Б. Ёрикке, О множествах пика для гельдеровских классов (опровержение гипотезы Е. М. Дынькина),
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1987, том 157, 45–54

Б.Ёрикке

О МНОЖЕСТВАХ ПИКА ДЛЯ ГЁЛЬДЕРОВСКИХ КЛАССОВ (ОПРОВЕРЖЕНИЕ ГИПОТЕЗЫ Е.М.ДЫНЬКИНА)

Гёльдеровский класс A_α, $0<\alpha\le 1$, состоит из всех функций f, аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ и непрерывных в его замыкании $\operatorname{clos}\mathbb{D}$, для которых

$$|f(z_1)-f(z_2)|\le const\,|z_1-z_2|^\alpha, \quad z_1,z_2\in \operatorname{clos}\mathbb{D}.$$

Замкнутое множество $E\subset\mathbb{T}$ ($\mathbb{T}$ - единичная окружность) называется множеством пика для A_α, если существует функция f, $f\in A_\alpha$ такая, что $|f|<1$ на $\mathbb{T}\setminus E$ и $f|E\equiv 1$ (f - так называемая функция пика). Проблеме описания множеств пика классов A_α $(0<\alpha<1)$ посвящен ряд работ (вот некоторые из них: [1], [2], [3], [5], [7]). Эта проблема интересна также в связи с задачей описания сингулярного спектра (одномерной) модели Фридрихса ([3], [2], [4]). Е.М.Дынькин заметил, что любое множество неединственности для класса Жеврея G_α (по поводу определения этого класса и полного описания множеств единственности для него см. [6]) является множеством пика для класса A_α и выдвинул гипотезу, что этими множествами исчерпывается весь класс $\mathcal{P}_\alpha$ множеств пика для A_α $(0<\alpha<1)$ (см. [1]). В частности, предполагалось, что $\operatorname{dist}(\cdot,E)^{-\alpha}\in L^1(\mathbb{T})$ для любого $E\in\mathcal{P}_\alpha$. ($\operatorname{dist}(\cdot,E)$ обозначает функцию расстояния от точки до множества E). С помощью стандартных оценок для преобразования Гильберта (см. [1], [3], [5]) получается лишь неравенство слабого типа для функции $\operatorname{dist}(\cdot,E)^{-\alpha}$ $(E\in\mathcal{P}_\alpha)$:

$$m\{\zeta\in\mathbb{T}:\operatorname{dist}(\zeta,E)\le\delta\}=O(\delta^\alpha), \quad \delta\to+0.$$

(m - мера Лебега на $\mathbb{T}$). Мы докажем, что на самом деле, включение $E\in\mathcal{P}_\alpha$ не влечет суммируемость функции $\operatorname{dist}(\cdot,E)^{-\alpha}$.

ТЕОРЕМА. При любом $\alpha\in(0,1)$ существует множество $E\in\mathcal{P}_\alpha$, для которого $\operatorname{dist}(\cdot,E)^{\alpha}\notin L^1(\mathbb{T})$.

Тем самым множество $\mathcal{P}_\alpha$ существенно шире класса множеств неединственности для G_α. Проблема полного описания множеств из $\mathcal{P}_\alpha$ (при $0<\alpha<1$) остается открытой.

Построение множества $E\in\mathcal{P}_\alpha$ с $\operatorname{dist}(\cdot,E)^{-\alpha}\notin L^1(\mathbb{T})$. Фиксируем произвольное число $\alpha\in(0,1)$. Легко видеть, что достаточно построить замкнутое множество E , $E\subset(-\pi,\pi)$, такое что $\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{dist}(x,E)^{-\alpha}dx=\infty$, и неотрицательную функцию $\mathcal{F}\in L^1((-\pi,\pi))$, $\mathcal{F}\in C^2((-\pi,\pi)\setminus E)$, $\operatorname{supp}\mathcal{F}\subset(-\pi,\pi)$, такую что при некотором $\varepsilon>0$ справедливы оценки

$$|\mathcal{F}(x)+i\tilde{\mathcal{F}}(x)|\geq c\operatorname{dist}(x,E)^{-\alpha}\qquad\text{для } 0<\operatorname{dist}(x,E)<\varepsilon,\qquad(\mathrm{I})$$

$$\frac{|\mathcal{F}'(x)+i\tilde{\mathcal{F}}'(x)|}{|\mathcal{F}(x)+i\tilde{\mathcal{F}}(x)|^2}\leq C\operatorname{dist}(x,E)^{\alpha-1}\qquad\text{для } 0<\operatorname{dist}(x,E)<\varepsilon.\qquad(2)$$

(Из условий автоматически вытекает, что $\tilde{\mathcal{F}}$ дифференцируема на множестве $(-\pi,\pi)\setminus E$). Здесь отрезок $[-\pi,\pi)$ отождествляется с окружностью $\mathbb{T}$ с помощью отображения $\varphi\longrightarrow e^{i\varphi}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$ означает сопряженную с $\mathcal{F}$ функцию,

$$\tilde{\mathcal{F}}(x)=-\frac{1}{\pi}\ \text{v.p.}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathcal{F}(t)\,dt}{2\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}}\ .$$

Убедимся в том, что такое множество E принадлежит $\mathcal{P}_\alpha$. Действительно, функция $f^*(e^{ix})=\mathcal{F}(x)+i\tilde{\mathcal{F}}(x)\ (x\in[-\pi,\pi))$ является граничным значением аналитической в $\mathbb{D}$ функции f с положительной вещественной частью. Поэтому функция $\frac{1}{f+1}$ аналитична в $\mathbb{D}$ и $\operatorname{Re}\frac{1}{1+f}>0$ в $\mathbb{D}$. Ясно, что $\frac{1}{1+f}$ ограничена в $\mathbb{D}$. Оценки (I) и (2) показывают, что эта функция продолжается в $\operatorname{clos}\mathbb{D}$ до функции g класса A_α , обращающейся в нуль ровно на E . (Действительно, проверить нужно лишь, что

$$\left|\frac{1}{1+f^*(e^{ix_1})}-\frac{1}{1+f^*(e^{ix_2})}\right|\leq\mathrm{const}\,|e^{ix_1}-e^{ix_2}|^\alpha\quad(x_1,x_2\in[-\pi,\pi)).$$

Когда x_1 и x_2 принадлежат различным интервалам открытого множества $(-\pi,\pi)\setminus E$, это вытекает сразу из (I). Интегрирование оценки (2) дает нужное неравенство, когда x_1,x_2 принадлежат одному и тому же интервалу. В качестве функции пика можно взять функцию $\frac{1-g}{1+g}$.

Построим теперь множество E и функцию $\mathcal{F}$. Множество E будет состоять из возрастающей последовательности точек $\Gamma\subset(-\pi,0)$ и ее предела 0. Положим $\mathcal{F}=\mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_-$, где $\mathcal{F}_+\stackrel{\text{def}}{=}\mathcal{F}\chi_{[0,\pi)}$, $\mathcal{F}_-\stackrel{\text{def}}{=}\mathcal{F}\chi_{[-\pi,0)}$ (χ_A - характеристическая функция множества A) В качестве $\mathcal{F}_+$ берем функцию, равную нулю на $[-\pi,0)$, совпадающую с функцией $t\longmapsto\dfrac{1}{t\log\frac{1}{t}\left(\log\log\frac{1}{t}\right)^{1+\beta}}$ при малых положительных t (здесь $\beta\in(0,1)$ - произвольное число), а вне некоторой окрестности нуля $\mathcal{F}_+$ гладко падает к нулю. Заметим, что $\mathcal{F}_+\in L^1([-\pi,\pi))$. Следующая лемма показывает, что $\widetilde{\mathcal{F}}_+\notin L_1([-\pi,\pi))$.

ЛЕММА I. При $x<0$, x близким к нулю имеет место оценка

$$|\widetilde{\mathcal{F}}_+(x)|\asymp\frac{1}{|x|(\log\log\frac{1}{|x|})^{\beta}}.$$

(Здесь,как обычно, знак $\asymp$ означает, что отношение выражений, стоящих справа и слева, заключено между двумя положительными постоянными.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $x<0$ имеем $\widetilde{\mathcal{F}}_+(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathcal{F}(t)\,dt}{2\operatorname{tg}\frac{t+|x|}{2}}=$ $=-\frac{1}{\pi}\int_0^{|x|}-\frac{1}{\pi}\int_{|x|}^{\pi}\stackrel{def}{=}-(I_1(x)+I_2(x))$, $I_1>0$, $I_2>0$. При малых $|x|$, $x<0$, справедливо соотношение

$$I_1(x)\asymp\frac{const}{|x|}\int_0^{|x|}\frac{dt}{t\log\frac{1}{t}(\log\log\frac{1}{t})^{\beta}}=\frac{const}{|x|(\log\log\frac{1}{|x|})^{\beta}}.$$

Нетрудно видеть, что при малых $|x|$, $x<0$, $I_2(x)\leqslant const\, I_1(x)$. ●

Построение множества E и функции $\mathcal{F}$ теперь осуществляется по следующей схеме. Для натурального k обозначим промежуток $[-2^{-k},-2^{-k-1}]$ символом I_k. Для $k\geqslant k_0$ (k_0 - фиксированное, достаточно большое число) пусть Γ_k - множество, состоящее из n_k равноотстоящих друг от друга точек, делящих I_k на n_k интервалов равной длины $\ell_k\stackrel{def}{=}\frac{2^{-k-1}}{n_k}$, т.е. $\Gamma_k=\{-2^{-k}+s\ell_k\}_{s=0,1,\dots,n_k-1}$. Положим теперь $\Gamma\stackrel{def}{=}\bigcup_{k=k_0}^{\infty}\Gamma_k$, $E\stackrel{def}{=}\Gamma\cup\{0\}$. Числа n_k выберем столь быстро стремящимися к бесконечности, что $\int_{-\pi}^{0}dist(x,E)^{-\alpha}dx=-\infty$ (или, что то же самое, $\sum\ell^{1-\alpha}=\infty$, где сумма берется по длинам ℓ всех составляющих интервалов открытого множества $(-\pi,0)\setminus E$). С другой стороны, если n_k растут не слишком быстро, то на "большой части" Ω промежутка $(-\pi,0)$ (а именно во всех точках,"не слишком близких к E ") выполнено неравенство $|\widetilde{\mathcal{F}}_+(x)|\geqslant c\,dist(x,E)^{-\alpha}$. Интеграл $\int_{-\pi}^{0}\widetilde{\mathcal{F}}_+$ расходится, на этом основана надежда, что можно выбирать n_k такими, что $\int_{-\pi}^{0}dist(x,E)^{-\alpha}dx=\infty$, но Ω столь большое, что $\int_{(-\pi,0)\setminus\Omega}dist(x,E)^{-\alpha}dx<\infty$. Теперь $\mathcal{F}_-$ полагается равной $\nu\,dist(x,E)^{-\alpha}$ в точках $x\in(-\pi,0)\setminus\Omega$, т.е. в точках, очень близких к Γ ($\nu>0$ – подходящая постоянная) и гладко падающей к нулю при удалении от множества Γ , так чтобы неравенство $|\mathcal{F}_-(x)+i\tilde{\mathcal{F}}_+(x)|\geqslant const\ dist(x,E)^{-\alpha}$ было выполнено везде на $(-\pi,0)$. Тогда $\int \mathcal{F}_- < \infty$. Остается следить за тем, чтобы на Ω выполнялось неравенство $|\tilde{\mathcal{F}}_-|\leqslant \frac{1}{2}|\tilde{\mathcal{F}}_+|$, и также за выполнением оценки (2).

Выбор n_k и построение $\mathcal{F}_-$. Заметим, что $\tilde{\mathcal{F}}_+(x)\asymp\frac{1}{2^{-k}(\log k)^{\beta}}$ для $x\in I_k\,(k\geqslant k_0)$. Положим

$$\rho_k=(2^{-k}(\log k)^{\beta})^{1/\alpha}. \tag{3}$$

Если ℓ_k существенно больше ρ_k , то $|\tilde{\mathcal{F}}_+(x)|\geqslant c_1\, dist(x,E)^{-\alpha}$ на большой части Ω_k промежутка $\tilde{I}_k \overset{def}{=} (-2^{-k}-\ell_k,-2^{-k-1})\supset I_k$, $\Omega_k \overset{def}{=} \{x:\rho_k< dist(x,\Gamma_k)<\ell_k\}$. Положим теперь

$$n_k=\left[\frac{2^{-k-1}}{(2^{-k}(\log k)^{\beta}k)^{1/\alpha}}\right] \tag{4}$$

($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x .) Тогда

$$\ell_k\asymp(2^{-k}(\log k)^{\beta}k)^{1/\alpha} \tag{5}$$

существенно больше, чем ρ_k .

ЛЕММА 2. $\int_{-\pi}^{\pi} dist(x,E)^{-\alpha}dx=\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\int_{-\pi}^{\pi} dist(x,E)^{-\alpha}dx = const\sum_{k\geqslant k_0} n_k\ell_k^{1-\alpha}+const\asymp$

$$\asymp\left\{\sum_{k\geqslant k_0}\frac{2^{-k}}{(2^{-k}(\log k)^{\beta}k)^{1/\alpha}}\cdot(2^{-k}(\log k)^{\beta}k)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}+1\right\}=$$

$$=1+\sum_{k\geqslant k_0}\frac{1}{k(\log k)^{\beta}}=\infty .$$

(Напомним, что $\beta\in(0,1)$). ●

Построим теперь $\mathcal{F}_-$. Пусть $p\in\Gamma_k$. Через $\mathcal{F}_p$ обозначим неотрицательную функцию, равную $\frac{1}{|x-p|^{\alpha}}$ при $|x-p|\leqslant\rho_k$, равную нулю при $|x-p|\geqslant 2\rho_k$, которая на множестве $\rho_k<|x-p|<2\rho_k$ гладко падает к нулю так, чтобы везде выполнялись неравенства

$$|\mathcal{F}_p(x)|\leqslant\frac{const}{|x-p|^{\alpha}} \tag{6a}$$

$$|\mathcal{F}_p'(x)| \leqslant \frac{const}{|x-p|^{\alpha+1}} \tag{6в}$$

$$|\mathcal{F}_p''(x)| \leqslant \frac{const}{|x-p|^{\alpha+2}} \tag{6с}$$

($const$ здесь не зависит от p и k). Легко видеть, что такие функции $\mathcal{F}_p$ можно строить при любом $p \in \Gamma$. Положим $\mathcal{F}_- \overset{def}{=} \sum_{k \geqslant k_0} \sum_{p \in \Gamma_k} \nu \mathcal{F}_p$, где $\nu > 0$ – подходящая постоянная, которую мы выберем позже.

ЛЕММА 3. $\int\limits_{-\pi}^{0} \mathcal{F}_- < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\int\limits_{-\pi}^{0} \mathcal{F}_- = \sum\limits_{k \geqslant k_0} \sum\limits_{p \in \Gamma_k} \nu \int \mathcal{F}_p =$

$$= \nu \sum_{k \geqslant k_0} n_k \int \mathcal{F}_{-2^{-k-1}} \asymp \sum_{k \geqslant k_0} n_k \rho_k^{1-\alpha} \asymp$$

$$\asymp \sum_{k \geqslant k_0} \frac{2^{-k}}{(2^{-k}(\log k)^\beta k)^{1/\alpha}} \cdot \left(2^{-k}(\log k)^\beta\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = \sum_{k \geqslant k_0} \frac{1}{k^{1/\alpha}(\log k)^\beta} < \infty .$$

(Мы использовали то, что $\alpha < 1$). ●

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОЦЕНКИ (I). Ясно, что при $x > 0$ оценка (I) выполнена. При $x \in (-2^{-k_0} - \ell_{k_0}, 0) \setminus E$ мы докажем более сильную оценку

$$|\mathcal{F}(x) + i\widetilde{\mathcal{F}}(x)| \geqslant C_1\left(dist(x,E)^{-\alpha} + |x|^{-1}\left(\log\log\frac{1}{|x|}\right)^{-\beta}\right), \tag{7}$$

которая нам потребуется для доказательства неравенства (2). Рассмотрим сначала случай, когда $|x-p| \leqslant \rho_k$ для некоторого $p \in \Gamma_k$, $k \geqslant k_0$. Для таких x оценка (7) легко вытекает из следующей цепочки неравенств: $\mathcal{F}_p(x) = \frac{\nu}{|x-p|^\alpha} = \frac{\nu}{dist(x,E)^\alpha} \geqslant \nu \rho_k^{-\alpha} = \frac{\nu}{2^{-k}(\log k)^\beta} \geqslant$

$\geqslant \nu\, const\, |x|^{-1}\left(\log\log\frac{1}{|x|}\right)^{-\beta}$ для $x < 0$, $|x| \asymp 2^{-k}$, $|x-p| \leqslant \rho_k$.

Пусть, наоборот, $x \in \Omega \overset{def}{=} \bigcup\limits_{k \geqslant k_0} \Omega_k$. Тогда

$$\widetilde{\mathcal{F}}(x) = -\frac{1}{\pi} v.p.\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathcal{F}(t)}{2tg\frac{t-x}{2}}dt = -\frac{\nu}{\pi} \sum_{p:\, x \in supp \mathcal{F}_p} v.p.\int \frac{\mathcal{F}_p(t)}{2tg\frac{t-x}{2}}dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int \frac{\sum\limits_{p > x,\, x \notin supp \mathcal{F}_p} \nu\mathcal{F}_p(t) + \mathcal{F}_+(t)}{2tg\frac{t-x}{2}}dt - \frac{\nu}{\pi}\int \frac{\sum\limits_{p < x,\, x \notin supp \mathcal{F}_p} \mathcal{F}_p(t)}{2tg\frac{t-x}{2}}dt =$$

$$\stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathcal{J}_1(x) + \mathcal{J}_2(x) + \mathcal{J}_3(x).$$

Из построения функции $\mathcal{F}_p$ и оценки (6в) легко получается, что $|\mathcal{J}_1(x)| \leq \frac{\nu\, const}{|x-p|^\alpha}$ (где $const$ не зависит от ν, x и p).

Неравенство для $\mathcal{J}_2$, $|\mathcal{J}_2(x)| \geq \frac{const}{|x|(\log\log\frac{1}{|x|})^\beta} \geq const\,|\widetilde{\mathcal{F}}_+(x)|$, легко вытекает из леммы I, положительности функций $\mathcal{F}_p (p\in\Gamma)$ и $\mathcal{F}_+$, а также положительности функции $2\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}$ в случае $t>x$, $t-x$ мало. Оценку выражения $\mathcal{J}_3$ дает следующая

ЛЕММА 4. Если $x\in\Omega_k = \{x<0,\ \rho_k < dist(x,E) < \ell_k\}$, то

$$0 < \frac{1}{\nu}\mathcal{J}_3(x) = \frac{1}{\pi}\int \frac{\sum_{p<x,\, x\notin supp\,\mathcal{F}_p} \mathcal{F}_p(t)}{-2\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}}\,dt \leq \frac{const}{\rho_k^\alpha}.$$

Здесь $const$ не зависит от ν и x.

С помощью леммы 4 теперь легко закончить доказательство неравенства (7). Действительно, неравенство $dist(x,E)^{-\alpha} \leq \rho_k^{-\alpha} \leq \leq \frac{1}{c_1}|\widetilde{\mathcal{F}}_+(x)|$, выполненное для $x\in\Omega_k$, и оценки для $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ позволяют выбрать положительную постоянную ν так, чтобы при всех $x\in\Omega$ выполнялось неравенство

$$|\widetilde{\mathcal{F}}(x)| \geq \frac{1}{2}|\widetilde{\mathcal{F}}_+(x)| \geq const\,\frac{1}{|x|(\log\log\frac{1}{|x|})^\beta}. \quad \bullet$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Оценку достаточно проводить для $k\geq 2k_0$. Имеем

$$\frac{1}{\nu}\mathcal{J}_3(x) = \sum_{k_0\leq j\leq k-2}\int \frac{\sum_{p\in\Gamma_j}\mathcal{F}_p(t)}{-2\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}}\,dt +$$

$$+\int \frac{\sum_{p\in\Gamma_k\cup\Gamma_{k-1},\, p<x,\, x\notin supp\,\mathcal{F}_p}\mathcal{F}_p(t)}{-2\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}}\,dt = A_1(x) + A_2(x).$$

Оценим отдельно A_1 и A_2.

$$A_1(x) \leq const \sum_{k_0\leq j\leq k-2}\frac{n_j\rho_j^{1-\alpha}}{2^{-j}} \leq const \sum_{k_0\leq j\leq k-2}\frac{2^{-j-1}(2^{-j}(\log j)^\beta)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(2^{-j}(\log j)^\beta_j)^{\frac{1}{\alpha}}\,2^{-j}} =$$

$$= const \sum_{k_0\leq j\leq k-2}\frac{2^j}{j^{1/\alpha}(\log j)^\beta} = const\Big(\sum_{k_0\leq j\leq\frac{k}{2}} + \sum_{\frac{k}{2}<j\leq k-2}\Big) \leq$$

$$\leqslant const\left(2^{\frac{k}{2}}\sum_{k_0\leqslant j}\frac{1}{j^{1/\alpha}(\log j)^{\beta}}+2^{k-2}\sum_{\frac{k}{2}<j\leqslant k-2}\frac{1}{j^{1/\alpha}(\log j)^{\beta}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant const\,\frac{2^k}{k^{\frac{1}{\alpha}-1}(\log k)^{\beta}}<const\,\frac{1}{\rho_k^{\alpha}}\quad.$$

В последнем неравенстве использована формула (3), в предпоследнем сумма $\sum\limits_{k_0\leqslant j}$ (сходящегося ряда) оценена через постоянную, а выражение $\sum\limits_{\frac{k}{2}<j<k-2}\frac{1}{j^{1/\alpha}(\log j)^{\beta}}$ оценено через $const\,\frac{k}{k^{\frac{1}{\alpha}}(\log k)^{\beta}}$.

Далее,

$$A_2(x)\leqslant const\left\{\rho_k^{1-\alpha}\left(\sum_{m=1}^{n_k}\frac{1}{m\ell_k}\right)+\rho_{k-1}^{1-\alpha}\left(\sum_{m=1}^{n_{k-1}}\frac{1}{m\ell_{k-1}}\right)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant const\left(\frac{\rho_k^{1-\alpha}}{\ell_k}\log n_k+\frac{\rho_{k-1}^{1-\alpha}}{\ell_{k-1}}\log n_{k-1}\right)\leqslant$$

$$\leqslant const\left(\frac{1}{\rho_k^{\alpha}}\,\frac{\rho_k}{\ell_k}\log k+\frac{1}{\rho_{k-1}^{\alpha}}\,\frac{\rho_{k-1}}{\ell_{k-1}}\log k\right)\leqslant const\,\frac{1}{\rho_k^{\alpha}}\quad.$$

(Мы использовали (3), (4), (5).). ●

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОЦЕНКИ (2). Для малых $x>0$ имеем

$$\frac{|\mathcal{F}'(x)+i\widetilde{\mathcal{F}}'(x)|}{|\mathcal{F}(x)+i\widetilde{\mathcal{F}}(x)|^2}\leqslant\frac{|\mathcal{F}'(x)|}{|\mathcal{F}(x)|^2}+\frac{|\widetilde{\mathcal{F}}'(x)|}{|\mathcal{F}(x)|^2}=\mathcal{J}_1(x)+\mathcal{J}_2(x).$$

При малых $x>0$

$$|\mathcal{F}'(x)|\leqslant\frac{const}{x^2\log\frac{1}{x}\left(\log\log\frac{1}{x}\right)^{1+\beta}}\quad. \tag{8}$$

Поэтому

$$\mathcal{J}_1(x)=x^2\left(\log\frac{1}{x}\left(\log\log\frac{1}{x}\right)^{1+\beta}\right)^2\cdot|\mathcal{F}'(x)|\leqslant$$

$$\leqslant const\,\log\frac{1}{x}\left(\log\log\frac{1}{x}\right)^{1+\beta}=O(x^{\alpha-1}).$$

Нужная оценка для $\mathcal{J}_2(x)$ вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 5. При малых $x>0$ справедлива оценка

$$\tilde{\mathcal{F}}'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\tilde{\mathcal{F}}_-'(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} \mathcal{F}_-(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}}\right)dt =$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{\mathcal{F}_-(t)}{4\sin^2\frac{t-x}{2}}\,dt = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$ (Мы воспользовались суммируемостью функции $\mathcal{F}_-$.)

Для оценки $\tilde{\mathcal{F}}_+'$ (x - малое положительное число) мы возьмем функцию $\Phi \in C_0^\infty(\{|t| < \frac{1}{2}\})$, равную единице в интервале $\{|t| < \frac{1}{4}\}$, и положим $\mathcal{F}_+(t) = \mathcal{F}_+(t)\,\Phi\left(1 - \frac{t}{|x|}\right) + \mathcal{F}_+(t)\left(1 - \Phi\left(1 - \frac{t}{x}\right)\right) \overset{def}{=} \mathcal{F}_1(t) + \mathcal{F}_2(t)$. Для t близких к x имеем

$$\tilde{\mathcal{F}}_2'(t) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|s-x|>\frac{x}{4}}\frac{\mathcal{F}_+(s)\left(1-\Phi\left(1-\frac{s}{x}\right)\right)}{4\sin^2\frac{s-t}{2}}\,ds = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Для таких же t имеем

$$\tilde{\mathcal{F}}_1'(t) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\int\limits_{|s-x|<\frac{x}{2}}\frac{\mathcal{F}_1'(x)}{2\operatorname{tg}\frac{s-t}{2}}\,ds.$$

Учитывая оценку (8), а также неравенство

$$|\mathcal{F}_+''(x)| \leqslant \frac{const}{x^3\log\frac{1}{x}\left(\log\log\frac{1}{x}\right)^{1+\beta}}, \tag{9}$$

справедливое для малых положительных x, мы получаем такие же оценки (только с другими постоянными) для функций $\mathcal{F}_1'(s)$ и $\mathcal{F}_1''(s)$ при условии $|s-x| < \frac{x}{2}$. Поэтому

$$|\tilde{\mathcal{F}}_1'(t)| \leqslant const\int\limits_{|s'|<\frac{1}{2}x}\frac{s'}{x^3\log\frac{1}{x}\left(\log\log\frac{1}{x}\right)^{1+\beta}s'}\,ds' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{const}{x^2\log\frac{1}{x}\left(\log\log\frac{1}{x}\right)^{1+\beta}} = O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

при малом $x > 0$ и t близких к x. ●

Оценка (2) доказана для $x > 0$. Пусть теперь $x < 0$. Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 6. При любом $p \in \Gamma$ и любом $x < 0$ имеет место оценка

$|\tilde{\mathcal{F}}_p'(x)| \leqslant \dfrac{const}{|x-p|^{1+\alpha}}$ с постоянной $const$, не зависящей от x и p.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО использует неравенства (6) и проводится по той же схеме что и вывод оценки $\tilde{\mathcal{F}}_+'(x)$ при малых $x>0$. Мы его опускаем.

ЛЕММА 7. Для $x<0$, $x\notin E$, выполнена оценка

$$\tilde{\mathcal{F}}_-'(x) = O(dist(x,E)^{-1-\alpha}) + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x\in I_k$, $k\geqslant k_0$. Тогда

$$\tilde{\mathcal{F}}_-'(x) = \sum_{p\in\Gamma:|p-x|\leqslant C\ell_k} \nu\tilde{\mathcal{F}}_p'(x) - \frac{\nu}{\pi}\sum_{p\in\bigcup_{j\geqslant k_0,|k-j|>1}\Gamma_j}\int\frac{\mathcal{F}_p(t)}{4\sin^2\frac{t-x}{2}}\,dt -$$

$$-\frac{\nu}{\pi}\sum_{p\in\bigcup_{j\geqslant k_0,|j-k|\leqslant 1}\Gamma_j,|p-x|>C\ell_k}\int\frac{\mathcal{F}_p(t)}{4\sin^2\frac{t-x}{2}}\,dt \stackrel{def}{=}$$

$=\Sigma_1(x)+\Sigma_2(x)+\Sigma_3(x)$. Учитывая, что

$$\frac{\ell_k}{\ell_{k+1}}\longrightarrow 2^{\frac{1}{\alpha}},\quad \frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}\longrightarrow 2^{\frac{1}{\alpha}}\quad (k\geqslant k_0,\ k\longrightarrow\infty), \tag{10}$$

мы в силу предыдущей леммы получаем $|\Sigma_1(x)|\leqslant const\, dist(x,E)^{-1-\alpha}$. Вторая сумма $\Sigma_2(x)$ оценивается грубо:

$$|\Sigma_2(x)|\leqslant const\,\frac{\int \mathcal{F}_-(t)\,dt}{dist(x,\bigcup_{j\geqslant k_0,|j-k|>1} I_j)^2}\leqslant\frac{const}{x^2}.$$

Наконец, $|\Sigma_3(x)|\leqslant const\,\dfrac{\rho_k^{1-\alpha}}{\ell_k^2}$. Действительно,

$$|\Sigma_3(x)|\leqslant const\sum_{\substack{p\in\bigcup_{j\geqslant k_0,|j-k|\leqslant 1}\Gamma_j,\\ |p-x|>C\ell_k}}\frac{\int\mathcal{F}_p}{(p-x)^2}\leqslant$$

$$\leqslant const\,\rho_k^{1-\alpha}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\ell_k^2 j^2} = const\,\frac{\rho_k^{1-\alpha}}{\ell_k^2}.$$

Мы опять учитывали (10). Остается заметить, что $\rho_k\leqslant\ell_k$, и поэтому $\dfrac{\rho_k^{1-\alpha}}{\ell_k^2}\leqslant\dfrac{1}{\ell_k^{1+\alpha}}\leqslant const\,dist(x,E)^{-1-\alpha}$ для $x\in I_k$. Для $x<-2^{-k_0}$ оценка получается аналогично. Лемма доказана. ●

Неравенство (2) для $x<0$ теперь вытекает из леммы 7, оценок (6в) и (7) и неравенства

$$|\tilde{\mathcal{F}}_+'(x)| \leq const \frac{\int \mathcal{F}_+}{x^2} \qquad (x<0\ ,\ |x|\ \text{мало}).$$

Теорема доказана. ●

Литература

1. Д ы н ь к и н Е.М. Множества пика для класса Липшица. – В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа. – Зап. научн.семин.ЛОМИ, т.81, с.249-251.
2. П а в л о в Б.С., Ф а д д е е в Л.Д. Множества корней операторнозначных функций с положительной мнимой частью. – там же, с.85-88.
3. П а в л о в Б.С. Теоремы единственности для функций с положительной мнимой частью. – Проблемы матем. физики. Изд-во ЛГУ, 1970, № 4, с.118-125.
4. Ф а д д е е в Л.Д. О модели Фридрихса в теории возмущений. – Труды Матем. ин-та АН СССР им.В.А.Стеклова, 1964, т.30, с.33-75.
5. H u t t H. Some results on peak and interpolation sets of analytic functions with higher regularity. – Uppsala Univ.Dep. Math., Thesis, 1976.
6. H r u š č e v S.V. Sets of uniqueness for the Gevrey classes. – Ark.För Mat., 1977, v.15, N 2, p.256-304.
7. B r u n a J. On the peak sets for holomorphic Lipschitz functions. – Indiana Univ.Math.J., 1983, v.32, N 2, p.257-272.

B.Jöricke. On peak sets for Hölder classes (a counterexample to E.M.Dyn'kin's conjecture).

Summary

We construct a peak set $E\subset\mathbb{T}$ for the analytic Hölder class $A_\alpha\ (0<\alpha<1)$ such that $dist(\cdot\,,E)^{-\alpha}\notin L^1(\mathbb{T})$.