E. D. Gluskin, Deviation of a Gaussian vector from a subspace of l_∞^N, and random subspaces of l_∞^N,
Algebra i Analiz, 1989, Volume 1, Issue 5, 103–114

Е. Д. Глускин

ОТКЛОНЕНИЕ ГАУССОВА ВЕКТОРА ОТ ПОДПРОСТРАНСТВА И СЛУЧАЙНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА l_∞^N

Пусть X – выбранное случайным образом n-мерное подпространство l_∞^N. Вычислен порядок математического ожидания асферичности этого пространства:

$$\mathrm{E}d(X, l_2^n) \asymp \max\left\{1, \sqrt{n/\log(lN/n)}\right\}.$$

Этот результат показывает, что среди всех n-мерных подпространств l_∞^N подпространство, выбранное случайно, обладает минимальной по порядку асферичностью. Полученная оценка распространяет на всю область изменения величины n, $1 \leqslant n \leqslant N$, один результат Б. С. Кашина. Для решения этой задачи получена оценка вероятности больших уклонений для отклонения в равномерной метрике N-мерного гауссова вектора от произвольного n-мерного подпространства l_∞^N.

Начиная с середины 70-х годов специалистов по геометрии банаховых пространств стали привлекать подпространства l_∞^N большой размерности (т. е. подпространства, размерность которых значительно больше, чем $\log N$). В двойственных терминах речь идет о конечномерных пространствах, единичный шар которых – многогранник с не слишком большим числом вершин. Фигель и Джонсон в работе [1] изучали, в частности, асферичность таких пространств. Отвечая на сформулированный ими вопрос, Б. С. Кашин [2] вычислил точный порядок асферичности типичного (в смысле меры Хаара на многообразии Грассмана $G_{n,N}$) n-мерного подпространства l_∞^N при $n < N^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$. Ниже (следствие 1) этот результат распространен на всю область изменения n, $1 \leqslant n \leqslant N$. В работах Бургейна, Линденштраусса, Мильмана ([3], следствие 9.5), Карла, Пажора ([4], теорема 4.3) и автора ([5], следствие 3 (двойственный вариант)), появившихся независимо и практически одновременно, исследовано, на сколько малой по порядку может быть асферичность n-мерного подпространства l_∞^N. Как показывает след-

Ключевые слова: конечномерные нормированные пространства, дистанция Банаха–Мазура, гауссов вектор, выпуклые многогранники.

ствие 1 ниже (оно анонсировано в [5]) эта минимальная по порядку асферичность достигается на типичном n-мерном подпространстве l_∞^N. Для получения этого результата исследуется (теорема 2), насколько „тощим" является типичный многогранник с заданным числом вершин (если его вершины – независимые гауссовы векторы).

В работах автора [6], Шарка [7], Бургейна [8], Манкевича [9] и др. случайные подпространства l_∞^N большой размерности (точнее, сопряженные к ним) использовались для построения примеров конечномерных пространств, в которых множество операторов, ограниченных по норме некоторой константой, довольно бедно. Однако уже в [6] со ссылкой на один результат Фигеля и Джонсона отмечалось, что если $N \ll n^2$, то в таком пространстве обязательно найдется нетривиальный проектор. Ниже (теорема 3) показано, что простое увеличение числа N не позволяет избавиться от нетривиальных проекторов.

Ниже $[1:N]$ – множество натуральных чисел, не превосходящих N. Для конечного множества A через $\operatorname{card} A$ или $|A|$ обозначаем число элементов множества A. $\left\{e_i^N\right\}_{i=1}^N$ или просто $\left\{e_i\right\}$ – стандартный базис пространства $\mathbf{R}^N$. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbf{R}^N$. Как обычно, l_p^N – пространство $\mathbf{R}^N$, снабженное нормой $\|\cdot\|_{l_p^N}$. $\|x\|_{l_p^N} = \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant N} |x_i|^p\right)^{1/p}$, $1\leqslant p<\infty$; $\|x\|_{l_\infty^N} = \max_{1\leqslant i\leqslant N} |x_i|$ $(x = (x_1,\dots,x_N)\in\mathbf{R}^N)$. Для $A\subset[1:N]$ через l_p^A обозначим подпространство пространства l_p^N, порожденное элементами $\left\{e_i\right\}_{i\in A}$. B_p^N (соотв. B_p^A) – единичный шар пространства l_p^N (соотв. l_p^A). P_A – ортопроектор в l_2^N на подпространство l_2^A. Для оператора T, действующего в l_2^A,

$$\sigma_2(T) = \left(\sum_{i,j\in A} |\langle Te_i, e_j\rangle|^2\right)^{1/2}$$

– норма Гильберта–Шмидта этого оператора.

$G_{n,N}$ – многообразие Грассмана всех n-мерных подпространств пространства $\mathbf{R}^N$; $\mu_{n,N}$ – нормированная унитарно инвариантная мера на $G_{n,N}$.

Пусть $L\subset X$ – линейное подпространство банахова пространства X. Для $x\in X$ через $\rho_X(x,L)$ обозначим расстояние от x до L, т. е. $\rho_X(x,L) = \inf_{y\in L}\|x-y\|$.

Пусть B – выпуклое центрально-симметричное подмножество пространства $\mathbf{R}^N$. Через X_B обозначаем n-мерное банахово пространство, единичный шар которого – множество B.

ϵ-сетью подмножества $W\subset X$ банахова пространства X называется множество $\mathcal{F}_\epsilon(W)\subset W$ такое, что для любого $w\in W$ найдется $u\in\mathcal{F}_\epsilon(w)$ такое, что $\|w-u\|\leqslant\epsilon$. Хорошо известно (см., например, [10]), что для любого подмножества W единичного шара n-мерного банахова пространства и любого $\epsilon>0$ найдется ϵ-сеть $\mathcal{F}_\epsilon(W)$ такая, что $|\mathcal{F}_\epsilon(W)|\leqslant(1+2/\epsilon)^n$.

Как обычно, символы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ обозначают вероятность и математическое ожидание соответственно.

Стандартный N-мерный гауссов вектор (или просто гауссов вектор) – это случайный вектор $(g_1,\dots,g_N)$, все координаты которого – независимые гауссовы величины с единичной дисперсией. Распределение N-мерного гауссова вектора будем обозначать γ_N. Таким образом, γ_N – это абсолютно непрерывная по мере Лебега в $\mathbf{R}^N$ мера с плотностью

$$(2\pi)^{-N/2}\exp(-\|x\|_{l_2^N}/2).$$

Пусть $F:\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}^1$ – липшицева функция с $\|F\|_{Lip}\leqslant\delta$ (т. е. $|F(x)-F(y)|\leqslant\leqslant\delta\,\|x-y\|_{l_2^N}$, $\forall x,y\in\mathbf{R}^N$). Нам понадобится следующая оценка больших уклонений случайной величины $F(\bar g)$, где $\bar g$ – N-мерный гауссов вектор, от ее математического ожидания: для любого $\lambda>0$ справедливо неравенство

$$\gamma_N\left\{\bar g\in\mathbf{R}^N:F(\bar g)-\mathrm{E}F>\lambda\right\}\leqslant\exp(-2\lambda^2/\pi^2\delta^2). \qquad (1)$$

Эта оценка очень элегантно доказана Морэ и Пизье (см. [11] или [12], с. 140). Отметим, что, с точностью до фигурирующих в ней констант, она вытекает из более ранних результатов об экстремальных свойствах полупространств для сферически инвариантных мер, полученных В. Н. Судаковым и Б. С. Цирельсоном [13] и независимо Борелем [14].

Иногда при сравнении двух функций φ и ψ вместо того, чтобы писать $\varphi\leqslant c\psi$ с некоторой абсолютной константой c, будем писать $\varphi\prec\psi$. Вместо $\varphi\prec\psi$ и $\psi\prec\varphi$ пишем $\varphi\asymp\psi$.

1. Теорема 1. *Пусть $L\subset\mathbf{R}^N$ – подпространство размерности n, $2n\leqslant N$. Тогда с некоторой абсолютной константой $c_0>0$ выполняется неравенство*

$$\gamma_N\left\{x\in\mathbf{R}^N:\rho_{l_\infty^N}(x,L)\leqslant(c_0\sqrt{\log(eN/2n)}-\lambda)\right\}\leqslant\exp(-4n\lambda^2/\pi^2).$$

Доказательство. Для $m\leqslant N$ определим функцию $f_m=f_{m,L}:\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}^1$ следующим равенством

$$f_m(x)=\sup\left\{\rho_{l_2^A}(P_Ax,P_AL):A\subset[1:N],\ |A|=m\right\}.$$

Лемма 1. *С некоторой абсолютной константой $c_1>0$ выполняется неравенство*

$$\int_{\mathbf{R}^N}f_m(x)\,d\gamma_N(x)\geqslant c_1\sqrt{(m-n)\log(eN/m)}.$$

Доказательство леммы 1 приведем чуть позже. Теорема 1 немедленно вытекает из неравенства (1), примененного к функции $f_{2n,L}$, леммы 1 и очевидных оценок $\|f_{2n,L}\|_{\mathrm{Lip}}\leqslant1$, $\rho_{l_\infty^N}(x,L)\geqslant(2n)^{-1/2}f_{2n,L}(x)$. ●

Доказательство леммы 1. Для $A\subset[1:N]$ обозначим через Q_A ортопроектор в l_2^A с ядром P_AL. В этих обозначениях $f_m(x)$ запишется в виде $f_m(x)=\sup\left\{\|Q_AP_Ax\|_{l_2^A}:A\subset[1:N],\ |A|=m\right\}$. В частности, $f_m(x)\geqslant\|Q_{[1:m]}\times\times P_{[1:m]}x\|_{l_2^m}$. Пусть $k=\operatorname{rank}Q_{[1:m]}$. Ясно, что $k\geqslant m-n$. В силу инвариантности гауссовой меры относительно вращений получаем

$$\int_{\mathbf{R}^N} f_m(x)\,d\gamma_N(x) \geqslant \int_{\mathbf{R}^N} \| Q_{[1:m]} y \|_{l_2^m} d\gamma_m(y) =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^k} \| z \|_{l_2^k} d\gamma_k(x) = \sqrt{2}\, \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)} \succ \sqrt{k} \geqslant \sqrt{m-n}\,.$$

Отсюда приходим к заключению леммы при $m > N/100e$. Для исследования случая „малых" m воспользуемся симметрией гауссовых величин (т.е. тем, что мера γ_N – инвариантна относительно изменения знаков координат). Пусть, как обычно,

$$r_i(t) = \operatorname{sign} \sin 2\pi 2^i t, \quad t \in (0,1), \; i = 1, 2, \ldots$$

– последовательность функции Радемахера. Тогда

$$I \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathbf{R}^N} f_m(x_1, \ldots, x_N)\, d\gamma_N(x_1, \ldots, x_N) =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^N} f_m(r_1(t)x_1, \ldots, r_N(t)x_N)\, d\gamma_N(x_1, \ldots, x_N) = \qquad (\forall\, t \in (0,1))$$

$$= \int_{\mathbf{R}^N} \int_0^1 f_m(r_1(t)x_1, \ldots, r_N(t)x_N)\, dt\, d\gamma_N(x_1, \ldots, x_N).$$

Теперь, вспоминая определение функции f_m и вынося супремум за знак внутреннего интеграла, получаем

$$I \geqslant \int_{\mathbf{R}^N} \sup \left\{ \int_0^1 dt\, \| Q_A P_A \sum_{i=1}^N r_i(t) x_i e_i \|_{l_2^A} : \right.$$

$$\left. : A \subset [1:N],\ |A| = m \right\} d\gamma_N(x_1, \ldots, x_N).$$

По неравенству Хинчина с некоторой абсолютной константой $c_2 > 0$ верна оценка:

$$\int_0^1 dt\, \| Q_A P_A \sum_{i=1}^N r_i(t) x_i e_i \|_{l_2^A} =$$

$$= \int_0^1 dt\, \| \sum_{j \in A} | \sum_{i=1}^N r_i(t) x_i < Q_A P_A e_i, e_j > | e_j \|_{l_2^A} \geqslant$$

$$\geqslant \| \sum_{j \in A} \int_0^1 dt\, | \sum_{i=1}^N r_i(t) x_i < Q_A P_A e_i, e_j > | e_j \|_{l_2^A} \geqslant$$

$$\geqslant c_2 \| \sum_{j \in A} \Big(\sum_{i=1}^N | x_i < Q_A P_A e_i, e_j > |^2 \Big)^{1/2} e_j \|_{l_2^A} \geqslant$$

$$\geqslant c_2 \min_{i \in A} |x_i|\, \sigma_2(Q_A P_A),$$

так как Q_A – ортопроектор в l_2^A и его ранг не меньше $m-n$, $\sigma_2(Q_A P_A) \geqslant \sqrt{m-n}$. Возвращаясь к оценке интеграла I, получаем

$$I \geqslant c_2 \sqrt{m-n} \int_{\mathbf{R}^N} \sup\left\{ \min_{i \in A} |x_i| : A \subset \right.$$

$$\left. \subset [1:N], |A| = m \right\} d\gamma_N(x_1, ..., x_N). \tag{2}$$

Последний интеграл хорошо известен в статистике и его можно вычислить явно. Для полноты изложения приведем полное доказательство необходимых для наших целей оценок. Сначала одно определение. Пусть $\xi_1, ..., \xi_N$ – последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, d\omega)$. Зафиксируем $\omega \in \Omega$ и пусть $\xi_1^*(\omega), ..., \xi_N^*(\omega)$; $\xi_1^*(\omega) \geqslant \xi_2^*(\omega) \geqslant ... \geqslant \xi_N^*(\omega)$ – перестановка в невозрастающем порядке последовательности чисел $|\xi_1(\omega)|, ...,$ $|\xi_N(\omega)|$. Если теперь варьировать ω, то мы придем к последовательности случайных величин $\xi_1^*, ..., \xi_N^*$, называемой вариационным рядом последовательности $\xi_1, ..., \xi_N$.

Сублемма. *Пусть $\xi_1, ..., \xi_N$ – стохастически независимые копии случайной величины ξ и для некоторого числа $x > 0$ выполняется неравенство $\mathbf{P}(|\xi| \geqslant x) > 4m/N$ с некоторым $m \in \mathbf{N}$. Тогда справедливо неравенство $\mathbf{P}(\xi_m^* \geqslant x) > 1/2$ и тем более верна оценка $\mathbf{E}\xi_m^* > x/2$.*

Следствие. *Пусть $g_1, ..., g_N$ – последовательность независимых гауссовых величин с единичной дисперсией, $1 \leqslant m < N/100$. Тогда справедливо неравенство $\mathbf{E}g_m^* \geqslant \sqrt{\log(N/10m)}$.*

Чуть-чуть отложим доказательство этих утверждений и завершим доказательство леммы. Для этого заметим, что $\mathbf{E}g_m^*$ – это просто другая запись интеграла из оценки (2). Тем самым при $m < N/100e < N/100$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathbf{R}^N} f_m(x) d\gamma_N(x) = I \geqslant c_2 \sqrt{m-n} \sqrt{\log(N/10m)} \geqslant$$

$$\geqslant c_2 \sqrt{(m-n)} \sqrt{2^{-1} \log(eN/m)}.$$

Лемма доказана. ●

Доказательство сублеммы. Свяжем с каждой случайной величиной ξ_i случайную величину η_i

$$\eta_i = \theta(|\xi_i| - x) = \begin{cases} 1 \text{ при } |\xi_i| \geqslant x, \\ 0 \text{ при } |\xi_i| < x. \end{cases}$$

Ясно, что событие $\xi_m^* \geqslant x$ совпадает с событием $\eta_1 + ... + \eta_N \geqslant m$. Тем самым речь идет об оценке хвоста биномиального распределения. Для наших целей достаточно неравенства Чебышева.

$$\mathbf{E}\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \eta_i\right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \mathbf{E}\eta_i = N\lambda \quad (\lambda = \mathbf{E}\eta_i).$$

Дисперсия этой же случайной величины вычисляется по формуле

$$\mathbf{D}\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\eta_i\Big)=\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\mathbf{D}\eta_i=N\lambda(1-\lambda).$$

По неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}\Big(\Big|\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\eta_i-N\lambda\Big|\geqslant\sqrt{2N\lambda(1-\lambda)}\Big)\leqslant 1/2.$$

Отсюда

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{N}\eta_i\leqslant N\lambda-\sqrt{2N\lambda(1-\lambda)}\Big)\leqslant 1/2$$

или

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\eta_i>N\lambda-\sqrt{2N\lambda(1-\lambda)}\Big)>1/2.$$

Остается заметить, что, так как $\lambda=\mathbf{E}\eta_i>4m/N$ по условию сублеммы, справедливо неравенство $N\lambda-\sqrt{2N\lambda(1-\lambda)}>m$ и, следовательно, $\mathbf{P}(\xi_m^*\geqslant x)=\mathbf{P}(\eta_1+\ldots+\eta_N\geqslant m)>1/2$. Сублемма доказана. ●

В силу сублеммы для доказательства следствия достаточно убедиться в том, что для гауссовой случайной величины g при наших ограничениях на m и N выполнено неравенство

$$\mathbf{P}(|g|>2\sqrt{\log(N/10m)})>4m/N.$$

Оно сразу следует из оценки (см., например, [15], с. 183)

$$\mathbf{P}(|g|>x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_x^\infty e^{-x^2/2}dx\geqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2/2}\times\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right).$$

Следствие доказано. ●

Теорема 2. *Пусть $g_1,\ldots,g_N$ – стохастически независимые стандартные гауссовы векторы в $\mathbf{R}^n$, причем $n\leqslant N/2$. Множество $V_N=V_N(g_1,\ldots,g_N)$ определяется равенством $V_N=\operatorname{conv}(\pm g_1,\ldots,\pm g_N)$. В этих обозначениях с абсолютными константами $c_3>0$ и $c_4>0$ справедлива следующая оценка*

$$\mathbf{P}\Big\{V_N\supset 4^{-1}c_0\sqrt{\log(eN/2n)}\,B_2^n\Big\}\geqslant 1-(c_3n/N)^{c_4n}.$$

Доказательство. Для сокращения записи положим $2^{-1}c_0\sqrt{\log(eN/2n)}=K$. Зафиксируем некоторое $z\in S^{n-1}$. Из двойственности немедленно получаем, что утверждение $V_N\not\ni Kz$ эквивалентно неравенству

$$\inf_{\xi\in\mathbf{R}^n,\,\xi\perp z}\ \sup_{1\leqslant i\leqslant N}|\langle g_i,z+\xi\rangle|<K.$$

Заметим, что случайный вектор $\bar{g} = (<g_1, z>, ..., <g_N, z>)$ имеет гауссово распределение γ_N; при фиксированной реализации случайных векторов $g_1, ..., g_N$ вектор $(<g_1, \xi>, ..., <g_N, \xi>)$, $\xi \in \mathbf{R}^n, \xi \perp z$ лежит в подпространстве $L_z \subset \mathbf{R}^N$ размерности $n-1$, которое при изменении $g_1, ..., g_N$ меняется стохастически независимо от вектора $\bar{g}$. В этих обозначениях событие $Kz \notin V_N$ совпадает с событием $\rho_{l_\infty^N}(g, L_z) < K$. Тем более

$$\mathbf{P}\left\{Kz \notin V_N\right\} \leqslant \sup_{L : \dim L = n-1} \gamma_N\left\{\bar{g} \in \mathbf{R}^N : \rho_{l_\infty^N}(\bar{g}, L) < K\right\}.$$

Последнюю величину оценим по теореме 1 (с $\lambda = K$). Получаем

$$\mathbf{P}\left\{Kz \notin V_N\right\} \leqslant \exp(-4nK^2/\pi^2).$$

Пусть теперь $\mathcal{F}$ – минимальная 1/2-сеть множества S^{n-1}. Как отмечалось во введении, $|\mathcal{F}| \leqslant 5^n$. Ясно, что

$$\mathbf{P}\left\{K\mathcal{F} \not\subset V_N\right\} \leqslant \sum_{z \in \mathcal{F}} \mathbf{P}\left\{Kz \notin V_N\right\} \leqslant 5^n \exp(-4nK^2/\pi^2).$$

Остается воспользоваться включением $B_2^n \subset 2\operatorname{conv} \mathcal{F}_N$. ●

Замечание. При оценке вероятности события $\left\{Kz \notin V_N\right\}$ можно было бы учесть тот факт, что случайное подпространство L_z равномерно распределено на многообразии Грассмана $G_{n-1,N}$ и вместо теоремы 1 воспользоваться рассуждениями из работ автора [16]. Такой путь приводит к несколько худшей оценке, тем не менее достаточной для вывода следствия 1 (см. ниже). Отметим, что, наоборот, теорема из [16] немедленно вытекает из теоремы 1 настоящей работы и формулы (7) работы [16].

Напомним, что дистанция Банаха–Мазура $d(E, F)$ между двумя n-мерными банаховыми пространствами E и F определяется как

$$d(E, F) = \inf_T \| T \|_{E \to F} \| T^{-1} \|_{F \to E},$$

где T пробегает совокупность всех обратимых линейных операторов из E в F.

Следствие 1. *Равномерно по n и $N \geqslant n$ справедлива оценка*

$$\int_{G_{n,N}} d(l_\infty^N \cap L, l_2^n) d\mu_{n,N}(L) \asymp \max\left\{1, \sqrt{n/\log(eN/n)}\right\}.$$

Доказательство. Как отмечалось во введении, в каждой из работ [3, 4] или [5] доказано, что для любого подпространства $L \subset l_\infty^N$, $\dim L = n$ имеет место оценка $d(l_\infty^n \cap L, l_2^n) \succ \max\left\{1, \sqrt{n/\log(eN/n)}\right\}$. Это, разумеется, дает требуемую оценку снизу для интересующего нас интеграла.

Для получения оценки сверху воспользуемся следующей хорошо известной реализацией меры $\mu_{n,N}$. Пусть Γ – $N \times n$ случайная матрица, все элементы которой независимые гауссовы величины с единичной дисперсией. В силу единственности меры Хаара $\mu_{n,N}$ на многообразии Грассмана $G_{n,N}$ мера $\mu_{n,N}$ индуцируется мерой γ_{nN} при отображении $\Gamma \to \operatorname{Im} \Gamma$. Таким образом,

$$\int_{G_{n,N}} d(l_\infty^N \cap L, l_2^n)\, d\mu_{n,N}(L) = \int_{\mathbf{R}^{nN}} d(l_\infty^N \cap \operatorname{Im}\Gamma, l_2^n)\, d\gamma_{nN}(\Gamma).$$

Обозначим через $g_1, ..., g_N$ – векторы-строки матрицы Г. (Тем самым $g_1, ..., g_N$ – это стохастически независимые n-мерные гауссовы векторы). В этих обозначениях при фиксированной реализации Г пространство $\operatorname{Im}\Gamma \cap l_\infty^N$ изометрично пространству $\mathbf{R}^n$, снабженному нормой

$$\|\cdot\| = \sup\left\{|<\cdot, g_i>| : 1 \leqslant i \leqslant N\right\}.$$

Следовательно, сопряженное пространство $(l_\infty^N \cap \operatorname{Im}\Gamma)^*$ изометрично пространству X_{V_N}, где, как и в теореме 2, $V_N = \operatorname{conv}\left\{\pm g_1, ..., \pm g_N\right\}$.

Хорошо известно (см., например, [12], с. 9–10), что для любого n-мерного нормированного пространства E справедлива оценка $d(E, l_2^n) \leqslant \sqrt{n}$. Кроме того, $d(E, F) = d(E^*, F^*)$ для любых двух банаховых пространств E, F и сопряженных к ним пространств E^*, F^*. Получаем

$$\int_{G_{n,N}} d(l_\infty^N \cap L, l_2^n)\, d\mu_{n,N}(L) = \int_{\mathbf{R}^n \times ... \times \mathbf{R}^n} d(X_{V_N}, l_2^n)\, d\gamma_n(g_1) \dots d\gamma_n(g_N) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^n \times ... \times \mathbf{R}^n} \min\left\{\sqrt{n}, \|\operatorname{Id}\|_{X_{V_N} \to l_2^n} \|\operatorname{Id}\|_{l_2^n \to X_{V_N}}\right\} \prod_{i=1}^{N} d\gamma_N(g_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{n}\,\mathbf{P}\left\{\|\operatorname{Id}\|_{l_2^n \to X_{V_N}} > 4c_0^{-1}(\log(eN/2n))^{-1/2}\right\} +$$

$$+ \sqrt{n}\,\mathbf{P}\left\{\|\operatorname{Id}\|_{X_{V_N} \to l_2^n} > 2\sqrt{n}\right\} + 8c_0^{-1}(n/\log(eN/2n))^{1/2}.$$

Первое слагаемое последней формулы оценивается по теореме 2:

$$\mathbf{P}\left\{\|\operatorname{Id}\|_{l_2^n \to X_{V_N}} > 4c_0^{-1}(\log(eN/2n))^{-1/2}\right\} \leqslant (c_3 n/N)^{c_4 n}.$$

Для оценки второго слагаемого заметим, что

$$\|\operatorname{Id}\|_{X_{V_N} \to l_2^n} = \sup_{1 \leqslant i \leqslant N} \|g_i\|_{l_2^n}.$$

Следовательно,[1]

[1] Разумеется, оценки вероятности $\mathbf{P}\left\{\|g\|_{l_2^n} > \lambda\right\}$ хорошо известны. Для замкнутости изложения мы предпочитаем пользоваться неравенством (1).

$$\mathbf{P}\left\{\|\mathrm{Id}\|_{X_{V_N}\to l_2^n}>2\sqrt{n}\right\}\leqslant\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\mathbf{P}\left\{\|g_i\|_{l_2^n}>2\sqrt{n}\right\}=$$

$$=\gamma_n\left\{g\in\mathbf{R}^n:\|g\|_{l_2^n}>2\sqrt{n}\right\}N.$$

Функция $\|\cdot\|_{l_2^n}$ – липшицева с константой 1, а $\mathbf{E}\|g\|_{l_2^n}\leqslant(\mathbf{E}\|g\|_{l_2^n}^2)^{1/2}=\sqrt{n}$. Из (1) выводим

$$\gamma_n\left\{g\in\mathbf{R}^n:\|g\|_{l_2^n}\geqslant\lambda+\sqrt{n}\right\}\leqslant\exp(-2\lambda^2/\pi^2).\tag{3}$$

Продолжая предыдущую оценку, приходим к неравенству

$$\mathbf{P}\left\{\|\mathrm{Id}\|_{X_{V_N}\to l_2^n}>2\sqrt{n}\right\}\leqslant N\exp(-2n/\pi^2).$$

Окончательно

$$\int_{G_{n,N}}d(l_\infty^N\cap L,l_2^n)d\mu_{n,N}\leqslant\min\left\{\sqrt{n},8c_0^{-1}(n/\log(eN/2n))^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{n}(c_3n/N)^{c_4n}+N\sqrt{n}\exp(-2n/\pi^2)\right\}\prec\max\left\{1,(n/\log(eN/n))^{1/2}\right\}$$

(в последнем переходе используется монотонность по n исследуемого интеграла). ●

2. Пусть $\Gamma_{n,k}$ – случайная $n\times k$-матрица, все элементы которой – независимые гауссовы величины с единичной дисперсией. Следующее утверждение хорошо известно специалистам. Его доказательство приводится для полноты изложения.

Лемма 2.[2] *Для любого* δ, $0<\delta<1$, *найдется константа* $c_5=c_5(\delta)>0$ *такая, что, как только* $k\leqslant\delta n$, *справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\left\{\Gamma_{n,k}B_2^k\supset c_5\sqrt{n}(B_2^n\cap\operatorname{Im}\Gamma_{n,k})\right\}\geqslant 1-2e^{-n}.$$

Доказательство. Для $\epsilon>0$ через $\mathcal{F}_\epsilon$ обозначаем минимальную ϵ-сеть S^{k-1} в евклидовой метрике. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\epsilon)$ – следующие множества $n\times k$-матриц:

$$\mathcal{A}=\left\{\Gamma:\forall a\in\mathcal{F}_{1/2}\ \|\Gamma a\|_{l_2^n}\leqslant 6\sqrt{n}\right\},$$

$$\mathcal{B}(\epsilon)=\left\{\Gamma:\forall b\in\mathcal{F}_\epsilon\ \|\Gamma b\|_{l_2^n}\geqslant 24\epsilon\sqrt{n}\right\}.$$

Число ϵ будет выбрано позже. Заметим, что если $\Gamma\in\mathcal{A}\cap\mathcal{B}(\epsilon)$, то для любого $b\in\mathbf{S}^{k-1}$ будет выполнено неравенство $\|\Gamma b\|_{l_2^n}\geqslant 12\epsilon\sqrt{n}$. Действительно,

---

[2] Лемма 2 тесно связана с оценкой распределения сингулярных чисел гауссовой матрицы. Уже после подготовки статьи к печати автору стало известно, что Шарек (Szarek S. J. Spaces with large distance to l_∞^n and random matrices. Preprint IHES/M/88/9) сумел получить точные по порядку экспоненциальные оценки распределения сингулярных чисел квадратной гауссовой матрицы. Его результат содержит лемму 2 как частный случай.

$\forall b \in S^{k-1}$ найдется $\tilde{b} \in \mathcal{F}_\epsilon$ такое, что $\| b - \tilde{b} \|_{l_2^n} \leqslant \epsilon$ и, следовательно,

$$\| \Gamma b \|_{l_2^n} \geqslant \| \Gamma b \|_{l_2^n} - \| \Gamma (b - \tilde{b}) \|_{l_2^n} \geqslant 24 \epsilon \sqrt{n} - \epsilon \| \Gamma \|_{l_2^k \to l_2^n}.$$

Так как $\Gamma \in \mathcal{A}$ и $2 \operatorname{conv} \mathcal{F}_{1/2} \supset B_2^n$, то $\| \Gamma \|_{l_2^k \to l_2^n} \leqslant 12 \sqrt{n}$, что и дает нужную оценку. Эта оценка эквивалентна включению $\Gamma B_2^k \supset 12 \epsilon \sqrt{n} B_2^n \cap \operatorname{Im} \Gamma$. Таким образом,

$$\mathbf{P}\left\{ \Gamma_{n,k} B_2^k \supset 12 \epsilon \sqrt{n} (B_2^n \cap \operatorname{Im} \Gamma_{n,k}) \right\} \geqslant \mathbf{P}\left\{ \Gamma_{n,k} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}(\epsilon) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - (1 - \mathbf{P}\left\{ \Gamma_{n,k} \in \mathcal{A} \right\}) - (1 - \mathbf{P}\left\{ \Gamma_{n,k} \in \mathcal{B}(\epsilon) \right\}).$$

Заметим, что при любом $a \in S^{k-1}$ вектор $\Gamma_{n,k} a$ имеет стандартное гауссово распределение в $\mathbf{R}^n$. Таким образом,

$$1 - \mathbf{P}\left\{ \Gamma_{n,k} \in \mathcal{A} \right\} = \mathbf{P}\left\{ \Gamma_{n,k} : \exists a \in \mathcal{F}_{1/2}, \| \Gamma_{n,k} a \|_{l_2^n} > 6 \sqrt{n} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \Sigma_{a \in \mathcal{F}_{1/2}} \mathbf{P}\left\{ \Gamma_{n,k} : \| \Gamma_{n,k} a \|_{l_2^n} \geqslant 6 \sqrt{n} \right\} = | \mathcal{F}_{1/2} | \gamma_n \left\{ g \in \mathbf{R}^n : \| g \|_{l_2^n} > 6 \sqrt{n} \right\}.$$

В силу формулы (3) и неравенства $| \mathcal{F}_{1/2} | \leqslant 5^k < 5^n$ находим

$$1 - \mathbf{P}\left\{ \Gamma_{n,k} \in \mathcal{A} \right\} \leqslant 5^n \exp(-50 n / \pi^2) \leqslant e^{-n}.$$

Прямым вычислением легко показать, что с некоторой абсолютной константой $c > 0$ для любого $\epsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\gamma_n \left\{ g \in \mathbf{R}^n : \| g \|_{l_2^n} \leqslant \epsilon \sqrt{n} \right\} \leqslant (c \epsilon)^n.$$

Используя эту оценку вместо формулы (3), оценим вероятность попадания матрицы $\Gamma_{n,k}$ в множество $\mathcal{B}(\epsilon)$. При этом учтем, что $| \mathcal{F}_\epsilon | \leqslant (1 + 2/\epsilon)^k \leqslant (3/\epsilon)^k \leqslant$ $\leqslant (3/\epsilon)^{n\delta}$ при $\epsilon < 1$. Получаем

$$1 - \mathbf{P}\left\{ \Gamma_{n,k} \in \mathcal{B}(\epsilon) \right\} \leqslant | \mathcal{F}_\epsilon | \gamma_n \left\{ g \in \mathbf{R}^n : \| g \|_{l_2^n} < 24 \epsilon \sqrt{n} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant (3/\epsilon)^k (24 c \epsilon)^n \leqslant (72 c \epsilon^{1-\delta})^n.$$

Для завершения доказательства остается выбрать ϵ из соотношения $72 c \epsilon^{1-\delta} <$ $< e^{-1}$. ●

Следствие 2. *Пусть $0 < \delta < 1$, $k < \delta n$ и $g_1, \ldots, g_k$ – набор независимых n-мерных гауссовых векторов. Тогда справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\left\{ \operatorname{conv}(\pm g_1, \ldots, \pm g_k) \supset c_5(\delta) \sqrt{n/k} (B_2^n \cap \operatorname{span}(g_1, \ldots, g_k)) \right\} \geqslant 1 - 2e^{-n}.$$

Доказательство. Достаточно проинтерпретировать векторы g_i, как строки гауссовой матрицы $\Gamma_{n,k}$. При такой интерпретации

$$\operatorname{conv}(\pm g_1, \ldots, \pm g_k) = \Gamma_{n,k} B_1^k \supset k^{-1/2} \Gamma_{n,k} B_2^k.$$

Лемма 2 дает теперь требуемую оценку. •

Напомним вероятностную схему построения примеров конечномерных нормированных пространств, о которой шла речь во введении. Пусть $n \leqslant N$ и $g_1, \ldots, g_N$ – N стандартных гауссовых векторов в $\mathbf{R}^n$. $V_N = \operatorname{conv}\{\pm g_1, \ldots, \pm g_N\}$. Речь идет о типичном (в смысле соответствующей вероятностной меры) пространстве X_{V_N}.[3]

Теорема 3. *Пусть* $0<\delta<1$, $1 \leqslant k \leqslant \delta n < n < N$, *а* $\lambda \geqslant \max\{1, 2k/c_5(\delta)\sqrt{n}\}$. *Тогда вероятность того, что в пространстве* X_{V_N} *найдется проектор* Q *ранга* k, *норма которого в пространстве* X_{V_N} *не больше* λ, *допускает следующую оценку* ($c_7(\delta) > 0$ – *константа, зависящая только от* δ):

$$\mathbf{P}\left\{\exists Q : Q^2 = Q,\ \operatorname{rank} Q = k,\ \|Q\|_{X_V} \leqslant \lambda\right\} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - 2\exp(-n) - \exp(\log N - \lambda^2 c_7^2(\delta) n / 2\pi^2 k).$$

Замечание. Оценка в теореме 3 становится тривиальной при $n \prec \log N$. Однако в этом случае типичное пространство X_{V_N} становится близким к евклидову (см., например, теорему 2 выше), и поэтому любой ортопроектор в нем будет иметь не слишком большую норму.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\mathcal{L} = \operatorname{span}\{g_1, \ldots, g_k\}$, а Q – ортопроектор из $\mathbf{R}^n$ на $\mathcal{L}$. В этих обозначениях с вероятностью 1 выполняется равенство $\operatorname{rank} Q = k$. Кроме того, для того чтобы выполнялось неравенство $\|Q\|_{X_{V_N}} \leqslant \lambda$, достаточно, чтобы для $j = k+1, \ldots, N$ выполнялось включение $Qg_j \in$ $\in \lambda \operatorname{conv}\{\pm g_1, \ldots, \pm g_k\}$. Тем самым

$$\mathbf{P}\left\{\exists Q : Q^2 = Q,\ \operatorname{rank} Q = k,\ \|Q\|_{X_V} \leqslant \lambda\right\} \geqslant \mathbf{P}\Big\{\operatorname{conv}(\pm g_1, \ldots, \pm g_k) \supset$$

$$\supset c_5(\delta)\sqrt{n/k}\,(B_2^n \cap \mathcal{L})\Big\} - \sum_{k+1 \leqslant j \leqslant N} \mathbf{P}\left\{Qg_j \notin \lambda c_5(\delta)\sqrt{n/k}\, B_2^n\right\}.$$

Первое слагаемое оценено в лемме 2. Отдельное слагаемое в сумме записывается иначе, как

$$\mathbf{P}\left\{\|Qg_j\|_{l_2^n} > \lambda c_5(\delta)\sqrt{n/k}\right\}.$$

---

[3] Чаще принято пользоваться аналогичной конструкцией, а которой вместо гауссовых векторов берутся вектора равномерно распределенные на сфере S^{n-1}. Благодаря концентрации гауссова вектора около сферы радиуса $\sqrt{n}$ оба эти подхода дают в геометрическом смысле одинаковые результаты.

(Это вновь хвост распределения χ^2, так как при фиксированном $\mathcal{L}$ вектор Qg_j имеет в $\mathcal{L}$ стандартное k-мерное гауссово распределение). Оценивая его по формуле (3) и складывая полученные оценки, приходим к заключению теоремы. ●

Список литературы

[1] *Figiel T., Johnson W. B.* Large subspaces of l_∞^n and estimates of the Gordon–Lewis constant // Israel J. Math. *1980*. Vol. 37. P. 92–112.

[2] *Кашин Б. С.* О свойствах случайных сечений N-мерного куба // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. *1983*. № 3. С. 8–11.

[3] *Bourgain J., Lindenstrauss J., Milman V. D.* Approximation of zonoids by zonotopes. Preprint. September, *1987*. To appear in Acta Math.

[4] *Carl B., Pajor A.* Gelfand numbers of operators with values in a Hilbert space. To appear in Inventiones Math.

[5] *Глускин Е. Д.* Экстремальные свойства ортогональных параллелепипедов и их приложения к геометрии банаховых пространств // Мат. сб. *1988*. Т. 136 (178), № 1 (5). С. 85–96.

[6] *Глускин Е. Д.* Конечномерные аналогии пространств без базиса // ДАН СССР. *1981*. Т. 261, № 5. С. 1046–1050.

[7] *Szarek S. J.* On the existence and uniquenness of complex structure and spaces with few operators // Tranc. Amer. Math. Soc. *1986*. Vol. 293. P. 339–353.

[8] *Bourgain J.* A complex Banach space such that $\bar{X}$ and X are not isomorphic // Proc. Amer. Math. Soc. *1986*. Vol. 96. P. 221–226.

[9] *Mankiewicz P.* Subspace mixing properties of operators in $\mathbf{R}^n$ with applications to pathological properties of Gluskin space // Studia Math. *1988*. Vol. 88. P. 51–67.

[10] *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ϵ-энтропия и ϵ-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. *1959*. Т. 14, № 2 (80). С. 3–86.

[11] *Pisier G.* Probabilistic metods in the geometry of Banach spaces // Springer Lecture Notes. *1986*. N 1206. P. 167–241.

[12] *Milman V., Schechtman G.* Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces // Springer Lecture Notes. *1986*. N 1200.

[13] *Судаков В. Н., Цирельсон Б. С.* Экстремальные свойства полупространств для сферически инвариантных мер // Проблемы теории вероятностных распределений: Зап. науч. сем. ЛОМИ. *1974*. Т. 41. С. 14–24.

[14] *Borell C.* The Brunn–Minkowski inequality in Gauss space // Invent. Math. *1975*. Vol. 30, N 2. P. 207–216.

[15] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, *1964*.

[16] *Глускин Е. Д.* Октаэдр плохо приближается случайными подпространствами // Функцион. анализ и его прил. *1986*. Т. 20, № 1. С. 14–20.

Финансово-экономический институт
им. Н. А. Вознесенского
191023, Ленинград, наб. кан. Грибоедова, 30/32

Поступило 20 марта 1989 г.

Примечание при корректуре. Благодаря личному контакту автору стало известно, что результат теоремы 3 независимо и примерно тем же самым методом недавно получен Шарком (S. J. Szarek).