A^2)u^{(2k+2)} = 0 \ \text{ при } \ 0 < t < T, \\ u^{(2k+2)}(0) = \varphi, \quad \partial_t u^{(2k+2)}(T) = \partial_t u^{(2k+1)}(T). \end{cases}$$

Тем самым определено семейство линейных операторов $\{R_k\}_{k\geqslant 0}$, непрерывно действующих из $H^{1/2} \times H^{-1/2}$ в W по правилу $(\varphi, \psi) \to R_k(\varphi, \psi,; \eta) = u^{(k)}$. Оно зависит от произвольного вектора $\eta \in H^{-1/2}$. Покажем, что построенное семейство регуляризирует задачу (1.1), (1.2).

Решая задачу (1.3) при $k = 0, 1, \ldots$, находим

$$u^{(2k+1)}(t) = \frac{\mathrm{ch}(At)}{\mathrm{ch}(AT)} u^{(2k)}(T) + \frac{\mathrm{sh}(A(t-T))}{\mathrm{ch}(AT)} A^{-1}\psi.$$

(Здесь и далее $f(A)/g(A) = f(A)(g(A))^{-1}$). Аналогично

$$u^{(2k)}(t) = \frac{\mathrm{sh}(At)}{\mathrm{ch}(AT)} A^{-1} \partial_t u^{(2k-1)}(T) + \frac{\mathrm{ch}(A(t-T))}{\mathrm{ch}(AT)} \varphi,$$

$$u^{(0)}(t) = \frac{\mathrm{sh}(At)}{\mathrm{ch}(AT)} A^{-1}\eta + \frac{\mathrm{ch}(A(t-T))}{\mathrm{ch}(AT)} \varphi.$$

Окончательно получаем следующие представления для итераций $u^{(2k+2)}$, $u^{(2k+1)}$:

$$u^{(2k+2)}(t) = \frac{\mathrm{sh}(At))}{[\mathrm{ch}(AT)]^2} \sum_{0\leqslant m\leqslant k} [\mathrm{th}(AT)]^{2m}(\mathrm{th}(AT)\varphi + A^{-1}\psi) +$$

$$+\frac{\mathrm{ch}(A(t-T))}{\mathrm{ch}(AT)}\varphi + \frac{\mathrm{sh}(At)}{A\,\mathrm{ch}(AT)}[\mathrm{th}(AT)]^{2k+2}\eta, \tag{1.4}$$

$$u^{(2k+1)}(t) = \frac{\mathrm{ch}(At)}{[\mathrm{ch}(AT)]^2} \sum_{1\leqslant m\leqslant k} [\mathrm{th}(AT)]^{2m}(\mathrm{th}(AT)\varphi + A^{-1}\psi) +$$

$$+\frac{\mathrm{ch}(At)}{[\mathrm{ch}(AT)]^2}\varphi + \frac{\mathrm{sh}(A(t-T))}{A\,\mathrm{ch}(AT)}\psi + \frac{\mathrm{ch}(At)}{A\,\mathrm{ch}(AT)}[\mathrm{th}(AT)]^{2k+1}\eta. \tag{1.5}$$

Оператор $\mathrm{th}(AT)$ ограничен в H и его норма равна единице. Поэтому из (1.4), (1.5) выводим оценку

$$\|R_k(\varphi, \psi; \eta)\|_W \leqslant ck(\|\varphi\|_{H^{1/2}} + \|\psi\|_{H^{-1/2}}) + c\|\eta\|_{H^{-1/2}}. \tag{1.6}$$

Регулярность построенного семейства операторов вытекает из следующей теоремы:

Теорема 1. *Пусть задача* (1.1), (1.2) *имеет решение* $u \in W$. *Тогда для любого* $\eta \in H^{-1/2}$

$$R_k(\varphi, \psi; \eta) \to u \quad \text{при} \quad k\to\infty \tag{1.7}$$

в пространстве W.

Доказательство. Из (1.4), (1.5) вытекает, что

$$R_{2k}(\varphi, \psi; \eta) - u = \frac{\mathrm{sh}(At)}{\mathrm{ch}(AT)} A^{-1}[\mathrm{th}(AT)]^{2k}(\eta - \partial_t u(T)), \tag{1.8}$$

$$R_{2k+1}(\varphi, \psi; \eta) - u = \frac{\mathrm{ch}(At)}{\mathrm{ch}(AT)} A^{-1}[\mathrm{th}(AT)]^{2k+1}(\eta - \partial_t u(T)). \tag{1.9}$$

Так как для любого вектора v из пространства H $[\mathrm{th}(AT)]^k v \to 0$ при $k\to\infty$, то из двух последних равенств следует сходимость (1.7). Теорема доказана.

При дополнительных предположениях о разыскиваемом решении и начальном приближении получим информацию о функции $\epsilon(\delta)$ и параметре регуляризации $k(\delta)$.

Теорема 2. *Пусть* $u \in W, \eta - \partial_t u(T) \in H_{-1/2+a}$, $a>0$. *Пусть еще*

$$\|\varphi - u(0)\|_{H^{1/2}} + \|\psi - \partial_t u(0)\|_{H^{-1/2}} \leqslant \delta, \quad \|\eta - \partial_t u(T)\|_{H^{-1/2+a}} \leqslant \rho.$$

Тогда при $\delta < \rho T^a/2$ *можно положить*

$$k(\delta) = [\rho\delta^{-1}T^a(\log(\rho\delta^{-1}T^a))^{-a}], \tag{1.10}$$

$$\epsilon(\delta) = c\rho T^a (\log k(\delta))^{-a}, \tag{1.11}$$

где c не зависит от δ, ρ, T и [ ] – целая часть числа.

Доказательство. Справедливо представление

$$R_k(\varphi, \psi;\ \eta) - u = R_k(\varphi - u(0),\ \psi - \partial_t u(0);\ 0) + R_k(0, 0;\ \eta - \partial_t u(T)). \tag{1.12}$$

Используя формулы (1.8), (1.9), находим

$$\| R_k(0,0;\ \xi)\|^2_W = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} 2\lambda T}{\lambda(\operatorname{ch}\lambda T)^2} (\operatorname{th}\lambda T)^{2k} d(E(\lambda)\xi, \xi)_H,$$

где $\xi = \eta - \partial_t u(T)$. Так как

$$\sup_{x\in(0,\infty)} \operatorname{sh} 2x (\operatorname{th} x)^{2k} x^{-2a} (\operatorname{ch} x)^{-2} \leqslant c(\log k)^{-2a},$$

то

$$\| R_k(0, 0;\ \xi)\|_W \leqslant cT^a (\log k)^{-a} \|\xi\|_{H^{-1/2+a}}.$$

Применяя последнюю оценку и неравенство (1.6) для оценки правой части (1.12), получаем

$$\| R_k(\varphi, \psi; \eta) - u\|_W \leqslant c\left\{k\delta + \rho T^a (\log k)^{-a}\right\}.$$

Определяя $k(\delta)$ формулой (1.10), приходим к оценке $\| R_k(\varphi, \psi;\ \eta) - u\|_W \leqslant \epsilon(\delta)$. Теорема доказана.

Пусть

$$\mathcal{M}_{\rho, a}(\eta) = \left\{u \in W:\ \|\partial_t u(T) - \eta\|_{H^{-1/2+a}} \leqslant \rho\right\},$$

где $a > 0$, $\eta \in H^{-1/2}$. Положим $\omega(\delta, \rho, a) = \omega(\delta;\ \mathcal{M}_{\rho,a}(\eta))$. Очевидно, что функция ω не зависит от η.

В следующем утверждении при дополнительном предположении о спектре оператора A показано, что построенный алгоритм имеет оптимальный порядок.

Теорема 3. *Пусть при некотором $\beta > 0$ любой интервал $(a^\beta, (a+1)^\beta)$, $a \geqslant a_0 > 0$ имеет непустое пересечение со спектром оператора A. Тогда метод $\mathcal{R} = \left\{R_{k(\delta)}\right\}$ имеет оптимальный порядок на множестве $\mathcal{M}_{\rho, a}(\eta)$.*

Доказательство. В силу (0.4) достаточно доказать оценку

$$\omega(\delta, \rho, a) \geqslant c\epsilon(\delta), \tag{1.13}$$

где $\delta < \rho T^a/2$, а ϵ – функция, определенная формулой (1.11).

Рассмотрим функцию $u \in W$ такую, что $u(0) = \varphi$, $\partial_t u(0) = 0$, и функция $\lambda \to (E(\lambda)\varphi, \varphi)_H$ имеет компактный носитель. Тогда $u(t) = \operatorname{ch}(At)\varphi$. Справедливы формулы

$$\| u \|_W^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \lambda \operatorname{sh} 2\lambda T d (E(\lambda)\varphi, \varphi)_H,$$

$$\| \varphi \|_{H^{1/2}}^2 = \int_0^\infty \lambda d (E(\lambda)\varphi, \varphi)_H,$$

$$\| \partial_t u(T) \|_{H^{-1/2+a}}^2 = \int_0^\infty \lambda^{1+2a} (\operatorname{sh}\lambda T)^2 d (E(\lambda)\varphi, \varphi)_H.$$

Пусть Λ – спектр оператора A и $\mu \in \Lambda$. Обозначим через φ_k, $k \geqslant 1$, последовательность векторов таких, что функции $\lambda \to (E(\lambda)\varphi_k, \varphi_k)_H$ равны нулю вне интервала $[\mu - k^{-1}, \mu + k^{-1}]$ и подчинены условию

$$\int_0^\infty d (E(\lambda)\varphi_k, \varphi_k)_H = \nu,$$

где ν – фиксированное положительное число.

Если

$$\mu\nu \leqslant \delta^2/2, \quad \mu^{1+2a} (\operatorname{sh}\mu T)^2 \nu \leqslant \rho^2/2,$$

то $\operatorname{ch}(At)\varphi_k \in \mathcal{M}_{\rho, a}(0)$ для достаточно больших k. Поэтому

$$\omega(\delta, \rho, a) \geqslant c \sup_{\mu \in \Lambda} \min \left\{ \delta (\operatorname{sh} 2\mu T)^{1/2}, \rho \mu^{-a} \frac{(\operatorname{sh} 2\mu T)^{1/2}}{\operatorname{sh}\mu T} \right\} \geqslant$$

$$\geqslant c \sup_{a \geqslant a_0} \min \left\{ \delta (\operatorname{sh} 2a^\beta T)^{1/2}, \rho (a+1)^{-a\beta} \frac{(\operatorname{sh} 2(a+1)^\beta T)^{1/2}}{\operatorname{sh}(a+1)^\beta T} \right\}.$$

При малых δ последний supremum асимптотически равен $\sup_{x>0} \min \left\{ \delta \exp(x), \rho T^a x^{-a} \right\} \sim \rho T^a (\log \rho T^a \delta^{-1})^{-a}$. Отсюда следует оценка (1.13) и вместе с ней утверждение теоремы.

Установим разрешимость семейства $\left\{ R_k \right\}_{k \geqslant 0}$.

Теорема 4. *Для любого* $\eta \in H^{-1/2}$ *семейство* $\left\{ R_k \right\}_{k \geqslant 0}$ *является разрешимым.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $\left\{ R_k(\varphi, \psi; \eta) \right\}_{k \geqslant 0}$ сходится к вектору $u \in W$. Тогда $u(0) = \varphi$, $\partial_t u(0) = \psi$. Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что при построении итерационной процедуры можно начинать альтернирующий процесс с условий $\partial_t u^{(0)}(0) = \psi$, $u^{(0)}(T) = \zeta$, где ζ – произвольный элемент пространства $H^{1/2}$. При этом все сказанное выше с очевидными изменениями остается в силе.

1.3. „Гиперболическое" уравнение. Рассмотрим „задачу Дирихле"

$$(\partial_t^2 + A^2) u = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < T, \tag{1.14}$$

$$u(0) = \varphi, \quad u(T) = \psi, \tag{1.15}$$

где A – тот же оператор, что и в п. 1.1 и 1.2.

Положим

$$V=\Big\{u\in \mathbf{C}(0,T;H^1):\partial_t u\in\mathbf{C}(0,T;H),$$
$$(\partial_t^2+A^2)u=0 \quad \text{при} \quad 0<t<T\Big\}.$$

Норма в пространстве V определяется равенством

$$\|u\|_V=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\|u(t)\|_{H^1}^2+\|\partial_t u(t)\|_H^2\right)^{1/2}.$$

Пусть $\varphi,\psi\in H^1$. Решением задачи (1.14), (1.15) назовем функцию $u\in V$, для которой справедливы соотношения (1.15).

Ясно, что для единственности решения задачи (1.14), (1.15) необходимо, чтобы числа $k\pi/T$, $k=1,\ldots$, не были собственными для оператора A.

Из явного представления решения в виде

$$u(t)=\frac{\sin(A(T-t))}{\sin(AT)}\varphi+\frac{\sin(At)}{\sin(AT)}\psi$$

следует, что если расстояние от множества $\{k\pi/T:k=1,\ldots\}$ до спектра оператора A равно нулю, то задача (1.14), (1.15) не является корректной по Адамару.

Опишем итерационную процедуру решения задачи (1.14), (1.15). Начальное приближение u_0 является решением задачи

$$(\partial_t^2+A^2)u_0=0 \quad \text{при} \quad 0<t<T,$$
$$u_0(0)=\varphi,\quad \partial_t u_0(0)=\eta.$$

Если построено приближение u_{2k-1}, то функция u_{2k} находится из задачи Коши

$$\begin{cases}(\partial_t^2+A^2)u_{2k}=0 \quad \text{при} \quad 0<t<T,\\ u_{2k}(0)=\varphi,\quad \partial_t u_{2k}(0)=\partial_t u_{2k-1}(0).\end{cases}$$

Наконец, функция u_{2k+1} удовлетворяет задаче Коши с обращенным временем

$$\begin{cases}(\partial_t^2+A^2)u_{2k+1}=0 \quad \text{при} \quad 0<t<T,\\ u_{2k+1}(T)=\psi,\quad \partial_t u_{2k+1}(T)=\partial_t u_{2k}(T).\end{cases} \tag{1.16}$$

Тем самым определено зависящее от вектора $\eta\in H$ семейство ограниченных линейных операторов $N_k:H^1\times H^1\to V$, $k\geqslant 0$, действующих по правилу $(\varphi,\psi)\to$ $\to N_k(\varphi,\psi;\eta)=u_k$. Покажем, что построенное семейство регуляризирует задачу (1.14), (1.15).

Решая задачу (1.16) при $k=0,1,\ldots$, находим

$$u^{(2k+1)}(t) = \cos(A(t-T))\psi + \sin(A(t-T))A^{-1}\partial_t u^{(2k)}(T).$$

Аналогично

$$u^{(2k+2)}(t) = \cos(At)\varphi + \sin(At)A^{-1}\partial_t u^{(2k+1)}(0),$$

$$u^{(0)}(t) = \cos(At)\varphi + \sin(At)A^{-1}\eta.$$

Отсюда получаем

$$u^{(2k+2)}(t) = \sin(At)\sin(AT)\sum_{0\leqslant m\leqslant k}[\cos(AT)]^{2m}(\psi - \cos(AT)\varphi) +$$

$$+\cos(At)\varphi + \sin(At)A^{-1}(\cos AT)^{2k+2}\eta, \tag{1.17}$$

$$u^{(2k+1)}(t) = \sin(A(t-T))\sin(AT)\sum_{1\leqslant m\leqslant k}(\cos(AT))^{2m+1}\times$$

$$\times(\psi-\cos(AT)\varphi) + \cos(A(t-T))\psi - \sin(A(t-T))\sin(AT)\varphi +$$

$$+\sin(A(t-T))A^{-1}(\cos(AT))^{2k+1}\eta. \tag{1.18}$$

Оператор $\cos(AT)$ ограничен в H и его норма равна единице. Поэтому

$$\| N_k(\varphi, \psi;\ \eta)\|_V \leqslant ck(\|\varphi\|_{H^1} + \|\psi\|_{H^1}) + c\|\eta\|_H. \tag{1.19}$$

Регулярность построенного семейства вытекает из следующего утверждения.

Теорема 5. *Пусть числа $k\pi/T$, $k=1,2,\ldots$, не являются собственными для оператора A и пусть $u\in V$ решение задачи* (1.14), (1.15). *Тогда*

$$N_k(\varphi,\psi;\ \eta)\to u \quad при \quad k\to\infty \tag{1.20}$$

в пространстве V для любого вектора $\eta\in H$.

Доказательство. Из (1.17), (1.18) следует, что

$$N_{2k}(\varphi,\psi;\ \eta) - u = \sin(At)A^{-1}(\cos(AT))^{2k}(\eta - \partial_t u(0)), \tag{1.21}$$

$$N_{2k+1}(\varphi,\psi;\ \eta) - u = \sin(A(t-T))A^{-1}(\cos(AT))^{2k+1}(\eta-\partial_t u(0)). \tag{1.22}$$

Так как значения $k\pi/T$, $k=1,2,\ldots$, не являются собственными числами оператора A, то $(\cos(AT))^k\zeta\to 0$ при $k\to\infty$ для любого вектора $\zeta\in H$. Отсюда и из формул (1.21), (1.22) вытекает соотношение (1.20). Теорема доказана.

Получим оценки для функций $k(\delta)$, $\epsilon(\delta)$. Ограничимся случаем, когда оператор A положительно определен и его спектр дискретен. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ – собственные числа оператора A, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ – соответствующие ортонормированные собственные функции. Будем предполагать, что существуют положительные константы γ, σ такие, что

$$|\lambda_j T - k\pi| \geqslant \gamma \lambda_j^{-\sigma}, j, k = 1, 2, \ldots \tag{1.23}$$

Т е о р е м а 6. *Предположим, что выполнено неравенство* (1.23) *и пусть* $u \in V$. *Пусть еще* $\eta - \partial_t u(0) \in H^\alpha, \alpha > 0$, *и*

$$\| \varphi - u(0) \|_{H^1} + \| \psi - u(T) \|_{H^1} \leqslant \delta, \quad \| \eta - \partial_t u(0) \|_{H^\alpha} \leqslant \rho.$$

Тогда при $\delta \leqslant \rho/2$ *можно положить*

$$k(\delta) = [(\rho/\delta)^{2\sigma/(\alpha+2\sigma)}], \quad \epsilon(\delta) = c\rho^{2\sigma/(\alpha+2\sigma)} \delta^{\alpha/(\alpha+2\sigma)}, \tag{1.24}$$

где константа c зависит от T, γ, σ, но не зависит от ρ, δ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливо равенство

$$N_k(\varphi, \psi; \eta) - u = N_k(\varphi - u(0), \psi - u(T); 0) + N_k(0, 0; \eta - \partial_t u(0)). \tag{1.25}$$

Используя формулы (1.21), (1.22), получаем

$$\| N_k(0, 0; \xi) \|_V \leqslant \Big(\sum_{j \geqslant 1} (\cos\lambda_j T)^{2k} |(\xi, \varphi_j)|^2 \Big)^{1/2},$$

где $\xi = \eta - \partial_t u(0)$. В силу предположения (1.23) находим

$$|\cos\lambda_j T|^k \lambda_j^{-\alpha} \leqslant c(1 - \gamma\lambda_j^{-2\sigma})^k \lambda_j^{-\alpha} \leqslant ck^{-\alpha/2\sigma}.$$

Следовательно,

$$\| N_k(0, 0; \xi) \|_V \leqslant ck^{-\alpha/2\sigma} \| \xi \|_{H^\alpha}.$$

Применяя последнюю оценку и неравенство (1.19) для оценки (1.25), получаем

$$\| N_k(\varphi, \psi; \eta) - u \|_V \leqslant c(k\delta + \rho k^{-\alpha/2\sigma}).$$

Определяя $k(\delta)$ формулой (1.24), приходим к оценке $\| N_k(\varphi, \psi; \eta) - u \|_V \leqslant \epsilon(\delta)$. Теорема доказана.

Приведем в заключение пункта следующее утверждение, доказываемое точно так же, как теорема 4.

Т е о р е м а 7. *Для любого $\eta \in H$ семейство $\{N_k\}_{k \geqslant 0}$ является разрешимым.*

§ 2. Некоторые итерационные методы для параболических и эллиптических уравнений с операторным коэффициентом

2.1. „Параболическое" уравнение.[1] Рассмотрим краевую задачу

$$(\partial_t + A^2)u = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < T, \tag{2.1}$$

$$u(T) = \psi, \tag{2.2}$$

где $\psi \in H$.

Положим

$$S = \left\{ u \in L_2(0, T; H^1) : (\partial_t + A^2)u = 0, \ 0 < t < T \right\}.$$

Определим норму в пространстве S равенством

$$\| u \|_S = \left(\int_0^T (\| u \|_{H^1}^2 + \| \partial_t u \|_{H^{-1}}^2) dt \right)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Если $u \in S$, то $\partial_t u \in L_2(0, T; H^{-1})$, поэтому правая часть соотношения (2.3) корректно определена. Более того (см. § 2, гл. II в [9]), $u(0), u(T) \in H$.

Решением задачи (2.1), (2.2) назовем функцию $u \in S$, для которой выполнено условие (2.2). Задачу (2.1), (2.2) можно записать в операторной форме: $\mathcal{O}u = \psi$, где $\mathcal{O} : S \to H$ – оператор взятия следа $\mathcal{O}u = u(T)$.

Из явного представления решения $u(t) = \exp\left\{ A^2 (T - t) \right\} \psi$ следует, что так поставленная задача (2.1), (2.2) не является корректной.

Рассмотрим следующую итерационную процедуру решения задачи (2.1), (2.2). Пусть $\eta \in H$, γ – положительный параметр, удовлетворяющий неравенству $\gamma < 2\exp(\lambda_0^2 T)$, где λ_0 – точная нижняя граница спектра оператора A. Если λ_0 не является собственным числом, то можно положить также $\gamma = 2\exp(\lambda_0^2 T)$.

Начальное приближение u_0 является решением задачи

$$(\partial_t + A^2)u_0 = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < T, \quad u_0(0) = \eta.$$

Если построено приближение u_k, то функция u_{k+1} находится из задачи

$$\begin{cases} (\partial_t + A^2)u_{k+1} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < T, \\ u_{k+1}(0) = u_k(0) - \gamma(u_k(T) - \psi). \end{cases}$$

Тем самым определено зависящее от вектора η семейство линейных ограниченных операторов $L_k : H \to S$, действующих по правилу $\psi \to L_k(\psi, \eta) = u_k$.

Несложные вычисления приводят к соотношению

---

[1] После того как работа была закончена, Г. М. Вайникко любезно сообщил авторам, что этот итерационный процесс был ему известен, обсуждался в его лекциях в Тартуском университете, но не был опубликован.

$$L_{k+1}(\psi;\ \eta)(0) = (1-\gamma\exp(-A^2T))L_k(\psi;\ \eta)(0) + \gamma\psi,$$

откуда получаем, что

$$L_k(\psi;\ \eta)(0) = (1-\gamma\exp(-A^2T))^k\eta + \gamma\sum_{0\leqslant j\leqslant k-1}(1-\gamma\exp(-A^2T))^j\psi. \quad (2.4)$$

Норма оператора $1-\gamma\exp(-A^2T): H\to H$ равна единице, поэтому из (2.4) вытекает следующая оценка для функции $L_k(\psi;\ \eta)(t) = \exp(-A^2t)L_k(\psi;\ \eta)(0)$:

$$\| L_k(\psi;\ \eta)\|_S \leqslant c\,\|\eta\|_H + c\gamma k\,\|\psi\|_H. \quad (2.5)$$

Теорема 8. *Пусть задача* (2.1), (2.2) *имеет решение* $u\in S$. *Тогда для любого* $\eta\in H$

$$L_k(\psi;\ \eta)\to u \text{ *в пространстве* } S \text{ *при* } k\to\infty.$$

Доказательство. Используя (2.4), приходим к равенству

$$L_k(\psi;\ \eta) - u = L_k(0;\ \eta-u(0)) = \exp(-A^2t)(1-\gamma\exp(-A^2T))^k(\eta-u(0)),$$

из которого вытекает требуемое утверждение.

Теорема 9. *Пусть* $u\in S$, $\eta-u(0)\in H^a$, $a\in(0,1]$. *Пусть еще*

$$\|\psi-u(T)\|_H\leqslant\delta,\quad \|\eta-u(0)\|_{H^a}\leqslant\rho.$$

Тогда при $\delta\leqslant\rho T^{a/2}/2$ *можно положить*

$$k(\delta) = [\rho T^{a/2}\delta^{-1}(\log\rho T^{a/2}\delta^{-1})^{-a/2}],\quad \epsilon(\delta) = c\rho T^{a/2}(\log k(\delta))^{-a/2}. \quad (2.6)$$

Доказательство. Пусть $\xi\in H^a$. Используя (2.4), приходим к неравенству

$$\| L_k(0;\ \xi)\|_S\leqslant cT^{a/2}(\log k)^{-a/2}\,\|\xi\|_{H^a}. \quad (2.7)$$

Так как

$$L_k(\psi;\ \eta) - u = L_k(\psi-u(T);\ 0) + L_k(0;\ \eta-u(0)), \quad (2.8)$$

то, применяя для оценки функции (2.8) неравенства (2.5), (2.7), получаем

$$\| L_k(\psi;\ \eta)-u\|_S\leqslant c(k\delta + T^{a/2}(\log k)^{-a/2}\rho).$$

Определяя $k(\delta)$ формулой (2.6), приходим к оценке $\| L_k(\psi;\ \eta)-u\|_S\leqslant\epsilon(\delta)$. Теорема доказана.

Пусть

$$\mathcal{N}_{\rho,a}(\eta) = \left\{u\in S : \|u(0)-\eta\|_{H^a}\leqslant\rho\right\}.$$

В следующем утверждении при тех же предположениях о спектре оператора A, что и в теореме 3, показано, что построенный алгоритм имеет оптимальный порядок.

Теорема 10. *Пусть при некотором* $\beta > 0$ *любой интервал* $(a^{\beta}, (a+1)^{\beta})$, $a \geqslant a_0 > 0$, *имеет непустое пересечение со спектром оператора* A. *Тогда метод* $\mathcal{L} = \left\{L_{k(\delta)}\right\}$ *имеет оптимальный порядок на множестве* $\mathcal{N}_{\rho, a}(\eta)$, $a \in (0, 1]$.

Доказательство. В силу (0.4) достаточно доказать оценку (1.13). Рассмотрим функцию $u(t) = \exp(-A^2 t)\varphi$, $\varphi \in H$. Ясно, что $u \in S$. Будем предполагать, что функция $\lambda \to (E(\lambda)\varphi, \varphi)_H$ имеет компактный носитель. Непосредственно проверяются формулы

$$\| u \|_S^2 = \int_0^{\infty} (1 - \exp(-2\lambda^2 T)) d(E(\lambda)\varphi, \varphi)_H,$$

$$\| u(T) \|_H^2 = \int_0^{\infty} \exp(-2\lambda^2 T) d(E(\lambda)\varphi, \varphi)_H.$$

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 3, получаем оценку

$$\omega(\delta, \rho, a) = c \sup_{\mu \in \Lambda} (1 - \exp(-2\mu^2 T))^{1/2} \min\left\{\delta \cdot \exp(\mu^2 T), \rho\mu^{-a}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant c \sup_{a \geqslant a_0} \min\left\{\delta \exp(a^{2\beta} T), \rho(a+1)^{-a\beta}\right\}.$$

Отсюда приходим к требуемой оценке (ср. с доказательством теоремы 3).

Доказательство разрешимости семейства $\left\{L_k\right\}_{k \geqslant 0}$ проводится точно так же, как доказательство теоремы 4.

2.2. „Эллиптическое" уравнение. В этом пункте предлагается еще один алгоритм решения задачи (1.1), (1.2).

Пусть $\xi \in H^{1/2}$ и σ – положительное число, удовлетворяющее неравенству $\sigma < 2\operatorname{ch}(\lambda_0 T)$. Если λ_0 не является собственным числом оператора A, то можно положить также $\sigma = 2\operatorname{ch}(\lambda_0 T)$. Начальное приближение u_0 находится из задачи

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - A^2) u_0 = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < T, \\ \partial_t u_0(0) = \psi, \quad u_0(T) = \xi. \end{cases}$$

Если построено приближение u_k, то функция u_{k+1} удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - A^2) u_{k+1} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < T, \\ \partial_t u_{k+1}(0) = \psi, \; u_{k+1}(T) = u_k(T) - \sigma(u_k(0) - \varphi). \end{cases}$$

Тем самым определено зависящее от параметра $\xi \in H^{1/2}$ семейство линейных ограниченных операторов $G_k : H^{1/2} \times H^{-1/2} \to W$, действующих по правилу $(\varphi, \psi) \to G_k(\varphi, \psi; \xi) = u_k$.

После несложных вычислений находим

$$u_{k+1}(t)=\frac{\operatorname{ch}(At)}{\operatorname{ch}(AT)}(u_k(T)-\sigma u_k(0)+\sigma\varphi)+\frac{\operatorname{sh}(A(t-T))}{A\operatorname{ch}(AT)}\psi,$$

$$u_k(T)-\sigma u_k(0)=\left(1-\frac{\sigma}{\operatorname{ch}(AT)}\right)^{k+1}\xi+\sigma\sum_{1\leqslant j\leqslant k}\left(1-\frac{\sigma}{\operatorname{ch}(AT)}\right)^{j}\varphi+$$

$$+\sigma\sum_{0\leqslant j\leqslant k}\left(1-\frac{\sigma}{\operatorname{ch}(AT)}\right)^{j}\operatorname{th}(AT)A^{-1}\psi.$$

На семейство $\left\{G_k\right\}_{k\geqslant 0}$ можно перенести теоремы 1–4, если в их формулировках заменить $\left\{R_k(\cdot,\cdot;\eta)\right\}_{k\geqslant 0}$, $\eta\in H^{-1/2}$, семейством $\left\{G_k(\cdot,\cdot;\xi)\right\}_{k\geqslant 0}$, $\xi\in H^{1/2}$. При этом доказательства претерпевают лишь очевидные изменения.

§ 3. Альтернирующий метод решения задачи Коши для эллиптических систем

3.1. Формулировка основного результата. Пусть Ω – ограниченная область в R^n с гладкой границей Γ, которая разделена гладкой $(n-2)$-мерной поверхностью l на два непересекающихся открытых множества L_1 и L_2. Таким образом, $\Gamma=L_1\cup L_2\cup l$. Пусть еще в области Ω задан эллиптический дифференциальный оператор

$$u\to A(x,D_x)u=\sum_{|\alpha|,\,|\beta|\leqslant m}\sum D_x^\alpha(A_{\alpha,\beta}(x)D_x^\beta u),$$

где $D_x=i^{-1}\operatorname{qrad}$ и $A_{\alpha,\beta}$ – гладкие в $\bar\Omega$ $p\times p$-матрицы такие, что $A^*_{\beta,\alpha}=A_{\alpha,\beta}$. Положим

$$a(u,v)=\int_\Omega\sum_{|\alpha|,\,|\beta|\leqslant m}(A_{\alpha,\beta}(x)D_x^\beta u(x),D_x^\alpha v(x))\,dx,\tag{3.1}$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в C^p, и будем считать, что квадратичная форма $u\to a(u,u)$ неотрицательна на $[W_2^m(\Omega)]^p$.

В дальнейшем важную роль играют следующие два требования к оператору A.

(i) Для всех $u\in[W_2^m(\Omega)]^p$ таких, что на L_1

$$u=\partial u/\partial\nu=\ldots=\partial^{m-1}u/\partial\nu^{m-1}=0,\tag{3.2}$$

где ν – нормаль к Γ, справедливо неравенство Гординга

$$a(u,u)\geqslant c_0\|u\|^2_{[W_2^m(\Omega)]^p},\quad c_0=\mathrm{const}>0.$$

Такое же неравенство должно быть выполнено для вектор-функций $u\in[W_2^m(\Omega)]^p$, подчиненных условиям (3.2) на L_2.

(ii) Задача Коши

$$\begin{cases} A(x, D_x)u = 0 \quad \text{на} \quad \Omega, \\ \partial^j u/\partial\nu^j = 0 \quad \text{на} \quad L_s, j = 0, \ldots, 2m-1 \end{cases}$$

имеет лишь нулевое решение в классе $[W_2^m(\Omega)]^p$ при $s = 1, 2$.

Пусть $\left\{B_j\right\}_{j=0}^{2m-1}$ – набор граничных операторов

$$B_j(x', D_x) = \sum_{|\alpha| \leqslant j} B_{j,\alpha}(x')D_x^\alpha, x' \in \Gamma,$$

где $B_{j,\alpha}$ – гладкие $p \times p$-матрицы. Допустим, что $\left\{B_j\right\}_{j=0}^{2m-1}$ – система Дирихле, т. е. матрица $\sum_{|\alpha|=j} B_{j,\alpha}(x')\nu(x')^\alpha$ не вырождена.

Будем также считать, что для любых $u, v \in [C^\infty(\Omega)]^p$ справедлива формула Грина

$$a(u, v) = \int_\Omega (A(x, D_x)u(x), v(x))dx +$$

$$+ \sum_{0 \leqslant j \leqslant m-1} \int_\Gamma (B_{2m-j-1}(x', D_x)u(x), B_j(x', D_x)v(x))d\Gamma. \tag{3.3}$$

Далее речь пойдет о задаче Коши

$$\begin{cases} A(x, D_x)u = 0 \quad \text{на } \Omega, \\ B_j(x', D_x)u = \varphi_j \quad \text{на } L_1, j = 0, 1, \ldots, 2m-1, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $\varphi_j \in [W_2^{m-j-1/2}(L_1)]^p$ при $j \leqslant m-1$ и $\varphi_j \in ([W_2^{j-m+1/2}(L_1)]^p)^*$ при $m \leqslant j \leqslant 2m-1$. Решение задачи (3.4) ищется в пространстве $[W_2^m(\Omega)]^p$. В силу гипотезы (ii) задача (3.4) имеет не более одного решения.

Рассмотрим следующий итерационный метод решения задачи (3.4). Пусть $\eta_j \in ([W_2^{j-m+1/2}(L_2)]^p)^*$, $j = m, \ m+1, \ldots, 2m-1$. Начальное приближение $u^{(0)}$ находится как решение задачи

$$\begin{cases} A(x, D_x)u^{(0)} = 0 \text{ на } \Omega, \\ B_j(x', D_x)u^{(0)} = \varphi_j \text{ на } L_1, j = 0, \ldots, m-1, \\ B_j(x', D_x)u^{(0)} = \eta_j \text{ на } L_2, j = m, \ldots, 2m-1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Если построено приближение $u^{(2k)}$, то вектор-функция $u^{(2k+1)}$ должна удовлетворять задаче

$$\begin{cases} A(x, D_x)u^{(2k+1)} = 0 \text{ на } \Omega, \\ B_j(x', D_x)u^{(2k+1)} = \varphi_j \text{ на } L_1, j = m, ..., 2m-1, \\ B_j(x', D_x)u^{(2k+1)} = B_j(x', D_x)u^{(2k)} \text{ на } L_2, j = 0, ..., m-1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Наконец, функция $u^{(2k+2)}$ является решением задачи

$$\begin{cases} A(x, D_x)u^{(2k+2)} = 0 \text{ на } \Omega, \\ B_j(x', D_x)u^{(2k+2)} = \varphi_j \text{ на } L_1, j = 0, ..., m-1, \\ B_j(x', D_x)u^{(2k+2)} = B_j(x', D_x)u^{(2k+1)} \text{ на } L_2, j = m, ..., 2m-1. \end{cases} \tag{3.7}$$

Смешанные задачи (3.5)–(3.7) однозначно разрешимы в пространстве $[W_2^m(\Omega)]^p$ (см. § 9, гл. II, [9]).

Регуляризирующий характер введенного алгоритма вытекает из следующей теоремы

Теорема 11. *Пусть* $u \in [W_2^m(\Omega)]^p$ – *решение задачи* (3.4). *Тогда для любых функций* $\eta_j \in ([W_2^{j-m+1/2}(L_2)]^p)^*$, $j = m, ..., 2m-1$, *последовательность* $\left\{u^{(k)}\right\}_{k \geqslant 0}$ *сходится к функции и в пространстве* $[W_2^m(\Omega)]^p$.

Сформулированный результат будет получен как непосредственное следствие доказываемой ниже в п. 3.4 теоремы 12.

3.2. Уравнение в функционалах, имитирующее задачу Коши. Пусть в гильбертовом пространстве H задана полуторалинейная ограниченная симметричная форма $a(\cdot, \cdot)$ такая, что $a(u, u) \geqslant 0$ при $u \in H$. Предположим еще, что заданы гильбертовы пространства X_1, X_2 с нормами $\|\cdot\|_{X_1}$, $\|\cdot\|_{X_2}$ и линейные ограниченные сюръективные операторы $S_k: H \to X_k$, $k = 1, 2$. Будем предполагать выполненными следующие три условия.

I. Существует положительная константа c_0 такая, что для всех $u \in H_k = \mathrm{Ker} S_k$, $k = 1, 2$, справедлива оценка

$$a(u, u) \geqslant c_0 \|u\|_H^2.$$

II. Множество $Y_1 = S_1(H_2)$ плотно в X_1, множество $Y_2 = S_2(H_1)$ плотно в X_2.

III. Если $u \in H_1$ и $a(u, v) = 0$ для любого вектора $v \in H_2$, то $u = 0$. Если $u \in H_2$ и $a(u, v) = 0$ для любого вектора $v \in H_1$, то $u = 0$.

Обозначим через X'_k пространство антилинейных ограниченных функционалов на X_k, $k = 1, 2$ (т. е. $\eta \in X'_k$, если $\eta(\varphi_1 + \varphi_2) = \eta(\varphi_1) + \eta(\varphi_2)$, $\eta(z\varphi_1) = \bar{z}\eta(\varphi_1)$ и $|\eta(\varphi_1)| \leqslant c\|\varphi_1\|_{X_k}$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in X_k$, $z \in \mathbb{C}$).

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $\varphi \in X_1$, $\psi \in X'_1$. Требуется найти вектор $u \in H$ такой, что для всех $v \in H_2$ выполняются соотношения

$$a(u, v) = \psi(S_1 v), \ S_1 u = \varphi. \tag{3.8}$$

3.3. Определение операторов P_1, P_2 и их свойства. Вектор $u \in H$ назовем a-гармоническим, если для всех $v \in H_1 \cap H_2$ выполняется равенство $a(u,v)=0$. Решение задачи (3.8) является a-гармоническим вектором.

Положим

$$\|\varphi\|_{Y_1} = \min_{u \in H_2,\, S_1 u = \varphi} a(u,u)^{1/2}, \quad \|\psi\|_{Y_2} = \min_{u \in H_1,\, S_2 u = \psi} a(u,u)^{1/2}.$$

Обозначим через Y'_k пространство ограниченных антилинейных функционалов на Y_k, $k=1,2$. Так как пространство Y_k плотно вложено в X_k, $k=1,2$. то X'_k плотно вложено в Y'_k.

Пусть $\varphi \in Y_1$ и v_1, v_2 – элементы пространства H_2, удовлетворяющие уравнению $S_1 v = \varphi$. Тогда $v_1 - v_2 \in H_1 \cap H_2$ и, следовательно, $a(u, v_1 - v_2) = 0$ для всех a-гармонических векторов u. Таким образом, если $v \in H_2$ и $S_1 v = \varphi$, то на Y_1 определено отображение $\varphi \to a(u,v) = (P_1 u)(\varphi)$. Так как $|(P_1 u)(\varphi)| \leqslant (a(u,u))^{1/2} \|\varphi\|_{Y_1}$; то $P_1 u \in Y'_1$. Аналогично для любого a-гармонического вектора u вводится $P_2 u \in Y'_2$: если $\psi \in Y_2$, то полагаем $(P_2 u)(\psi) = a(u,v)$, где $v \in H_1$ и $S_2 v = \psi$.

П р е д л о ж е н и е. *Пусть u – a-гармонический вектор. Тогда*

а) *если $P_1 u \in X'_1$, то $P_2 u \in X'_2$;*

б) *если $P_2 u \in X'_2$, то $P_1 u \in X'_1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно ограничиться обоснованием свойства а).

Пусть $\psi \in X_2$ и v_1, v_2 элементы пространства H, удовлетворяющие уравнению $S_2 v = \psi$. Тогда $v_1 - v_2 \in H_2$ и, следовательно, $a(u, v_1 - v_2) = (P_1 u)(S_1(v_1 - v_2))$ для всех a-гармонических векторов u. Поэтому, полагая $v \in H$ и $S_2 v = \psi$, можно определить на X_2 отображение $\psi \to a(u,v) - (P_1 u)(S_1 v) = F(\psi)$. Пусть теперь $\zeta \in Y_2$. Тогда существует вектор $v \in H_1$ такой, что $S_2 v = \zeta$. Из определения функционала $P_2 u$ вытекает, что $(P_2 u)(\zeta) = a(u,v) = F(\zeta)$. Следовательно, $F = P_2 u$ на Y_2, и поскольку пространство Y_2 плотно в X_2, то $P_2 u = F \in X'_2$. Предложение доказано.

С л е д с т в и е 1. *Пусть u – a-гармонический вектор, причем $P_1 u \in X'_1$, $P_2 u \in X'_2$ (в силу предложения достаточно потребовать выполнения лишь одного из включений). Тогда справедлива формула*

$$a(u,v) = (P_1 u)(S_1 v) + (P_2 u)(S_2 v), \; v \in H. \tag{3.9}$$

Из (3.9) и предположения I следует, что если $P_1 u = 0$ и $S_2 u = 0$ или $P_2 u = 0$ и $S_1 u = 0$, то $u = 0$.

3.4. Описание алгоритма приближенного решения задачи (3.8). Пусть η – произвольный вектор из пространства X'_2. Начальное приближение u_0 ищется как минимум функционала $a(u,u) - 2\,\mathrm{Re}\,\eta(S_2 u)$ на множестве $\{u \in H : S_1 u = \varphi\}$. (В силу предположения I минимум достигается на единственном элементе).

Если построено приближение u_{2k}, то вектор u_{2k+1} доставляет минимум функционалу $a(u,u) - 2\,\mathrm{Re}\,\psi(S_1 u)$ на множестве $\{u \in H : S_2 u = S_2 u_{2k}\}$. Приближение u_{2k+2} является решением задачи на минимум функционала $a(u,u) - 2\,\mathrm{Re}\,(P_2 u_{2k+1})(S_2 u)$ на множестве $\{u \in H : S_1 u = \varphi\}$. Этот функционал корректно определен, поскольку из включения $P_1 u_{2k+1} = \psi \in X'_1$ следует включение $P_2 u_{2k+1} \in X'_2$ (см. предложение). Из условия I вытекает существование единственного экстремального элемента u_{2k+2}.

Тем самым построено семейство ограниченных линейных операторов $R_k : X_1 \times X'_1 \to H$, действующих по правилу $(\varphi, \psi) \to R_k(\varphi, \psi, \eta) = u_k$.

Это семейство зависит от параметра $\eta \in X_2'$. Векторы u_k, $k \geqslant 0$ являются a-гармоническими, и в силу предложения $P_j u_k \in X_j'$, $j = 1, 2$, $k \geqslant 0$.

Регуляризирующее свойство построенного семейства операторов вытекает из следующей теоремы.

Теорема 12. *Пусть задача* (3.8) *имеет решение* $u \in H$. *Тогда для любого* $\eta \in X_2'$ *последовательность* $\{u_k\}_{k \geqslant 0}$ *сходится к вектору* u *в пространстве* H.

Доказательство. Положим $r_k(\xi) = R_k(0, 0; \xi)$. Тогда $R_k(\varphi, \psi; \eta) - u = r_k(\eta - P_2 u)$. Таким образом, достаточно доказать, что для любого вектора $\xi \in X_2'$ последовательность $\{r_k(\xi)\}_{k \geqslant 0}$ сходится к нулю в пространстве H.

Введем вспомогательные операторы $D: X_2 \to H$, $N: Y_2' \to H$. На векторе $D(\varphi)$, $\varphi \in X_2$ достигается минимум функционала $a(u, u)$ при $u \in H$, $S_2 u = \varphi$. На векторе $N(\zeta)$ достигается минимум функционала $H_1 \ni u \to a(u, u) - 2 \operatorname{Re} \zeta(S_2 u)$. Операторы D и N являются линейными ограниченными и принимают значения в множестве a-гармонических векторов. Более того, $P_1 D = 0$, $S_1 N = 0$. Положим $\mathcal{A} = P_2 D S_2 N$. Так как операторы $S_2 N: Y_2' \to Y_2$ и $P_2 D: X_2 \to X_2'$ ограничены, то $\mathcal{A}: Y_2' \to X_2'$ – ограниченный оператор. Непосредственно проверяется, что $r_{2k}(\xi) = N\mathcal{A}^k(\xi)$, $r_{2k+1}(\xi) = DS_2 N\mathcal{A}^k(\xi)$. Таким образом, остается показать, что для всех $\xi \in Y_2'$ последовательность $\{\mathcal{A}^k(\xi)\}_{k \geqslant 0}$ сходится к нулю в пространстве Y_2'.

Рассмотрим $\mathcal{A}$ как оператор в Y_2'.

Введем полуторалинейную форму

$$(\xi, \zeta)_{Y_2'} = a(N\xi, N\zeta), \quad \xi, \zeta \in Y_2'. \tag{3.10}$$

В силу предположения I равенство (3.10) определяет скалярное произведение в Y_2'.

Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ неотрицателен в Y_2'. Используя (3.9), получаем соотношения

$$(\mathcal{A}\xi, \xi)_{Y_2'} = a(NP_2DS_2N\xi, N\xi) = (P_2DS_2N\xi)(S_2N\xi) =$$

$$= a(DS_2N\xi, DS_2N\xi) \geqslant 0.$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{A}\xi, \mathcal{A}\xi)_{Y_2'} = a(N\mathcal{A}\xi, N\mathcal{A}\xi) = a(DS_2N\xi, N\mathcal{A}\xi),$$

$$a(DS_2N\xi, DS_2N\xi) = a(DS_2N\xi, N\xi).$$

Отсюда следуют неравенства

$$\|\mathcal{A}\xi\|^2_{Y_2'} \leqslant (a(DS_2N\xi, DS_2N\xi))^{1/2} \|\mathcal{A}\xi\|^{1/2}_{Y_2'},$$

$$a(DS_2N\xi, DS_2N\xi) \leqslant \|\xi\|^2_{Y_2'}.$$

Поэтому $\|\mathcal{A}\xi\|_{Y_2'} \leqslant \|\xi\|_{Y_2'}$.

Покажем, что единица не является собственным числом оператора $\mathcal{A}$. Действительно, пусть $\mathcal{A}\xi=\xi$. Рассмотрим функцию $u=N\xi-DS_2N\xi$. Тогда $S_2u=0$ и $P_2u=\xi-\mathcal{A}\xi=0$. Из условия II (см. также следствие) вытекает, что $u=0$. Отсюда следует, что $P_1N\xi=0$. Кроме того, $S_1N\xi=0$. Снова используя условие II, находим, что $N\xi=0$, откуда получаем, что $\xi=0$.

Итак, $\mathcal{A}$ – неотрицательный, нерастягивающий оператор и единица не является собственным числом. Следовательно, для любого $\xi\in Y_2'$ последовательность $\left\{\mathcal{A}^k\xi\right\}_{k\geqslant 0}$ сходится к нулю (см. с. 71 в [10]). Теорема доказана.

Отметим в заключение пункта, что построенный итерационный метод приближенного решения задачи (3.8) является разрешимым. Действительно, если последовательность $\left\{u_k\right\}_{k\geqslant 0}$ сходится к вектору $u\in H$ в пространстве H, то $S_1u=\varphi$ и $a(u,v)=\psi(S_1v)$ для всех $v\in H$, подчиненных условию $S_2v=0$.

3.5. Приложение общей схемы к задаче Коши из п. 3.1. Сформулированная в п. 3.2 задача содержит задачу Коши из п. 3.1. Для того чтобы в этом убедиться, следует определить форму a равенством (3.1) и положить

$$X_j=\prod_{0\leqslant k\leqslant m-1}[W_2^{m-k-1/2}(L_j)]^p,$$

$$S_ju=\left\{B_0(x',D_x)u|_{L_j},\ldots,B_{m-1}(x',D_x)u|_{L_j}\right\}.$$

Тогда

$$X_j'=\prod_{m\leqslant k\leqslant 2m-1}([W_2^{k-m+1/2}(L_j)]^p)',$$

требование I вытекает из условия (i), свойство III следует из (ii) и, наконец, гипотеза II – хорошо известное свойство пространств следов (см. § 11, гл. 1, [9]).

Если определить операторы P_1 и P_2 равенством

$$P_ju=\left\{B_m(x',D_x)u|_{L_j},\ldots,B_{2m-1}(x',D_x)u|_{L_j}\right\},$$

то равенство (3.9) совпадет с формулой Грина (3.3), где $A(x,D_x)u=0$ на Ω.

Теперь ясно, что теорема 11 является частным случаем теоремы 12.

Указанным приложением не исчерпываются возможности общей схемы, рассмотренной в п. 3.2–3.4. Например, вместо задачи Коши из п. 3.1 точно так же можно рассмотреть ситуацию, когда $\overline{L}_1\cup\overline{L}_2\neq\Gamma$ и на множестве $\Gamma\setminus(\overline{L}_1\cup\overline{L}_2)$ заданы условия некоторой эллиптической краевой задачи. С тем же успехом можно допустить вырождение оператора $A(x,D_x)$ на Γ и др.

§ 4. Альтернирующий метод решения некорректной краевой задачи для волнового уравнения

4.1. Постановка задачи. Формулировка основного результата. Пусть Ω – ограниченная область в R^n с границей Γ, T – положительное число. Предположим, что задана последовательность точек $t_0, t_1, \ldots, t_d$ такая, что $0 = t_0 < t_1 < \ldots < < t_d = T$ и последовательностей областей $G_j \subset \Omega$, $j = 0, 1, \ldots, d$. Пусть еще $\Omega \setminus \overline{G}_j \neq \neq \phi$ и границы ∂G_j и $\partial(\Omega \setminus \overline{G}_j)$ принадлежат классу $C^{0,1}$ (см. [11], гл. 1).

В этом параграфе рассматривается „многоточечная" краевая задача

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) u = 0 \quad \text{на} \quad (0, T) \times \Omega, \\ u = \varphi_j, \ \partial_t u = \psi_j \quad \text{на} \quad \Omega \setminus \overline{G}_j \quad \text{при} \quad t = t_j, \ j = 0, 1, \ldots, d, \\ u = 0 \quad \text{на} \quad (0, T) \times \Gamma. \end{cases} \tag{4.1}$$

Будем считать, что $\varphi_j \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $\varphi_j \in L_2(\Omega)$, $j = 0, 1, \ldots, d$.

Если $a < b$, то положим

$$\Lambda(a, b) = \mathbf{C}^1(a, b; L_2(\Omega)) \cap \mathbf{C}(a, b; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)).$$

Норма в пространстве $\Lambda(a, b)$ определяется равенством

$$\|u\|_{\Lambda(a,b)} = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left(\int_\Omega (|\partial_t u(t, \cdot)|^2 + |\nabla u(t, \cdot)|^2)\, dx\right)^{1/2}.$$

Будем предполагать, что для задачи (4.1) выполнено следующее условие единственности.

I. Если $u \in \Lambda(0, T)$ является решением задачи (4.1) с нулевыми данными, т. е. $\varphi_0 = \ldots = \varphi_d = 0$, $\psi_0 = \ldots = \psi_d = 0$, то $u = 0$.

Нетрудно проверить, что при $n = 1$ условие I выполнено в том и только в том случае, если любая характеристическая ломаная с началом при $t = 0$ и концом при $t = T$ пересекает одно из множеств $\Omega \setminus G_j$, $j = 0, 1, \ldots, d$.

Введем пространство $P(0, T)$ функций на $(0, T) \times \Omega$, сужения которых на множество $(t_j, t_{j+1}) \times \Omega$ принадлежат $\Lambda(t_j, t_{j+1})$, $j = 0, 1, \ldots, d-1$. Для $u \in P(0, T)$ обозначим через u_j сужение u на множество $(t_j, t_{j+1}) \times \Omega$, $j = 0, 1, \ldots, d-1$. Тогда норма в пространстве $P(0, T)$ определяется равенством

$$\|u\|_{P(0,T)} = \max_{0 \leqslant j \leqslant d-1} \|u_j\|_{\Lambda(t_j, t_{j+1})}.$$

Опишем итерационный процесс отыскания приближенного решения задачи (4.1).

Будем искать приближение $u^{(k)}$, $k \geqslant 0$ в пространстве $P(0, T)$. Тогда функция $u_j^{(k)}$, т. е. сужение $u^{(k)}$ на $(t_j, t_{j+1}) \times \Omega$, принадлежит пространству $\Lambda(t_j, t_{j+1})$. Процедура построения последовательности $u_j^{(k)}$ содержится в следующих четырех пунктах.

(i) Функции $u_j^{(k)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)\, u_j^{(k)} = 0 \ \text{ на } \ (t_j, t_{j+1}) \times \Omega, \\ u_j^{(k)} = 0 \ \text{ на } \ (t_j, t_{j+1}) \times \Gamma. \end{cases} \tag{4.2}$$

(ii) Для функции $u_0^{(0)}$ ставятся следующие данные Коши

$$u_0^{(0)} = \varphi_0, \ \partial_t u_0^{(0)} = \psi_0 \ \text{ на } \Omega \text{ при } t = 0.$$

(iii) Если k – четное число, то данные Коши для задачи (4.1) при $t = t_j$ имеют вид

$$u_j^{(k)} = \varphi_j + \delta_j^{(k)} \ \text{ на } \ \Omega, \ \partial_t u_j^{(k)} = \begin{cases} \psi_j \ \text{ на } \ \Omega \setminus G_j, \\ \partial_t u_{j-1}^{(k)} \ \text{ на } \ G_j, \end{cases}$$

где $\delta_j^{(k)}$ – функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, равная нулю на $\Omega \setminus G_j$ и удовлетворяющая уравнению

$$\Delta\, \delta_j^{(k)} = \Delta\, (u_{j-1}^{(k)} - \varphi_j) \ \text{ на } \ G_j. \tag{4.3}$$

При $j = 0$ функцию $u_{j-1}^{(k)}$ следует заменить на $u_0^{(k-1)}$.

(iv) Если k – нечетное число, то для задачи (4.2) при $t = t_{j+1}$ ставятся следующие данные Коши

$$u_j^{(k)} = \varphi_{j+1} + \delta_{j+1}^{(k)} \ \text{ на } \ \Omega, \ \ \partial_t u_j^{(k)} = \begin{cases} \psi_{j+1} \ \text{ на } \ \Omega \setminus G_{j+1}, \\ \partial_t u_{j+1}^{(k)} \ \text{ на } \ G_{j+1}, \end{cases}$$

где $\delta_{j+1}^{(k)}$ – функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, равная нулю на $\Omega \setminus G_{j+1}$ и удовлетворяющая уравнению

$$\Delta\, \delta_{j+1}^{(k)} = \Delta\, (u_{j+1}^{(k)} - \varphi_{j+1}) \ \text{ на } \ G_{j+1}.$$

При $j = d - 1$ функцию $u_{j+1}^{(k)}$ следует заменить на $u_{d-1}^{(k-1)}$.

Следующее утверждение содержит основной результат настоящего параграфа.

Теорема 13. *Пусть* $u \in \Lambda(0, T)$ – *решение задачи* (4.1). *Тогда последовательность* $\left\{u^{(k)}\right\}_{k \geqslant 0}$ *сходится к функции* u *в пространстве* $P(0, T)$.

4.2. Доказательство теоремы 13. Достаточно показать, что для любых данных $\varphi_1 = \ldots = \varphi_d = 0$, $\psi_1 = \ldots = \psi_d = 0$, $\varphi_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\psi_0 \in L_2(\Omega)$, подчиненных условию $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ на $\Omega \setminus G_0$, последовательность $u^{(k)} = u^{(k)}(\varphi_0, \psi_0)$, $k = 0, 1, \ldots$, сходится к нулю в пространстве $P(0, T)$.

Положим

$$\mathcal{E}(v, w)(t) = \int_{\Omega} (\partial_t v(t, \cdot) \overline{\partial_t w(t, \cdot)} + \nabla v(t, \cdot) \overline{\nabla w(t, \cdot)})\, dx.$$

Так как функция $u_j^{(k)}$ удовлетворяет волновому уравнению, то функция $\mathcal{E}(u_j^{(k)}, u_j^{(k)})(t)$ принимает на отрезке (t_j, t_{j+1}) постоянное значение, обозначаемое далее через $e_j^{(k)}$. Установим оценки

$$e_{j+1}^{(2k)} \leqslant e_j^{(2k)}, \; j = 0, \dots, d-2, \tag{4.4}$$

$$e_j^{(2k+1)} \leqslant e_{j+1}^{(2k+1)}, \quad j = 0, \dots, d-2, \tag{4.5}$$

$$e_{d-1}^{(2k+1)} \leqslant e_{d-1}^{(2k)}, \quad e_0^{(2k+2)} \leqslant e_0^{(2k+1)}, \tag{4.6}$$

$k = 0, 1. \dots$ Докажем неравенство (4.4), остальные оценки доказываются аналогично.

В силу (4.3)

$$\int_{G_{j+1}} \nabla u_{j+1}^{(2k)} \overline{\nabla u_{j+1}^{(2k)}}\, dx = \int_{G_{j+1}} \nabla u_{j+1}^{(2k)} \overline{\nabla u_j^{(2k)}}\, dx \quad \text{при } t = t_{j+1},$$

поэтому

$$\int_{G_{j+1}} |\nabla u_{j+1}^{(2k)}|^2\, dx \leqslant \int_{G_{j+1}} |\nabla u_j^{(2k)}|^2\, dx, \; j = 0, 1, \dots, d-2.$$

Отсюда следует оценка (4.4).

Функция $\mathcal{E}(u^{(k)}, u^{(k+1)})(t)$, $t \in (0, T)$ равна константе на каждом из отрезков (t_j, t_{j+1}), $j = 0, 1, \dots, d-1$. Покажем, что она не имеет скачков в точках $t_1, \dots, t_{d-1}$. Рассмотрим случай четного k. Пусть $0 \leqslant j \leqslant d-2$. Тогда при $t = t_{j+1}$ справедливы равенства

$$\int_{G_{j+1}} \nabla u_j^{(k)} \overline{\nabla u_j^{(k+1)}}\, dx = -\int_{G_{j+1}} \Delta u_{j+1}^{(k)} \overline{u_j^{(k+1)}}\, dx =$$

$$= -\int_{G_{j+1}} u_{j+1}^{(k)} \overline{\Delta u_j^{(k+1)}}\, dx = \int_{G_{j+1}} \nabla u_{j+1}^{(k)} \overline{\nabla u_{j+1}^{(k+1)}}\, dx.$$

Отсюда вытекает соотношение

$$\mathcal{E}(u_j^{(k)}, u_j^{(k+1)})(t_{j+1}) = \mathcal{E}(u_{j+1}^{(k)}, u_{j+1}^{(k+1)})(t_{j+1}), \; j = 0, \dots, d-2. \tag{4.7}$$

Аналогично доказываются равенства

$$\mathcal{E}\,(u_{d-1}^{(k)},\, u_{d-1}^{(k+1)})\,(t_d) = \mathcal{E}\,(u_{d-1}^{(k+1)},\, u_{d-1}^{(k+1)})\,(t_d), \tag{4.8}$$

$$\mathcal{E}\,(u_0^{(k)},\, u_0^{(k+1)})\,(0) = \mathcal{E}\,(u_0^{(k)},\, u_0^{(k+2)})\,(0). \tag{4.9}$$

Введем пространство $\mathcal{H} = \Big\{ (\xi, \eta) : \xi \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), \quad \eta \in L_2(\Omega), \quad \xi = \eta = 0$ п. в. на $\Omega \setminus G_0 \Big\}$ со скалярным произведением

$$[(\xi_1, \eta_1),\ (\xi_2, \eta_2)] = \int_{G_0} (\nabla \xi_1\, \nabla \bar{\xi}_2 + \eta_1 \bar{\eta}_2)\, dx.$$

Соответствующую норму будем обозначать через $|||(\xi,\ \eta)|||$. Рассмотрим оператор $S: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, определенный равенством

$$S\,(\xi, \eta) = (u^{(2)}\,(\xi, \eta)\,(0),\ \partial_t u^{(2)}\,(\xi, \eta)\,(0)),$$

где $u^{(2)}\,(\xi,\ \eta)$ – функция, построенная с помощью описанной выше процедуры при $\varphi_0 = \xi$, $\psi_0 = \eta$, $\varphi_j = \psi_j = 0$, $j = 1, \dots, d$.

В силу соотношений (4.7) – (4.9) получаем

$$\mathcal{E}\,(u^{(2)}, u^{(0)})\,(0) \geqslant \mathcal{E}\,(u^{(2)}, u^{(2)})\,(0),$$

откуда вытекает, что оператор S неотрицателен. Из оценок (4.4) – (4.6) следует, что

$$\mathcal{E}\,(u^{(2)}, u^{(2)})\,(0) \leqslant \mathcal{E}\,(u^{(0)}, u^{(0)})\,(0),$$

т. е. оператор S – нерастягивающий.

Покажем, что единица не является собственным числом оператора S. Действительно, если $S\,(\xi, \eta) = (\xi, \eta)$, то $e_0^{(0)} = \dots = e_{d-1}^{(0)} = e_{d-1}^{(1)} = \dots = e_0^{(1)}$. Следовательно, при $t = t_{j+1}$

$$\int_{G_{j+1}} |\nabla u_{j+1}^{(0)}|^2\, dx = \int_{G_{j+1}} |\nabla u_j^{(0)}|^2\, dx, \ j = 0, \dots, d-2, \tag{4.10}$$

и $u_j^{(0)} = \partial_t u_j^{(0)} = 0$ на $\Omega \setminus G_{j+1}$. Кроме того,

$$\int_{G_{j+1}} \nabla u_{j+1}^{(0)}\, \overline{\nabla u_{j+1}^{(0)}}\, dx = \int_{G_{j+1}} \nabla u_{j+1}^{(0)}\, \overline{\nabla u_j^{(0)}}\, dx \quad \text{при } t = t_{j+1}.$$

Из последнего равенства и из (4.10) вытекает, что $u_{j+1}^{(0)} = u_j^{(0)}$ на G_{j+1} при $t = t_{j+1}$. Следовательно, функция $u^{(0)}$ принадлежит классу $\Lambda\,(0, T)$ и обращается в нуль на множествах G_j при $t = t_j$, $j = 0, 1, \dots, d-1$. Аналогично получаем, что $u_{d-1}^{(0)} = u_{d-1}^{(1)}$ на Ω при $t = t_d$. Поэтому функция $u^{(0)}$ обращается в нуль и на множестве G_d при $t = t_d$. В силу условия I отсюда следует, что $u^{(0)} = 0$ на $(0, T) \times \Omega$. Отсюда вытекает, что $S\,(\xi, \eta) = 0$. Таким образом, единица не является собственным числом оператора S. Применяя теорему 4.2

с. 71 работы [10], получаем, что для любых ξ, η последовательность $\{S^k(\xi, \eta)\}_{k\geqslant 0}$ стремится к нулю в пространстве $\mathscr{H}$.

Справедливы следующие оценки для норм функций $u^{(k)}$ в пространстве $P(0, T)$:

$$\| u^{(2k)} \|_{P(0,T)} \leqslant \mathcal{E}(u_0^{(2k)}, u_0^{(2k)})(0),$$

$$\| u^{(2k+1)} \|_{P(0,T)} \leqslant \mathcal{E}(u_{d-1}^{(2k+1)}, u_{d-1}^{(2k+1)})(t_d) \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{E}(u_0^{(2k)}, u_0^{(2k)})(0).$$

Так как $\mathcal{E}(u_0^{(2k)}, u_0^{(2k)})(0) = |||S^k(\varphi_0, \psi_0)|||^2$, то последовательность $\{u^{(k)}\}_{k\geqslant 0}$ сходится к нулю в пространстве $P(0, T)$. Теорема доказана.

§ 5. Лемма о нерастягивающем операторе и ее приложения к решению операторных уравнений „первого рода"

5.1. Лемма о нерастягивающем операторе. Пусть H – гильбертово пространство с нормой $\| \cdot \|_H$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_H$. Обозначим через I единичный оператор в H.

Лемма 1. *Пусть T – линейный ограниченный оператор в H такой, что для всех $v \in H$*

$$\| v - Tv \|_H^2 \leqslant c(\| v \|_H^2 - \| Tv \|_H^2). \tag{5.1}$$

Тогда для любого элемента $w \in H$ последовательность $\{T^n w\}_{n\geqslant 0}$ сходится, причем ее предел равен ортогональной проекции элемента w на подпространство $\operatorname{Ker}(T - I)$.

Прежде чем доказывать лемму, отметим, что неравенство (5.1) эквивалентно оценке

$$\operatorname{Re}(Sv, v)_H \geqslant \frac{c+1}{2c} \| Sv \|_H^2,$$

где $S = I - T$.

Доказательство леммы 1. Из (5.1) вытекает, что оператор T – нерастягивающий. Обозначим через H_0 множество векторов $w \in H$ таких, что последовательность $\{T^n w\}_{n\geqslant 0}$ сходится к нулю. Тогда H_0 – линейное замкнутое множество. Покажем, что оно содержит векторы вида $w = (I - T) w_0$, $w_0 \in H$.

Действительно, в силу (5.1) находим, что

$$\| T^n w \|_H^2 = \| T^n w_0 - T^{n+1} w_0 \|_H^2 \leqslant c(\| T^n w_0 \|_H^2 - \| T^{n+1} w_0 \|_H^2).$$

Числовая последовательность $\{\| T^n w_0 \|_H^2\}_{n\geqslant 0}$ не возрастает, поэтому последовательность $\{\| T^n w_0 \|_H^2 - \| T^{n+1} w_0 \|_H^2\}_{n\geqslant 0}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, $T^n w \to 0$ при $n \to \infty$, что равносильно включению $w \in H_0$. Отсюда следует, что $\operatorname{Im}(I - T) \subset H_0$.

Так как T – нерастягивающий оператор, то справедливо разложение $H = \overline{\mathrm{Im}\,(I-T)} \oplus \mathrm{Ker}\,(I-T)$. Пусть w – произвольный вектор из H. Представим его в виде $w = w_1 + w_0$, где $w_1 \in \overline{\mathrm{Im}\,(I-T)}$, $w_0 \in \mathrm{Ker}\,(I-T)$. Тогда последовательность $\{T^n w_1\}_{n \geqslant 0}$ сходится к нулю, а $T^n w_0 = w_0$ для всех n. Отсюда получаем требуемое утверждение.

С л е д с т в и е 2. *Если* $\mathrm{Ker}\,(I-T) = 0$, *то для любого* $w \in H$ *последовательность* $\{T^n w\}_{n \geqslant 0}$ *сходится к нулю.*

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{A} x = f, \qquad (5.2)$$

где $\mathcal{A}$ – ограниченный оператор в H с тривиальным ядром. Пусть $\mathcal{B}$ – ограниченный оператор, имеющий ограниченный обратный. Предположим, что существует положительная константа c такая, что для всех $x \in H$ выполняется неравенство

$$\mathrm{Re}\,(\mathcal{A}x, \mathcal{B}x)_H \geqslant c\,\|\mathcal{A}x\|^2.$$

Пусть β – положительное вещественное число. Изучим следующий итерационный процесс для построения приближенного решения задачи (5.2)

$$\mathcal{B} x_{n+1} = (\mathcal{B} - \beta\mathcal{A})\, x_n + \beta f,$$

$n = 0, 1, \ldots$ Элемент x_0 выбирается произвольно.

Т е о р е м а 14. *Пусть* $\beta < 2c$ *и* $f = \mathcal{A}u$, $u \in H$. *Тогда для любого* $x_0 \in H$ *последовательность* $\{x_n\}_{n \geqslant 0}$ *сходится к* u.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u_n = x_n - u$. Тогда $u_n = (1 - \beta\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A})^n u_0$. Обозначим через $H_{\mathcal{B}}$ пространство H, снабженное нормой $\|x\|_{\mathcal{B}} = \|\mathcal{B}x\|_H$ и скалярным произведением $(x, y)_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}x, \mathcal{B}y)_H$. Положим $S = \beta\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$. Тогда

$$\mathrm{Re}\,(Sx, x)_{\mathcal{B}} \geqslant \frac{c}{\beta}\,\|Sx\|^2_{\mathcal{B}}.$$

Применяя следствие 2, получаем сходимость последовательности $\{u_n\}_{n \geqslant 0}$ к нулю. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. В [12] показано, что итерационный процесс

$$\mathcal{A} x_{n+1} + C\dot{x}_{n+1} = Cx_n + f$$

сходится к решению уравнения (5.2) с вполне непрерывным положительным оператором $\mathcal{A}$, если C – ограниченный положительно определенный оператор. Для таких C этот факт вытекает непосредственно из теоремы при единственном требовании положительности оператора $\mathrm{Re}\,\mathcal{A}$.

Для того чтобы в этом убедиться, положим $\mathcal{B} = \mathcal{A} + C$, $\beta = 1$ и введем в H скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_C = (C^{-1}\cdot, \cdot)_H$. Тогда

$$\mathrm{Re}\,(\mathcal{A}x, (\mathcal{A} + C)\,x)_C \geqslant \|\mathcal{A}x\|^2_C.$$

Отсюда в силу теоремы 14 следует требуемое утверждение.

З а м е ч а н и е 3. Сходимость итерационной процедуры

$$x_{n+1} = x_n + \lambda [f - \mathcal{A} x_n], \ \lambda > 0,$$

доказанная в [13] для положительного вполне непрерывного оператора $\mathcal{A}$, вытекает из теоремы 14 при условиях: $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$ и справедливо неравенство

$$\lambda < 2 \inf \frac{\operatorname{Re}(\mathcal{A}u, u)_H}{\|\mathcal{A}u\|_H^2}.$$

В [13] соответствующее условие имеет вид $\lambda < 2\lambda_1$, где λ_1 — наименьшее характеристическое число оператора $\mathcal{A}$.

Список литературы

[1] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, *1986.*

[2] *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, *1980.*

[3] *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, *1978.*

[4] *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, *1987.*

[5] *Латтес Р., Лионс Ж. Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, *1970.*

[6] *Мазья В. Г.* О теоремах единственности и итерационных алгоритмах решения для некорректных задач математической физики // Успехи мат. наук. *1988.* Т. 43.

[7] *Доманский Б. Н.* Об эквивалентности сходимости регуляризирующего алгоритма существованию решения некорректной задачи // Успехи мат. наук. *1987.* Т. 42, вып. 5. С. 101–118.

[8] *Маслов В. П.* Существование решения некорректной задачи эквивалентно сходимости регуляризационного процесса // Успехи мат. наук. *1968.* Т. 23, вып. 3. С. 183–184.

[9] *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, *1971.*

[10] *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, *1969.*

[11] *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, *1985.*

[12] *Крянев А. В.* Итерационный метод решения некорректных задач // ЖМВ и МФ. *1974.* Т. 14, № 1. С. 25–35.

[13] *Фридман В. М.* Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма первого рода // Успехи мат. наук. *1956.* Т. 11, № 1. С. 233–234.

Ленинградский филиал
Института машиноведения
им. А. А. Благонравова АН СССР
199178, Ленинград, В.О. Большой пр., 61

Поступило 17 октября 1988 г.