V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev, Upper and low bounds of azimuthal numbers related to elementary wave functions of an elliptic cylinder, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2012, Volume 12, Issue 2, 68–81

DOI: 10.18500/1816-9791-2012-12-2-68-81

УДК 539.374

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ АЗИМУТАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев*

Московский городской университет управления
Правительства Москвы
E-mail: vlad_koval@mail.ru
*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва
E-mail: y.radayev@gmail.com

Статья посвящена вопросам, связанным с построением 2π-периодических по «угловой» переменной решений дифференциального уравнения Матье для окружных гармоник эллиптического цилиндра, ассоциированных характеристических значений и азимутальных чисел, необходимых для формирования элементарных волновых функций эллиптического цилиндра. Классическая задача Штурма–Лиувилля для уравнения Матье приводится к спектральной задаче для линейного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве бесконечных квадратично суммируемых двусторонних последовательностей. Указанный оператор расщепляется затем в сумму диагонального оператора и симметричного бистохастического оператора. Предлагается подход, позволяющий дать весьма простые алгоритмы вычисления характеристических значений «углового» уравнения Матье с вещественными параметрами и соответствующих собственных функций. Приоритет при этом отдается применению наиболее симметричных форм и уравнений, не находивших ранее применения в теории уравнения Матье. По существу, указанные алгоритмы сводятся к построению матрицы, диагонализирующей одну бесконечную симметричную пентадиагональную матрицу. Рассматривается проблема обобщения на случай эллиптической геометрии понятия азимутального числа волны, распространяющейся в цилиндрическом волноводе. Построены уточняющие друг друга двусторонние оценки для спектральных значений дифференциального оператора Матье с периодическими и полупериодическими граничными условиями.

Ключевые слова: уравнение Матье, собственное значение, азимутальное число, спектральная задача, волновое число, волновая функция, диагонализация, круг Гершгорина, овал Кассини, бистохастическая матрица.

Upper and Low Bounds of Azimuthal Numbers Related to Elementary Wave Functions of an Elliptic Cylinder

V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev

Numerical and analytical aspects of generating 2π-periodic solutions of the angular Mathieu equation obtained for the circumferential harmonics of an elliptic cylinder and localization problem for the Mathieu eigenvalues and corresponding azimuthal numbers are considred. Those are required in usual procedure of constructing the elliptic cylinder elementary wave functions playing a very important role in mathematical physics. The Sturm–Liouville eigenvalue problem for angular Mathieu equation is reformulated as the algebraic eigenvalue problem for a infinite linear self-adjoint pentadiagonal matrix operator acting in the complex bi-infinite sequence space l_2. The matrix operator then can be splitted into a diagonal matrix and a infinite symmetric doubly stochastic matrix. Simple algorithms aimed at computation of the Mathieu eigenvalues and associated angular harmonics are discussed. The most symmetric forms and equations mostly known from the contemporary theory of the Mathieu equation are systematically used. Some of them are specially derived for the case and seem to be new in the theory of the angular Mathieu equation. An extension of the azimuthal numbers notion to the case of elastic and thermoelastic waves propagating in a long elliptic waveguide is proposed. Estimations of upper and low bounds for the angular Mathieu eigenvalues and azimuthal numbers are obtained by the aid of the Gerschgorin theorems and more accurate ones by the Cassini ovals technique.

Key words: Mathieu equation, eigenvalue, azimuthal number, spectral problem, wavenumber, wave function, diagonalization, Gerschgorin disk (circle), Cassini oval, doubly stochastic matrix.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Элементарные волновые функции эллиптического цилиндра, получающиеся как результат разделения переменных в уравнении Гельмгольца, представленном в координатах эллиптического цилиндра, являются произведениями так называемых «угловых» и «радиальных» функций Матье (Mathieu function, MF), удовлетворяющих дифференциальным уравнениям Матье. Два дифференциальных уравнения Матье преобразуются одно к другому с помощью весьма простой замены независимой переменной.

Дифференциальное уравнение Матье (Mathieu equation, ME):

$$\frac{d^2Y}{dv^2} + (a - 2q\cos 2v)Y = 0,$$

где v $(-\pi \le v \le \pi)$ — «угловая» переменная; a, q — постоянные, полученное впервые в работе [1] при решении задачи о колебаниях эллиптической мембраны более ста лет назад, начиная с момента своего появления в научных публикациях является объектом систематических исследований как теоретических, так и прикладных. Решения дифференциального уравнения Матье играют важную роль во многих задачах математической физики. Теория функций Матье была создана значительно позднее, чем аналогичные теории подавляющего большинства специальных функций математической физики. Вычислительные методы для функций Матье также сравнительно слабо развиты, поскольку вычисления, связанные с функциями Матье и ассоциированными с ними характеристическими и азимутальными значениями, значительно труднее вычислений, относящихся к другим известным специальным функциям математической физики.

Дифференциальное уравнение Матье является частным случаем уравнения Хилла:

$$\frac{d^2Y}{dv^2} + [a - 2q\psi(2v)]Y = 0,$$

в котором

$$a = \theta_0, \qquad -q\psi(2v) = \theta_2 \cos 2v + \theta_4 \cos 4v + \dots\ ,$$

θ_{2j} — заданные постоянные, ряд из которых абсолютно сходится:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\theta_{2j}| < \infty.$$

Это уравнение впервые было получено в 1877 г. (опубликовано в 1886 г.) при исследовании среднего движения лунного перигея.

В прикладных задачах механики и электродинамики дифференциальное уравнение Матье обычно получается при построении элементарных волновых функций эллиптического цилиндра методом разделения переменных в скалярном уравнении Гельмгольца, представленном в координатах эллиптического цилиндра. Именно поэтому решения уравнения Матье иногда называют функциями эллиптического цилиндра. Заметим, что всегда предпочтительнее иметь решение уравнения Гельмгольца, выраженное в терминах функций Матье, поскольку прямые численные методы часто не в состоянии дать более или менее правильные результаты в коротковолновом диапазоне или их применение связано с необходимостью дискретизации области на весьма малые плоские элементы.

В частности, при исследовании распространения упругих и связанных термоупругих волн третьего типа (type-III thermoelastic waves, GNIII) в длинном цилиндрическом волноводе эллиптического поперечного сечения (см. [2]) векторный потенциал $\boldsymbol{\Psi}$ (который, в свою очередь, выражается через два скалярных потенциала ψ и χ) и скалярный потенциал Ω удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} + k_\perp^2 \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = 0, \qquad \Delta\Omega + \gamma^2\Omega = 0 \qquad (\gamma = \gamma_1,\, \gamma_2), \tag{1}$$

где $\Delta = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ — оператор Лапласа; $\boldsymbol{\nabla}$ — трехмерный оператор Гамильтона; $k_\perp$ — волновое число поперечной упругой волны; постоянные γ_j $(j = 1,\, 2)$ имеют смысл волновых чисел плоской монохроматической связанной термоупругой волны, распространяющейся в неограниченной среде (см. [3] о волновых числах плоской термоупругой волны третьего типа (GNIII)). Постоянная $k_\perp$ всегда вещественна и положительна. Постоянные γ_j $(j = 1,\, 2)$ являются, вообще говоря, комплексными числами. В важном предельном случае гиперболических термоупругих волн второго типа (GNII) постоянные γ_j $(j = 1,\, 2)$ вещественны и положительны.

2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ТРЕХМЕРНОМ УРАВНЕНИИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА. «УГЛОВОЕ» И «РАДИАЛЬНОЕ» УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

Если ввести ортогональные криволинейные координаты эллиптического цилиндра u, v, z согласно ($2c$ — расстояние между фокусами эллипса, u — «радиальная» координата, v — «угловая» координата, z — вертикальная координата)

$$x_1 = c\,\mathrm{ch}\,u\cos v, \quad x_2 = c\,\mathrm{sh} u\sin v, \quad x_3 = z, \tag{2}$$

то пространственный оператор Гамильтона может быть представлен в форме ($\mathbf{i}_{<u>}$, $\mathbf{i}_{<v>}$, $\mathbf{i}_{<z>}$ — единичные локальные базисные орты криволинейной координатной системы эллиптического цилиндра)

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{1}{c\sqrt{\ }}\left(\mathbf{i}_{<u>}\frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{i}_{<v>}\frac{\partial}{\partial v}\right) + \mathbf{i}_{<z>}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем для сокращения записи уравнений используется следующее обозначение:

$$\sqrt{\ } = \sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v}. \tag{4}$$

Заметим, что выполняется равенство

$$\sqrt{\ } = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\operatorname{ch} 2u - \cos 2v}.$$

Оператор Лапласа в криволинейных координатах эллиптического цилиндра u, v, z, как показывают простые вычисления, имеет следующий вид:

$$\Delta = \frac{1}{c^2\sqrt{\ }^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{5}$$

Трехмерный дифференциальный оператор Гельмгольца в координатах эллиптического цилиндра u, v, z на основании (5) и с учетом введенного выше обозначения (4) будет иметь следующую форму:

$$\Delta + \gamma^2 = \frac{1}{c^2\sqrt{\ }^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma^2. \tag{6}$$

В случае волны, распространяющейся вдоль волновода (т. е. вдоль оси z), для повторного дифференцирования по вертикальной координате имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -k^2,$$

где k — волновое число (постоянная распространения) упругой или связанной термоупругой волны.

Отделение «угловой» координаты в волновых потенциалах ψ, χ, Ω приводит к угловым гармоникам, зависящим только от «угловой» переменной v. Угловые гармоники Матье $Y = Y(v)$ являются решениями «углового» (angular, circumferential) дифференциального уравнения Матье (b — параметр разделения переменных, называемый также характеристическим параметром уравнения Матье):

$$\frac{d^2Y}{dv^2} + (b - c^2\lambda^2\cos^2 v)Y = 0, \tag{7}$$

где $\lambda^2 = k_{\perp}^2 - k^2$ либо $\lambda^2 = \gamma^2 - k^2$; с подлежащими определению характеристическими постоянными (собственными значениями) $b = b_j$ $(j = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, образующими счетное ограниченное снизу множество и обеспечивающими существование 2π-периодических решений этого уравнения. Последнее требование совершенно необходимо, если элементарные волновые функции предполагаются однозначными. Как известно, 2π-периодические решения дифференциального уравнения Матье называются функциями Матье первого рода или просто функциями Матье.

В уравнении (7) принята стандартная для теории уравнения Матье расстановка знаков, хотя считается целесообразным записывать дифференциальное уравнение так, чтобы знак при неизвестной функции был положительным, а знак при второй производной — отрицательным. Тогда собственные значения, как правило, оказываются положительными.

Уравнение (7) допускает как периодическое (периода 2π), так и второе, непериодическое решение, ассоциированные с одним и тем же собственным значением $b = b_j$ $(j = 0, 1, 2, 3, \ldots)$. С прикладной точки зрения интерес представляют лишь 2π-периодические решения.

Отделение «радиальной» координаты u в волновых потенциалах ψ, χ, Ω приводит к «радиальным» функциям Матье $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(u)$, удовлетворяющим так называемому «радиальному» дифференциальному уравнению Матье с тем же самым характеристическим параметром b:

$$\frac{d^2\mathcal{Y}}{du^2} + (c^2\lambda^2\operatorname{ch} u - b)\mathcal{Y} = 0. \tag{8}$$

Теория «углового» уравнения Матье (7) достаточно полно обсуждается в классических руководствах [4–9]. Компактное изложение имеется в книге [10]. Ряд связанных с уравнением Матье вопросов как аналитического, так и вычислительного характера и в настоящее время нельзя считать полностью разрешенными, поэтому это уравнение продолжает привлекать к себе внимание исследователей.

Несмотря на то что развитая к настоящему времени теория «углового» уравнения Матье допускает комплексные значения параметра λ, мы пока ограничимся случаем, когда постоянная λ^2 является вещественным положительным числом, поскольку именно этот случай соответствует распространяющимся без затухания связанным термоупругим волнам «второго звука» в длинном эллиптическом цилиндре, выступающим как термоупругий волновод.

В уравнение Матье (7) удобнее ввести новые постоянные

$$a = b - \frac{c^2\lambda^2}{2}, \quad q = \frac{c^2\lambda^2}{4}, \tag{9}$$

после чего оно приобретает «каноническую» форму:

$$\frac{d^2Y}{dv^2} + (a - 2q\cos 2v)Y = 0. \tag{10}$$

Именно такая форма будет систематически использоваться в дальнейшем. К сожалению, в теории функций Матье нет общепринятого и твердо установившегося канонического вида «углового» уравнения Матье, а также единообразных обозначений для его решений. Есть и другие возражения против признания формы (10) канонической, основанные на знаке минимального спектрального значения уравнения (10). Роль характеристической постоянной в «каноническом» уравнении Матье (10) играет параметр a.

Если постоянная q принимает вещественные значения, то собственные значения уравнения Матье также принимают вещественные значения. Заметим, что теория «углового» уравнения Матье допускает ценой существенного ее усложнения также комплексные значения для постоянной q. В этом случае собственные значения уравнения Матье могут быть комплексными числами.

3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ «УГЛОВОГО» ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

«Угловое» уравнение Матье (10) в силу π-периодичности коэффициента всегда имеет решение вида

$$Y(v) = e^{i\nu v}P(v), \tag{11}$$

где характеристический показатель ν зависит от постоянных a и q, а $P(v)$ — периодическая (с наименьшим периодом π) функция, не равная тождественно нулю.

По понятным причинам нас будут интересовать лишь 2π-периодические решения уравнения Матье вида (11). Характеристический показатель ν в том случае, когда решение уравнения Матье 2π-периодично, есть целое число. Те значения постоянной a, для которых при заданном значении q выполняется условие $\nu = m$, являются собственными значениями. Заметим также, что при $\nu = m$ решение уравнения Матье (11) имеет период π, если m четно, и период 2π, если m нечетно.

При вещественных значениях q собственные значения, как известно, будут вещественными и их можно упорядочить в порядке возрастания. Если постоянная $q \neq 0$, то каждому собственному значению соответствует не более одного периодического решения уравнения Матье с наименьшим периодом π или 2π, четного или нечетного. Следовательно, среди собственных значений будут такие, которым отвечают четные 2π-периодические решения «углового» уравнения Матье, и такие — которым отвечают нечетные 2π-периодические решения.

Собственные функции, обладающие наименьшим периодом π, и соответствующие собственные значения можно определять как решения периодической задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Y}{dv^2} + (a - 2q\cos 2v)Y = 0, \\ Y(0) = Y(\pi), \\ Y'(0) = Y'(\pi). \end{cases} \tag{12}$$

Собственные функции, обладающие наименьшим периодом 2π, и соответствующие собственные значения можно определять как решения полупериодической (антипериодической) задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Y}{dv^2} + (a - 2q\cos 2v)Y = 0, \\ Y(0) = -Y(\pi), \\ Y'(0) = -Y'(\pi). \end{cases} \tag{13}$$

Соответствующие граничным задачам (12) и (13) дифференциальные операторы называются обычно периодическим и полупериодическим дифференциальными операторами Матье.

Обе задачи, как нетрудно проверить, являются самосопряженными. Их исследование может поэтому опираться на достаточно хорошо разработанную в многочисленных публикациях теорию задач Штурма–Лиувилля (см., например, [11–13]). В частности, сразу можно сделать заключение о вещественности собственных значений как периодической (12), так и полупериодической (13) задач Штурма–Лиувилля.

Периодической задаче Штурма–Лиувилля (12) отвечает возрастающая последовательность собственных значений

$$a_0^{(e)}, a_2^{(e)}, a_2^{(o)}, a_4^{(e)}, a_4^{(o)}, \ \ldots \ . \tag{14}$$

Полупериодической задаче Штурма–Лиувилля (13) отвечает возрастающая последовательность собственных значений

$$a_1^{(e)}, a_1^{(o)}, a_3^{(e)}, a_3^{(o)}, \ \ldots \ . \tag{15}$$

Хорошо известно, что последовательности (14) и (15) упорядочиваются в одну строку следующим образом:
— при выполнении условия $q > 0$ имеем

$$a_0^{(e)} < a_1^{(o)} < a_1^{(e)} < a_2^{(o)} < a_2^{(e)} < a_3^{(o)} < a_3^{(e)} < \cdots \ ;$$

— при выполнении условия $q < 0$ имеем

$$a_0^{(e)} < a_1^{(e)} < a_1^{(o)} < a_2^{(o)} < a_2^{(e)} < a_3^{(e)} < a_3^{(o)} < a_4^{(o)} \cdots \ .$$

В том случае, когда постоянная $q = 0$, получаем $a_0^{(e)} = 0$, а остальные собственные значения периодической и полупериодической задач Штурма–Лиувилля (12), (13) совпадают $a_m^{(e)} = a_m^{(o)} = m^2$ $(m = 1, 2, \ldots)$. При этом собственному значению $a_0^{(e)} = 0$ соответствует лишь одна характеристическая функция; каждому собственному значению m^2 $(m = 1, 2, \ldots)$ соответствует ровно *две* линейно независимых характеристических функции.

Собственные значения, ассоциированные с четными периодическими (наименьшего периода π или 2π) решениями «углового» уравнения Матье (10), упорядочив их по возрастанию, расположим в виде возрастающей последовательности

$$a_0^{(e)}, a_1^{(e)}, \ \ldots \ , a_m^{(e)}, \ \ldots \ . \tag{16}$$

Соответствующие собственные функции (каждому собственному значению соответствует лишь одна собственная функция) могут быть разложены на отрезке $[-\pi, \pi]$ в ряды Фурье по косинусам:

$$\mathrm{Se}_m(c\lambda, \cos v) = {\sum_n}' D_n^m \cos nv \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \ \ldots), \tag{17}$$

где штрих у знака суммы здесь и в дальнейшем указывает, что суммирование должно производиться по четным n, если m четно (причем $m = 0$ считается четным числом), и нечетным n, если m нечетно. Таким образом, функции Матье Se_m $(m = 0, 1, 2, 3, \ \ldots)$ обладают наименьшим периодом, равным π, если m четно, и периодом 2π, если m нечетно.

В качестве условий нормировки собственных функций Se_m можно, например, принять следующие условия:

$$\mathrm{Se}_m(c\lambda, 1) = 1 \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \ \ldots), \tag{18}$$

которые, очевидно, формулируется также в виде

$$\sum_n{}' D_n^m = 1 \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \ \ldots). \tag{19}$$

Для каждого m ($m = 0, 1, 2, 3, \ldots$) коэффициенты D_n^m могут быть последовательно определены из рекуррентной формулы, которая находится прямой подстановкой ряда Фурье (17) в «угловое» уравнение Матье (10):

$$(a_m^{(e)} - j^2)D_j^m - q(D_{j-2}^m + D_{j+2}^m) = 0 \qquad (j \geq 3), \tag{20}$$

дополненной «начальными» соотношениями:

$$a_m^{(e)} D_0^m - qD_2^m = 0, \quad (a_m^{(e)} - 4)D_2^m - q(2D_0^m + D_4^m) = 0 \qquad (m \text{ четно}),$$

$$(a_m^{(e)} - 1)D_1^m - q(D_1^m + D_3^m) = 0 \qquad (m \text{ нечетно}).$$

Нечетным периодическим (наименьшего периода π или 2π) решениям «углового» уравнения Матье (10) отвечает упорядоченная по возрастанию последовательность собственных значений:

$$a_1^{(o)}, a_2^{(o)}, \ \ldots \ , a_m^{(o)}, \ \ldots \ .$$

Нечетные периодические решения «углового» уравнения Матье представляются на отрезке $[-\pi, \pi]$ рядами Фурье по системе синусов

$$\mathrm{So}_m(c\lambda, \cos v) = \sum_n{}' F_n^m \sin nv \qquad (m = 1, 2, 3, \ \ldots). \tag{21}$$

Функции Матье So_m ($m = 1, 2, 3, \ \ldots$) обладают наименьшим периодом, равным π, если m четно, и периодом 2π, если m нечетно.

Сформулируем условия нормировки для нечетных собственных функций «углового» уравнения Матье:

$$\frac{d}{dv}\mathrm{So}_m(c\lambda, \cos v)\bigg|_{v=0} = 1 \qquad (m = 1, 2, 3, \ \ldots); \tag{22}$$

нетрудно заметить, что они выражаются также в форме равенств

$$\sum_n{}' nF_n^m = 1 \qquad (m = 1, 2, 3, \ \ldots). \tag{23}$$

Для каждого m ($m = 1, 2, 3, \ \ldots$) коэффициенты F_n^m также могут быть один за другим вычислены с помощью рекуррентной формулы, которая получается подстановкой ряда Фурье (21) в «угловое» уравнение Матье (10):

$$(a_m^{(o)} - j^2)F_j^m - q(F_{j-2}^m + F_{j+2}^m) = 0 \qquad (j \geq 3), \tag{24}$$

дополненной «начальными» соотношениями:

$$(a_m^{(o)} - 4)F_2^m - qF_4^m = 0 \qquad (m \text{ четно}),$$

$$(a_m^{(o)} - 1)F_1^m + q(F_1^m - F_3^m) = 0 \qquad (m \text{ нечетно}).$$

Собственные функции $\mathrm{Se}_0(c\lambda, \cos v)$, $\mathrm{Se}_m(c\lambda, \cos v)$, $\mathrm{So}_m(c\lambda, \cos v)$ ($m = 1, 2, 3, \ \ldots$) «углового» уравнения Матье взаимно ортогональны на отрезке $[-\pi, \pi]$, поскольку выполняются равенства

$$\begin{gathered}
\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Se}_i(c\lambda, \cos v)\mathrm{Se}_j(c\lambda, \cos v)dv = 0 \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3, \ \ldots \ ; \ i \neq j), \\
\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{So}_i(c\lambda, \cos v)\mathrm{So}_j(c\lambda, \cos v)dv = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3, \ \ldots \ ; \ i \neq j), \\
\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Se}_i(c\lambda, \cos v)\mathrm{So}_j(c\lambda, \cos v)dv = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ \ldots \ ; \ j = 1, 2, 3, \ \ldots).
\end{gathered} \tag{25}$$

Определим также нормировочные коэффициенты $\alpha_j^{(e)} > 0$, $\alpha_j^{(o)} > 0$ согласно

$$\begin{aligned} \alpha_j^{(e)} &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\mathrm{Se}_j(c\lambda, \cos v)]^2 dv \qquad (j = 0, 1, 2, \ \ldots), \\ \alpha_j^{(o)} &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\mathrm{So}_j(c\lambda, \cos v)]^2 dv \qquad (j = 1, 2, \ \ldots). \end{aligned} \tag{26}$$

Система «угловых» функций Матье $\mathrm{Se}_0(c\lambda, \cos v)$, $\mathrm{Se}_m(c\lambda, \cos v)$, $\mathrm{So}_m(c\lambda, \cos v)$ $(m = 1, 2, 3, \ \ldots)$ ортогональна и полна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Это означает, что любая 2π-периодическая функция $f(v)$, обладающая кусочно-непрерывной производной, представляется на отрезке $[-\pi, \pi]$ сходящимся рядом Фурье по «угловым» гармоникам Матье:

$$f(v) = A_0 \mathrm{Se}_0(c\lambda, \cos v) + \sum_{m=1}^{+\infty} [(A_m^{(e)} \mathrm{Se}_m(c\lambda, \cos v) + A_m^{(o)} \mathrm{So}_m(c\lambda, \cos v)]. \tag{27}$$

Коэффициенты $A_0^{(e)}$, $A_m^{(e)}$, $A_m^{(o)}$ $(m = 1, 2, 3, \ \ldots)$ в разложении (27) вычисляются по известным из теории ортогональных разложений формулам

$$\begin{aligned} A_m^{(e)} &= \frac{1}{\alpha_m^{(e)}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(v) \mathrm{Se}_m(c\lambda, \cos v) dv \qquad (m = 0, 1, 2, \ \ldots), \\ A_m^{(o)} &= \frac{1}{\alpha_m^{(o)}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(v) \mathrm{So}_m(c\lambda, \cos v) dv \qquad (m = 1, 2, \ \ldots). \end{aligned} \tag{28}$$

4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ КВАДРАТИЧНО СУММИРУЕМЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ ДВУСТОРОННИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Основные проблемы, связанные с построением периодических решений уравнения Матье (10), заключаются в вычислении собственных значений и определении коэффициентов рядов Фурье (17), (21), представляющих собственные функции. Один из возможных подходов к решению этих задач состоит в следующем. Поскольку π-периодическая функция является также и 2π-периодической, то любое 2π-периодическое решение уравнения Матье можно представить рядом Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$, который удобнее всего взять в комплексной форме:

$$Y(v) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s e^{isv}, \tag{29}$$

где коэффициенты Фурье g_s образуют бесконечную двустороннюю последовательность и вычисляются по формулам Эйлера–Фурье:

$$g_k = \overline{g_{-k}} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} Y(v') e^{-ikv'} dv' \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Коэффициенты Фурье g_s $(s = \ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ есть, вообще говоря, комплексные числа. Однако если $Y(v)$ — четная функция, то все g_s — вещественные числа и $g_k = g_{-k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; если $Y(v)$ — нечетная функция, то все g_s — чисто мнимые числа и $g_k = -g_{-k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Ясно, что во втором случае мнимую единицу можно вынести за знак суммы в (29) и исключить ее из рассмотрения, что никак не повлияет на исследование спектральной задачи для дифференциального оператора Матье.

Таким образом, в дальнейшем, когда это представляется удобным, можно считать что все g_s $(s = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ — *вещественные* числа, подчиненные дополнительным ограничениям:
— «симметрии»

$$g_k = g_{-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{30}$$

для четного периодического решения;
— «антисимметрии»

$$g_k = -g_{-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{31}$$

для нечетного периодического решения.

Подставляя ряд (29) в уравнение Матье (10), получим трехчленную рекуррентную формулу[1]:

$$(s^2 - a)g_s + q(g_{s+2} + g_{s-2}) = 0 \qquad (s = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots), \tag{32}$$

которая допускает следующую компактную и изящную матричную запись:

$$(\mathbf{H} - a\mathbf{I})\mathbf{g} = \mathbf{0}, \tag{33}$$

где $\mathbf{I}$ — бесконечная единичная матрица, $\mathbf{H}$ — бесконечная симметричная вещественная (при вещественном q) пентадиагональная (пятидиагональная) матрица

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \cdots & (-2)^2 & 0 & q & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & (-1)^2 & 0 & q & 0 & \cdots \\ \cdots & q & 0 & 0^2 & 0 & q & \cdots \\ \cdots & 0 & q & 0 & (1)^2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & q & 0 & (2)^2 & \cdots \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$\mathbf{g}$ — бесконечный квадратично суммируемый вектор-столбец

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \vdots \\ g_{-1} \\ g_0 \\ g_1 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Как уже было отмечено, компоненты g_s $(s = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ вектора $\mathbf{g}$ можно считать вещественными.

Бесконечная по всем направлениям матрица $\mathbf{H}$ характеризуется тем, что две ее диагонали, сверху и снизу ближе всего расположенные к главной диагонали, заполнены нулями; следующие по порядку две диагонали, параллельные главной, заполнены элементами q; все остальные наддиагональные и поддиагональные элементы нулевые. Матрица $\mathbf{H}$ имеет в качестве «центрального» элемента единственный нулевой элемент, располагающийся на главной диагонали. Она симметрична не только относительно своей главной диагонали, но и относительно второй диагонали, которая пересекает главную диагональ в том месте, где расположен упомянутый единственный диагональный нулевой элемент. На главной диагонали симметрично относительно нулевого элемента, играющего роль «центра» матрицы $\mathbf{H}$, располагаются в порядке возрастания квадраты натуральных чисел. Структура матрицы чрезвычайно важна для построения оценок ее собственных значений. Более полный учет структуры матрицы приводит к их более точной локализации.

---

[1]Приводимое далее реккурентное уравнение (32) должно решаться с учетом дополнительных ограничений (30), (31). Только в этом случае имеется, по крайней мере, теоретическая возможность последовательно друг за другом вычислить все коэффициенты Фурье g_s $(s = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ «угловой» гармоники Матье исходя из «начального».

Задача (33) — классическая спектральная задача для линейного оператора $\mathbf{H}$ в гильбертовом пространстве бесконечных двусторонних последовательностей $G = \{g_s\}$ $(s = \overline{-\infty, +\infty})$ таких, что они квадратично суммируемы:

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} |g_s|^2 < +\infty,$$

со скалярным произведением (G, C), определяемым согласно

$$(G, C) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s \overline{c_s}.$$

Линейный оператор $\mathbf{H}$, действующий в этом пространстве, симметричен и обратим; обратный оператор вполне непрерывен; спектр оператора $\mathbf{H}$ дискретен; каждое собственное значение задачи (33) некратное; собственные векторы оператора $\mathbf{H}$ образуют базис в рассматриваемом пространстве.

Линейная система алгебраических уравнений (33) имеет нетривиальное решение, только если

$$\det(\mathbf{H} - a\mathbf{I}) = 0. \tag{36}$$

Следовательно, 2π-периодические решения «углового» уравнения Матье (10) существуют только для таких значений a, которые являются собственными значениями матрицы $\mathbf{H}$. Если q вещественно, то $\mathbf{H}$ — вещественная симметричная матрица, собственные значения которой также будут вещественными (и, кроме того, простыми) и их можно упорядочить в порядке возрастания. Более того, как указывалось выше, при выполнении условия $q > 0$ имеем цепочку строгих неравенств:

$$a_0^{(e)} < a_1^{(o)} < a_1^{(e)} < a_2^{(o)} < a_2^{(e)} < a_3^{(o)} < a_3^{(e)} < \cdots . \tag{37}$$

В том исключительном случае, когда $q = 0$, получаем $a_0^{(e)} = 0$, $a_m^{(e)} = a_m^{(o)} = m^2$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Заметим, что собственные векторы $\mathbf{g}$ формируют столбцы ортогональной матрицы $\mathbf{S}$, диагонализирующей матрицу $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{\mathrm{T}},$$

где $\mathbf{D}$ — диагональная матрица. Таким образом, вычисление коэффициентов Фурье g_s в (29) фактически связано с построением ортогональной матрицы $\mathbf{S}$, диагонализирующей матрицу $\mathbf{H}$. Определение собственных значений периодического и полупериодического дифференциальных операторов Матье эквивалентно построению диагональной матрицы $\mathbf{D}$.

Алгебраической проблеме собственных значений посвящена обширная литература (см., например, [14]). Особо следует отметить книгу [15], в которой достаточно полно представлены численные методы нахождения собственных значений матриц и соответствующих им собственных векторов[2]. Более современная проблематика, связанная с теорией матриц, отражена в книгах [16, 17].

5. ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ СПЕКТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА МАТЬЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Если значения q вещественны и положительны, то с помощью несложных рассуждений можно получить оценку снизу для спектрального параметра a, которая выступает в качестве необходимого условия существования 2π-периодического решения «углового» уравнения Матье.

Действительно, прежде всего, как указывалось выше, в случае вещественных q в разложении (29) можно ограничиться *вещественными* коэффициентами Фурье g_s, не забывая при этом о симметричных и антисимметричных ограничениях (30), (31).

Умножая далее рекуррентное уравнение (32) на g_s и совершая достаточно очевидные преобразования, находим

$$(s^2 - a) g_s g_s - q g_s g_s - q g_{s+2} g_{s+2} + q(g_s g_{s+2} + g_s g_{s-2} + g_s g_s + g_{s+2} g_{s+2}) = 0.$$

[2]Кроме того, мы полностью разделяем позицию автора этой книги: «Проблема собственных значений имеет обманчиво простую формулировку, и теоретическое ее обоснование известно уже в течение многих лет; в то же время определение точных решений представляет обширное многообразие нерешенных проблем» [15, с. 16].

Выполняя здесь суммирование по s, приходим к следующему равенству:

$$(s^2 - a - 2q) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s g_s + q \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (g_{s+2} + g_s)^2 = 0,$$

или

$$a + 2q = \frac{\sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty} s^2 g_s^2 + q \sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty} (g_{s+2} + g_s)^2}{\sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty} g_s^2}, \tag{38}$$

откуда при положительных q сразу же следует оценка снизу для спектрального параметра:

$$a \geq -2q. \tag{39}$$

На основании последнего неравенства и (9) можно также заключить, что для спектрального параметра b будет справедлива оценка

$$b \geq 0. \tag{40}$$

Таким образом, упорядоченные по возрастанию собственные значения b_j приводят к неограниченно возрастающей последовательности эллиптических азимутальных чисел (азимутальных чисел Матье), квадраты которых суть собственные значения b_j:

$$\sqrt{b_0} < \sqrt{b_1} < \sqrt{b_2} < \sqrt{b_3} < \cdots . \tag{41}$$

Неравенство (39) показывает, что переход от (7) к «каноническому» уравнению (10) может выводить (и в действительности выводит) спектральный параметр за пределы области положительных значений, что не позволяет вести речь об азимутальных числах, соответствующих «каноническому» спектральному параметру a.

Найденную выше оценку (39) без труда можно даже несколько усилить, по крайней мере, для нечетных 2π-периодических решений уравнения Матье. В этом случае нулевой коэффициент Фурье $g_0 = 0$, и, следовательно, справедливо неравенство

$$\frac{\sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty} s^2 g_s^2}{\sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty} g_s^2} \geq 1,$$

учет которого в уравнении (38) позволяет дать следующую оценку, уточняющую (39):

$$a \geq 1 - 2q. \tag{42}$$

Из полученной оценки, принимая во внимание неравенства (37), заключаем

$$1 - 2q \leq a_1^{(o)} < a_1^{(e)} < a_2^{(o)} < a_2^{(e)} < a_3^{(o)} < a_3^{(e)} < \cdots .$$

Под эту оценку не попадает лишь минимальное собственное значение $a_0^{(e)}$, поскольку ему соответствует четное π-периодическое решение.

Рассмотрим далее уточнение оценки (39) в случае четного периодического решения. Вводя стандартные нормы

$$\|Y\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} Y(v')^2 dv'}, \qquad \|Y'\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} Y'(v')^2 dv'},$$

так что

$$\|Y\|^2 = 2\pi \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s^2, \quad \|Y'\|^2 = 2\pi \sum_{s=-\infty}^{+\infty} s^2 g_s^2,$$

на основании неравенства Виртингера (Wirtinger's inequality) находим $\|Y'\|^2 \geq \|Y\|^2 - 2\pi g_0^2$, т. е.

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} s^2 g_s^2 \geq \sum_{s=-\infty}^{+\infty} g_s^2 - g_0^2. \tag{43}$$

Тогда с помощью (38) и (43) устанавливается следующая оценка:

$$a + 2q \geq 1 - \frac{g_0^2}{\sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty} g_s^2}, \tag{44}$$

где в силу очевидных неравенств

$$0 < \frac{g_0^2}{\sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty} g_s^2} < 1$$

правая часть положительна и строго меньше единицы.

6. ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Оценки собственных значений симметричной матрицы $\mathbf{H}$, спектр которой совпадает со спектром дифференциального уравнения Матье, могут быть получены чисто алгебраическими методами, детальное описание которых дано в [15]. Одна из важнейших задач теории матриц связана с построением оценок собственных чисел матрицы по ее элементам. Обзор алгебраических методов оценки собственных значений матриц и результатов в этой области имеется в [18].

Для этого сначала необходимо разложить матрицу $\mathbf{H}$ на сумму диагональной матрицы

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \cdots & (-2)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & (-1)^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0^2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & (1)^2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & (2)^2 & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{45}$$

и симметричной остаточной матрицы

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \cdots & 0 & 0 & q & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & q & 0 & \cdots \\ \cdots & q & 0 & 0 & 0 & q & \cdots \\ \cdots & 0 & q & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & q & 0 & 0 & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Остаточная матрица $\mathbf{L}$ играет роль «конечного» возмущения, накладываемого на диагональную матрицу $\mathbf{P}$. В сумме диагональная матрица $\mathbf{P}$ и «конечное» возмущение $\mathbf{L}$ дают матрицу $\mathbf{H}$. Важным является то обстоятельство, что пентадиагональная матрица $\mathbf{L}$ симметрична и бистохастична.

Обозначим через h, p и l спектральные параметры матриц $\mathbf{H}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{L}$ соответственно. Следует обратить внимание на то, что $h = a$. Упорядочим собственные значения матриц $\mathbf{H}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{L}$ по возрастанию влево и вправо от «центральных» собственных чисел h_0, $p_0 = 0^2$, l_0 и введем для них соответствующую нумерацию:

$$\ldots, h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1, h_2, \ldots,$$
$$\ldots, (-2)^2, (-1)^2, 0^2, (1)^2, (2)^2, \ldots,$$
$$\ldots, l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2, \ldots.$$

В 1931 г. С. А. Гершгориным (S. A. Gerschgorin) была доказана знаменитая теорема (см., например, [15, 17]), утверждающая, что любое собственное значение a_j произвольной квадратной матрицы $\mathbf{A} = (a_{kj})$ размера $n \times n$ с комплексными элементами располагается, по крайней мере, в одном из замкнутых кругов (кругов Гершгорина) с центрами a_{kk} $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и радиусами (радиусами Гершгорина)

$$d_k = \sum_{j:\, j\neq k} |a_{kj}|,$$

т. е. удовлетворяют, по крайней мере, одному из неравенств

$$|a - a_{kk}| \leq d_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{47}$$

Здесь спектральный параметр a матрицы $\mathbf{A}$ считается комплексной переменной, и речь идет о замкнутых кругах на комплексной плоскости $(\mathrm{Re}\, a, \mathrm{Im}\, a)$.

Величины d_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ представляют собой k-ю усеченную (т. е. за вычетом абсолютного значения диагонального элемента) строчную сумму абсолютных значений элементов матрицы $\mathbf{A}$.

Гершгориным была доказана еще одна теорема, касающаяся распределения собственных значений по кругам (47), из которой вытекает, в частности, следующее заключение: если какой-либо из кругов Гершгорина изолирован от остальных, то он содержит в точности одно собственное значение.

В случае матрицы $\mathbf{L}$ все круги Гершгорина имеют центры в нуле, а все усеченные строчные суммы d_s равны друг другу и равны $2|q|$. Поэтому, на основании теоремы Гершгорина, заключаем, что собственные значения l_s остаточной матрицы $\mathbf{L}$ не могут по абсолютной величине превосходить значения $2q$ $(q > 0)$:

$$|l_s| \leq 2q.$$

Следовательно (см. [15, с. 103]), для собственных чисел матрицы $\mathbf{H}$ будут выполняться оценки

$$|h_s - p_s| \leq 2q \qquad (s = \ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots), \tag{48}$$

устанавливающие двустронние границы, в которых заключаются элементы спектра матрицы $\mathbf{H}$, а именно в случае не слишком больших q (точнее, когда $2q < 1/2$) круги Гершгорина $|h - p_s| \leq 2q$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ изолированы друг от друга; в каждом круге Гершгорина радиуса $2q$ с центром $p_k = p_{-k} = k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$, как следует из второй теоремы Гершгорина, располагаются ровно *два* собственных значения матрицы $\mathbf{H}$; круг Гершгорина радиуса $2q$ с центром $p_0 = 0^2$ содержит единственное собственное значение h_0.

В случае комплексных квадратных матриц размерности, не меньшей чем 2, А. М. Островским (A. M. Ostrowski) в 1937 г. была получена [19] несколько улучшенная, по сравнению с результатом Гершгорина, спектральная оценка: если дана квадратная матрица $\mathbf{A} = (a_{kj})$ размера $n \times n$ $(n \geq 2)$ с комплексными элементами, то собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ расположены в объединении замкнутых областей комплексной плоскости, ограниченных овалами Кассини (ovals of Cassini):

$$|a - a_{kk}||a - a_{jj}| \leq d_k d_j \qquad (k, j = 1, 2, \ \ldots, \ n). \tag{49}$$

Можно показать, что объединение всех замкнутых областей, ограниченных овалами Кассини данной матрицы $\mathbf{A}$, расположено в объединении всех кругов Гершгорина. Именно в этом смысле оценка (49) уточняет оценку (47).

Применим только что сформулированные результаты непосредственно к матрице $\mathbf{H}$. Все собственные значения h_s этой матрицы будут расположены в объединении замкнутых областей

$$|h - h_{ss}||h - h_{jj}| \leq d_k d_j = 4q^2 \qquad (s, j = \ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots). \tag{50}$$

Эти неравенства позволяют сразу же получить более точную оценку снизу для наименьшего спектрального значения h_0 матрицы $\mathbf{H}$, т. е. фактически для $a_0^{(e)}$. Действительно, поскольку в соответствующем круге Гершгорина находится всего одно собственное значение (именно h_0), то для его более точной локализации воспользуемся овалом Кассини:

$$|h||h - 1| = 4q^2. \tag{51}$$

Обозначая через $-d$ $(d > 0)$ координату левой точки пересечения овала (51) с вещественной осью $\operatorname{Im} h = 0$, для определения d можно получить квадратное уравнение:

$$d^2 + d - 4q^2 = 0,$$

из которого находим, что

$$d = \frac{\sqrt{1+16q^2} - 1}{2}.$$

Поэтому минимальное собственное значение матрицы $\mathbf{H}$, а вместе с ним и собственное значение $a_0^{(e)}$, подчиняются следующему ограничению:

$$-\frac{\sqrt{1+16q^2} - 1}{2} < \begin{pmatrix} h_0 \\ a_0^{(e)} \end{pmatrix}. \tag{52}$$

7. «РАДИАЛЬНОЕ» УРАВНЕНИЕ МАТЬЕ

«Радиальное» уравнение Матье (8) в «канонической» форме имеет вид

$$\frac{d^2\mathcal{Y}}{du^2} - (a - 2q \operatorname{ch} u)\mathcal{Y} = 0 \tag{53}$$

и получается из «углового» уравнения (10) в результате замены независимой переменной $v \to iu$. Это обстоятельство иногда считают счастливой случайностью [5]. Поэтому «радиальные» функции Матье без труда строятся исходя из «угловых» гармоник Матье.

Особенно удобными в вычислительном плане оказываются разложения «радиальных» функций Матье в ряд по функциям Бесселя

$$J_n(\rho) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n+2s} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ \ldots). \tag{54}$$

Собственным значениям «углового» уравнения (10) $a_0^{(e)} < a_1^{(e)} < a_2^{(e)} < a_3^{(e)} < \cdots$ отвечают «радиальные» функции Матье, для которых используется обозначение $\operatorname{Re}_m(c\lambda, \xi)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$; они имеют следующие разложения в ряды по функциям Бесселя:

$$\operatorname{Re}_m(c\lambda, \xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n{}' i^{m-n} D_n^m J_n(c\lambda\xi) \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \ \ldots), \tag{55}$$

где $\xi = \operatorname{ch} u$, $i^{m-n} = e^{i(m-n)\pi/2}$.

Собственным значениям $a_1^{(o)} < a_2^{(o)} < a_3^{(o)} < \cdots$ отвечают «радиальные» функции Матье, обозначаемые через $\operatorname{Ro}_m(c\lambda, \xi)$ $(m = 1, 2, \ldots)$:

$$\operatorname{Ro}_m(c\lambda, \xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n{}' i^{n-m} F_n^m J_n(c\lambda\xi) \qquad (m = 1, 2, 3, \ \ldots). \tag{56}$$

Коэффициенты D_n^m в (55) и F_n^m в (56) те же самые, что и в разложениях (17), (21) для «угловых» гармоник Матье.

В результате замены независимой переменной $v \to iu$ из «угловой» гармоники Матье $\operatorname{Se}_m(c\lambda, \cos v)$ может быть получена (с точностью до множителя) «радиальная» функция Матье $\operatorname{Re}_m(c\lambda, \xi)$ $(\xi = \operatorname{ch} u)$:

$$\operatorname{Se}_m(c\lambda, \xi) = \sqrt{2\pi} \beta_m^{(e)} \operatorname{Re}_m(c\lambda, \xi),$$

где поправочные множители $\beta_m^{(e)}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ вычисляются согласно

$$\beta_m^{(e)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_n{}' i^{n-m} \frac{D_n^m}{D_0^m} & (m \text{ четно}), \\ \dfrac{2}{c\lambda\pi} \displaystyle\sum_n{}' n i^{n-m} \frac{D_n^m}{D_1^m} & (m \text{ нечетно}). \end{cases}$$

Совершенно аналогично находим ($m = 1, 2, \ldots$)

$$i\mathrm{So}_m(c\lambda, \xi) = \sqrt{2\pi}\beta_m^{(o)}\mathrm{Ro}_m(c\lambda, \xi),$$

где

$$\beta_m^{(o)} = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi c^2\lambda^2}\sum_n{}' n\dfrac{F_n^m}{F_2^m}i^{n-m} & (m \text{ четно}), \\ \dfrac{2}{c\lambda\pi}\sum_n{}' \dfrac{F_n^m}{F_1^m}i^{n-m} & (m \text{ нечетно}). \end{cases}$$

8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Заметим, что 2π-периодические функции Матье, как правило, встроены в системы символьных вычислений, подобные Maple и Mathematica. Однако они вызываются black-box командами, не позволяющими понять, как они в действительности работают. Ясно, что предлагаемый подход к построению периодических решений «углового» уравнения Матье (10) и вычислению спектральных значений (азимутальных чисел эллипса) сравнительно легко программируется практически в любой современной вычислительной среде. Дополнительным преимуществом выступает также то, что обсуждаемый метод построения периодических функций Матье не приводит к накоплению вычислительных погрешностей, поскольку он основывается на алгоритме диагонализации симметричной матрицы $\mathbf{H}$ и представлении функций Матье рядами Фурье, коэффициенты которых формируют вектор-столбцы диагонализирующей матрицы $\mathbf{S}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00184-а).

Библиографический список

1. *Mathieu E.* Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique // J. des Mathématiques Pures et Appliquées. 1868. Vol. 13. P. 137–203.

2. *Радаев Ю. Н., Таранова М. В.* Связанное волновое термоупругое поле в длинном волноводе эллиптического поперечного сечения // Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2011. № 1(9). С. 183–196.

3. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

4. *Стретт М. Д. О.* Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков; Киев : Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1935. 240 с.

5. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложения функций Матье. М. : Изд-во иностр. лит., 1953. 476 с.

6. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : в 2 т. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. Т. 1. 348 с.

7. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Изд-во иностр. лит., 1958. 476 с.

8. *Arscott F. M.* Periodic differential equations: An introduction to Mathieu, Lamé, and allied functions. Oxford; Frankfurt : Pergamon Press, 1964. X+284 p.

9. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М. : Наука, 1979. 832 с.

10. *Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т.* Функции математической физики : справочное руководство. М. : Физматгиз, 1963. 104 с.

11. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Гостехтеоретиздат, 1954. 352 с.

12. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. Киев : Наук. думка, 1972. 220 с.

13. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М. : Наука, 1988. 432 с.

14. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М. : Гостехтеоретиздат, 1953. 492 с.

15. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М. : Наука, 1970. 564 с.

16. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М. : Наука, 1969. 368 с.

17. *Ланкастер П.* Теория матриц. М. : Наука, 1978. 280 с.

18. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М. : Наука, 1972. 232 с.

19. *Ostrowski A. M.* Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale // Commentarii Mathematici Helvetici. 1937. Vol. 10. P. 69–96.