

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Л. Гуревич, О. М. Киселев, Струйное обтекание
мягкой оболочки,
Тр. сем. по краев. задачам, 1987, выпуск 23, 70–80

<https://www.mathnet.ru/kukz83>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

14 мая 2025 г., 10:39:48



Гуревич И. Л., Киселев О. М.

СТРУЙНОЕ ОБТЕКАНИЕ МЯГКОЙ ОБОЛОЧКИ

Исследуется плоское струйное обтекание незамкнутой гибкой оболочки (паруса), закрепленной в двух или трех точках, а также обтекание замкнутой оболочки, закрепленной в одной точке. Доказывается разрешимость обеих задач, строится численное решение первой из них.

Задача о парусе изучалась в [1—2] в предположении малости прогиба. Вторая задача решена в [3] численно.

1. Симметричная незамкнутая оболочка. Основные соотношения

Рассматривается течение идеальной несжимаемой жидкости в области D_z плоскости $z = x + iy$. Граница D_z состоит из луча AC ($y = 0, x \leq 0$), дуги CB (гибкой пленки) и линии тока AB с постоянной скоростью, причем $y < 0$ в D_z (рис. 1). Форма ABC заранее не известна. Пусть s — длина дуги на BC , $s(B) = 0$, $s(C) = L$, $\Phi(s)$ — угол между осью x и касательной к дуге BC , V — скорость, V_∞ — скорость в бесконечно удаленной точке A и на AB , $\beta\pi = -\Phi(L)$, $(\beta + \delta)\pi = -\Phi(0)$, $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал, $\varphi_0 = \varphi(B) - \varphi(C)$, p и p_∞ — соответственно давление в жидкости и вне ее, ρ — плотность, T — сила натяжения оболочки. Заданы параметры $L, V_\infty, \beta \geq 0, \delta \geq 0, p_\infty, \rho$.

Заметим, что при $\beta = 1/2$ имеем половину симметричного обтекания паруса, закрепленного в симметричных относительно оси x точках B, B_1 .

Запишем уравнения равновесия и Бернулли:

$$\Phi'(s) = (p - p_\infty)/T, \quad p - p_\infty = \rho(V_\infty^2 - V^2)/2. \quad (1)$$

Пусть в плоскости $\zeta = re^{i\sigma}$ области D_z соответствует область $D_\zeta = \{\zeta : r < 1, 0 < \sigma < \pi/2\}$, причем $\zeta(A) = 0$, $\zeta(B) = 1$, $\zeta(C) = i$. Имеем

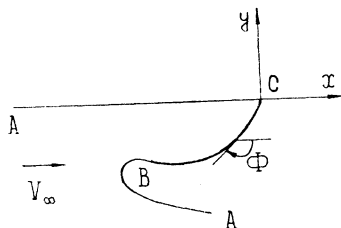


Рис. 1

$$w = \frac{\varphi_0}{4} (\zeta + \zeta^{-1})^2,$$

$$w'_z = V_\infty \left(\frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta} \right)^{2\beta} e^{i\omega(\zeta)}, \quad (2)$$

где $\omega(\zeta)$ — непрерывная в \bar{D}_ζ функция. В дальнейшем будем считать ω продолженной на весь круг с выполнением условий $\overline{\omega(\zeta)} =$

$= -\omega(\bar{\zeta}) = \omega(-\bar{\zeta})$; множество таких функций в круге обозначим через K .

Пусть $\omega(e^{i\sigma}) = \tau(\sigma) - i\theta(\sigma)$. Из (2) получим на $(0, \pi/2)$:

$$\varphi'_\sigma(e^{i\sigma}) = -\varphi_0 \sin 2\sigma, \quad \Phi[s(\sigma)] = \theta(\sigma) - \beta\pi, \quad V/V_\infty = e^{\tau\mu^{-2\beta}}, \quad (3)$$

$$\theta(0) = -\delta\pi, \quad \theta(\pi/2) = 0, \quad \mu(\sigma) = (1 + \sin \sigma)/\cos \sigma.$$

Отсюда, из (1) и формулы Дини вытекает

$$\theta'(\sigma) = MF(\sigma, \tau) \equiv M(\mu_1 e^{-\tau} - \mu_2 e^\tau), \quad (4)$$

$$\tau(\sigma) = -D[\theta'] \equiv -\int_0^{\pi/2} \theta'(t) K_1(t, \sigma) dt, \quad K_1 = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\sin t + \sin \sigma}{\sin t - \sin \sigma} \right|, \quad (5)$$

$$M = \delta\pi \left[\int_0^{\pi/2} F(\sigma, \tau) d\sigma \right]^{-1}, \quad (6)$$

где $M = \rho V_\infty \varphi_0 / T$, $\mu_k = \sin \sigma \cos \sigma \mu^{2\beta(3-2k)}$.

Мы докажем разрешимость системы (4)–(6) при выполнении любой из следующих трех пар условий (назовем их случаи I, II, III);

$$\beta = 0, \quad 0 \leq \delta \leq 1 - \Delta;$$

$$0 < \beta < 1/2, \quad 0 \leq \delta \leq 1 - \Delta; \quad (7)$$

$$1/2 \leq \beta < 1, \quad 0 \leq \delta \leq 2(1 - \beta) - \Delta \quad (\Delta \geq 0)$$

(в [1–3] рассматривались лишь случаи, когда δ мало). Во всех трех случаях оказывается $\theta' \geq 0$, то есть дуга BC вогнута в сторону жидкости, а кривая AB в силу [4, с. 105] выпукла (при $\beta = 0$ есть и другое решение). В случае III при $\delta \rightarrow 2(\beta - 1)$ дуга BC стремится совпасть с дугой окружности, а $y(B) \rightarrow 0$; сила давления на парус и скорость в каждой его точке также стремятся к нулю.

Детали доказательства существенно различаются в случаях I–III, что связано со свойствами μ_k . Например, при $\beta = 0$ имеем $\mu_1 = \mu_2$, и (6) теряет смысл при $\tau = 0$. Далее, $\mu_1 \geq \mu_2$ при $0 \leq \beta < 1$, а при $\beta > 1/2$ дополнительно $\mu'_1 \geq \max(0, \mu'_2)$, что позволяет искать решение в более узком классе, которому соответствует возрастание кривизны от B к C . В то же время общим моментом во всех случаях является получение оценки интеграла по $[0, 2\pi]$ от $\exp\{S[v]\}$ (S — оператор Гильберта) в условиях, когда колебание $v(\sigma)$ превышает π и теорема Зигмунда [4, с. 200] непосредственно не применима.

2. Разрешимость задачи о незамкнутой оболочке в случае I

При $\beta = 0$ имеем $\mu_1 = \mu_2 = \sin 2\sigma/2$. Заменяем F на $F_n = \sin 2\sigma \times \times (n^{-1} - \text{sh } \tau)$, а δ — на $\lambda\delta$ ($0 \leq \lambda \leq 1$). Тогда система (4)–(6) преобразуется к виду

$$\tau = -MD[F_n(\sigma, \tau)], \quad M = \lambda\delta\pi \left[\int_0^{\pi/2} F_n(\sigma, \tau) d\sigma \right]^{-1}. \quad (8)$$

Заменяя τ на $\min(0, \tau)$ в F_n , получим из (8) уравнение $\tau = G_n[\lambda, \tau]$ с вполне непрерывным оператором в C_0 -пространстве непрерывных на $[0, \pi/2]$ функций. Так как ядро в D положительно, то любое решение этого уравнения неположительно и, следовательно, удовлетворяет (8). Далее, $G_n[0, \tau] = 0$, и для доказательства разрешимости осталось получить априорную оценку функции $\tau(\sigma) \leq 0$ — решения (8).

Оценим сначала M . Пусть $u = -\tau_j \geq 0$, $2D_0[v] = D[v \sin 2\sigma]$. В силу (8)

$$u \geq MD_0[u + 2n^{-1}] \geq M(D_0[u] + 2c_0 n^{-1} \sin \sigma) \geq 2Mc_0 n^{-1} \sin \sigma. \quad (9)$$

Второе неравенство (где $c_0 > 0$) проверяется без труда. Пусть t_0 — максимальное из чисел t таких, что $u \geq t \sin \sigma$; в силу (9) $t_0 > 0$. Далее, из (9) имеем $u \geq MD_0[t_0 \sin \sigma] \geq Mt_0 c_0 \sin \sigma$. Из максимальнойности t_0 получаем оценку $M < 1/c_0$.

Оценим теперь $\|\tau\|_\nu$ — норму $\tau(\sigma)$ в пространстве Гельдера. Заменяя в (4) F на F_n и учитывая, что $\tau \leq 0$, получим $0 \leq \theta' \leq \leq c \cos \sigma e^{-\tau}$ (здесь и ниже c, c_1, c_2 — положительные числа, которые могут зависеть лишь от β и δ). Отсюда следует $-\lambda\delta\pi \leq \leq \theta \leq 0$. Пусть $\omega = \omega_0 + \omega_1$, $\omega_k \in K$; в дальнейшем применяется обозначение $\tau_k(\sigma) - i\theta_k(\sigma) = \omega_k(e^{i\sigma})$. Пусть $\theta_0 = -\lambda\delta\pi/2$ на $(0, \pi/2)$. Тогда по формуле Гильберта $\tau_0 = -\lambda\delta \ln \mu$, а $|\theta_1| \leq \lambda\delta\pi/2$. Поэтому $\theta' < ce^{-\tau}$, и по теореме Зигмунда (с помощью неравенства Гельдера) можно получить $\|\theta\|_\nu < c$ при $0 < \nu < 1 - \delta$. Следовательно, $\|\tau\|_\nu < c$.

Таким образом, уравнение $\tau = G_n[1, \tau]$ разрешимо по теореме Лере — Шаудера. Так как априорные оценки не зависят от n , а оператор компактный, то из последовательности решений (τ_n, M_n) можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Переходя к пределу в (8), легко показать, что предельная пара (τ, M) вместе с соответствующим θ' является решением (4)–(6).

Заметим, что при $\beta = 0$ функция $\omega_1(\zeta) = -\omega(\zeta)$ дает другое решение (4)–(6) с $\delta_1 = -\delta$, описывающее течение с выпуклой дугой BC ; правда, его уже нельзя рассматривать как половину обтекания паруса.

3. Сператорные уравнения в случаях II, III

В случае II μ_k непрерывны на $[0, \pi/2]$, $\mu_1 \geq \mu_2$, причем $\mu_1 = \mu_2$ лишь при $\sigma = 0$. Заменяя в F функцию τ на $\min(0, \tau)$, а δ — на $\lambda\delta$, приходим к уравнению $\tau = G[\lambda, \tau]$ с вполне непрерывным оператором в C_0 , причем $G[0, \tau] = 0$. Его решение $\tau \leq 0$, и оно дает решение системы (4)–(6), у которого $\theta' \geq 0$.

Перейдем к случаю III. К нему применимо сказанное выше, кроме утверждения о непрерывности μ_1 (при $\sigma = \pi/2$ μ_1 имеет полюс порядка $\alpha = 2\beta - 1$, $0 \leq \alpha < 1$). Однако здесь целесообразно искать решение в более узком классе $\tau \leq 0$, $\tau' \leq 0$. Из (4), формулы Дини и равенства $\tau(0) = 0$ получим на $(0, \pi/2)$:

$$\theta'' = MF_1(\sigma, \tau, \tau') \equiv M[\mu_1' e^{-\tau} - \mu_2' e^{\tau} - (\mu_1 e^{-\tau} + \mu_2 e^{\tau}) \tau'], \quad (10)$$

$$\tau' = -D_1[\theta''] \equiv -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \theta''(t) \ln \left| \frac{\cos t + \cos \sigma}{\cos t - \cos \sigma} \right| dt, \quad \tau = \int_0^{\sigma} \tau' d\sigma, \quad (11)$$

где $\mu_k' = [1 - 2 \sin^2 \sigma - 2\beta (-1)^k \sin \sigma] \mu^{2\beta(3-2k)}$. При $\beta = 1/2$ будет $\mu_k' = \cos \sigma [1 - 2(-1)^k \sin \sigma]$. При $\beta \geq 1/2$ имеем $\mu_1' \geq \max(0, \mu_2')$, и $\mu_1'(2^{-1} \cos \sigma)^{2\beta} \rightarrow \alpha$ при $\sigma \rightarrow \pi/2$.

Заменяя в (10), (11) τ' на $-(\cos \sigma)^{-\alpha} u(\sigma)$, а δ — на $\lambda\delta$, приходим к системе

$$u = M(\cos \sigma)^{\alpha} D_1[F_1(\sigma, \tau, -(\cos \sigma)^{-\alpha} u)], \quad (12)$$

$$\tau = -\int_0^{\sigma} (\cos \sigma)^{-\alpha} u d\sigma, \quad M = \lambda\delta\pi \left[\int_0^{\pi/2} F(\sigma, \tau) d\sigma \right]^{-1}. \quad (13)$$

В (13) и правой части (12) заменим u на $\max(0, u)$ и получим уравнение $u = W[\lambda, u]$, причем $W[0, u] = 0$. Пусть u — его решение. Последовательно получаем $\tau \leq 0$, $M \geq 0$, $u \geq 0$, то есть u определяет решение (12), (13), а значит, и решение (6), (9)–(11) с $\tau' \leq 0$, $\tau \leq 0$, $\theta'' \geq 0$, $\theta' \geq 0$.

Если $\beta = 1/2$ ($\alpha = 0$), то полная непрерывность оператора W в C_0 доказывается элементарно (как и введенных выше операторов G_n, G). При $0 < \alpha < 1$ достаточно показать полную непрерывность линейного оператора

$$R[v] = (\cos \sigma)^{\alpha} D_1[v(\sigma) (\cos \sigma)^{-\alpha-1}].$$

Непрерывность будет вытекать из оценки сверху на $R[1]$. Пусть $\Omega_k(\zeta) = u_k + i v_k$ ($k = 0, 2$) — аналитические функции в D_{ζ} , $\Omega_0 = \Omega_1 + \Omega_2$, где $\Omega_1 = (1 - i\zeta)^{-\alpha}$, $u_0(r) = v_0(ir) = v_2(e^{i\sigma}) = 0$. Обозначим $f_k(\sigma) - i g_k(\sigma) = \Omega_k(e^{i\sigma})$. Легко проверить, что

$$v_1(ir) = v_2(ir) = 0, \quad g_1 < c_1 (\cos \sigma)^{-\alpha}, \quad f_0 = f_1 > c_2 (\cos \sigma)^{-\alpha-1},$$

$$du_2(r)/dr = -du_1(r)/dr < 0.$$

Применяя принцип максимума к v_2 , получим $g_2 \leq 0$; отсюда $g_0 \leq g_1 \leq c_1 (\cos \sigma)^{-\alpha}$. Но $g_0 = D_1[f'_0]$, что с учетом предыдущих неравенств приводит к оценке $R[1] < c_1/c_2$.

Компактность следует из теоремы Арцела и оценки

$$|U(\sigma_2) - U(\sigma_1)| \leq c \sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon| \|v\|_0, \text{ где } \varepsilon = |\sigma_2 - \sigma_1|, U(\sigma) = R[v].$$

4. Априорные оценки в случаях II, III

Оценки будем получать лишь при $\lambda = 1$ (они остаются в силе и при $0 \leq \lambda < 1$). В обоих случаях можно считать

$$\theta' \geq 0, \quad -\delta\pi \leq \theta \leq 0, \quad \tau \leq 0, \quad M \geq 0. \quad (14)$$

В случае II достаточно оценить $|\tau|$, а в случае III — $|\tau'| (\cos \sigma)$.

Начнем с неравенств

$$c_1 \delta \leq M \leq c_2 \delta. \quad (15)$$

Второе из них вытекает из (6), если учесть, что $\tau \leq 0$ и $\mu_1 > \mu_2$ при $\sigma \neq 0$. Для доказательства первого умножим (4) на $\sin \Phi$ и проинтегрируем от 0 до $\pi/2$. Получим с учетом условий на β, δ

$$-M \int_0^{\pi/2} F \sin \Phi d\sigma = 2 \sin \pi \left(\beta + \frac{\delta}{2} \right) \sin \frac{\delta\pi}{2} \geq c\delta. \quad (16)$$

Справедливы равенства

$$-\int_0^{\pi/2} F \sin \Phi d\sigma = -2i \oint (\zeta - \zeta^{-3}) \left(\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta} \right)^{2\beta} e^{a_0 \zeta} d\zeta = 2\pi (4\pi + a_1)^2, \quad (17)$$

$$a_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \theta' \sin \sigma d\sigma. \quad (18)$$

Первое тождество в (17) проверяется непосредственно, а для доказательства второго нужно найти вычет подынтегральной функции при $\zeta = 0$. Так как $a_1 < 4$, то из (16)–(18) вытекает первое равенство в (15).

Оно позволяет получить из (6) оценку

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin \sigma (\cos \sigma)^{-\alpha} e^{-\tau} d\sigma < c. \quad (19)$$

Далее, пусть $\gamma = \theta(\sigma)$ ($0 \leq \sigma \leq \pi/2$) — кривая в плоскости (σ, γ) . Функция $\theta(\sigma)$ возрастает, $\theta(0) = -\delta\pi$, $\theta(\pi/2) = 0$. Пусть (σ_0, γ_0) — точка пересечения этого графика с прямой $\gamma = 2(\beta - 1)\sigma$. Оче-

видно, $\sigma_0 = \pi(1 - \varepsilon)/2$, $\gamma_0 = \pi(1 - \varepsilon)(\beta - 1)$, где $\varepsilon > 0$. Получим оценку $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$ с помощью (19).

Выразим τ через θ по формуле Гильберта и разобьем в ней отрезок интегрирования на $(0, \sigma_0)$ и $(\sigma_0, \pi/2)$. Первое слагаемое интегрируем по частям и получим

$$\tau(\sigma) = \theta(\sigma_0) K_1(\sigma_0, \sigma) - \int_0^{\sigma_0} \theta'(t) K_1(t, \sigma) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\sigma_0}^{\pi/2} \theta(t) \frac{\cos t \cos \sigma}{\cos^2 \sigma - \cos^2 t} dt.$$

При $\sigma < \sigma_0$ ядро K_2 во втором интеграле неположительно, а при $t > \sigma_0$ имеем $\theta > \gamma_0$; кроме того, всюду $\theta' \geq 0$, $K_1 \geq 0$. Используя эти неравенства и интегрируя K_2 , приходим при $\sigma < \sigma_0$ к оценке $-\tau \geq 2(1 - \varepsilon)(1 - \beta) |\ln \cos \sigma|$, откуда получим

$$I > m(\varepsilon) = \left[1 - \left(\sin \frac{\pi \varepsilon}{2} \right)^{2\varepsilon(1-\beta)} \right] [2\varepsilon(1 - \beta)]^{-1}. \quad (20)$$

Легко показать, что $m(1) = 0$, $m(0) = \infty$, и из (19), (20) следует $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$. Ниже используем обозначения $\sigma_1 = \pi(1 - \varepsilon_0)/2$, $\sigma_2 = \sigma_1 + \pi\varepsilon_0/4$.

Оценка на ε позволяет получить неравенство

$$I_p = \int_0^{\pi/2} (\cos \sigma)^{-p\alpha} e^{-p\sigma} d\sigma < c \quad (21)$$

при некотором $p > 1$. Для доказательства разобьем I_p на два интеграла i_1 и i_2 соответственно по $(0, \sigma_2)$ и $(\sigma_2, \pi/2)$. Для оценки i_1 запишем $\omega = \omega_2 + \omega_3$, где $\theta_2 = \theta$ на $(0, \pi/2)$, $\theta_2 = 0$ на $(\pi/2, \pi)$, $\theta_2(-\sigma) = \theta(\sigma)$, $\omega_k(0) = 0$. Тогда $\text{var } \theta_2 \leq \delta\pi$, а на $(0, \sigma_2)$ будет $|\tau_3| < c$, откуда с помощью теоремы Зигмунда получаем $i_1 < c$ при $p < 1/\delta$.

Далее, пусть $\omega = \omega_4 + \omega_5 + \omega_6$, $\omega_k \in K$, причем на $(0, \sigma_1)$ $\theta_4 = \theta$, $\theta_5 = 0$, а на $(\sigma_1, \pi/2)$ $\theta_4 = 0$, $\theta_5 = \pi(\beta - 1/2)$. Тогда $|\tau_4| < c$ на $(\sigma_2, \pi/2)$, $-\tau_5 < c + \alpha |\ln \cos \sigma|$ на $(0, \pi/2)$, $|\theta_6| < \pi q/2$ на $(-\pi, \pi)$, где $q = \max\{|\alpha|, 1 - \varepsilon_0(1 - \beta)\}$. Последняя оценка вытекает, в частности, из того, что $0 \geq \theta \geq \pi(1 - \varepsilon_0)(\beta - 1)$ на $(\sigma_1, \pi/2)$. С помощью этих оценок и теоремы Зигмунда получаем $i_2 < c$ при $p < 1/q$. Таким образом, (21) доказано.

Наконец, с учетом неравенств $\tau \leq 0$, (15), (21) получим из (4) $\|\theta\|_\nu \leq c\delta$ при $\nu < \min(1 - \delta, 1 - q)$, откуда $\|\tau\|_\nu \leq c\delta$. Если $1/2 \leq \beta < 1$, то оценки необходимо продолжить. Выразим τ' через θ' по формуле Гильберта; используя (4), найдем аналогично [5, с. 95], что $|\tau'| < c\delta (\cos \sigma)^{-\gamma}$, где $\alpha < \gamma < 1$. Затем из (10) получим $|\theta''| \leq c\delta (\cos \sigma)^{-\alpha-1}$, и из непрерывности оператора R вытекает $|\tau'| \leq c\delta (\cos \sigma)^{-\alpha}$.

Из этих оценок вытекает разрешимость задачи в случаях II, III.

5. Форма оболочки и сила давления в случае III

Из (3) и неравенства $\tau' \leq 0$ имеем $V'(s) \leq 0$; в силу этого и (10) $\Phi''(s) \geq 0$, то есть кривизна возрастает от B к C . Рассмотрим функцию $\gamma = \Phi(s)$ на $[0, L]$. Она возрастающая, вогнутая, $\Phi(0) = -(\beta + \gamma)\pi$, $\Phi(L) = -\beta\pi$. Проведем через точки $(0, \Phi(0))$, $(L, \Phi(L))$ ее графика хорду $\gamma = l(s)$. Очевидно, $-3\pi/2 < \Phi(s) \leq l(s) \leq -\pi/2$ и $\sin \Phi(s) \geq \sin l(s)$. Отсюда и из тождества $\sin \Phi ds = -dy$ можно получить $y(B) > -L\pi\varepsilon$, где $\varepsilon = [2(1 - \beta) - \delta]/2$. Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ точка B приближается к оси x .

Пусть $m\pi = \max[l(s) - \Phi(s)] = l(s_0) - \Phi(s_0)$. Оценим m сверху. Пусть $\gamma = g(s)$ — ломаная с вершинами $(0, \Phi(0))$, $(s_0, \Phi(s_0))$, $(L, \Phi(L))$. Оценивая снизу $y(B)$ с использованием неравенства $\Phi(s) \leq g(s)$, найдем $y(B) > L\pi(m/2 - \varepsilon)$. Но в силу свойства сохранения области при конформном отображении $y(B) < 0$, откуда вытекает $m < 2\varepsilon$.

Итак, при $\varepsilon \rightarrow 0$ в каждой точке s дуги BC наклон касательной стремится к наклону касательной в точке s некоторой дуги окружности. Эта дуга имеет длину L , оба ее конца лежат на оси x , правый конец совпадает с C , и в точке C она имеет общую касательную с дугой BC . Более того, нетрудно показать, что в каждой внутренней точке дуги BC кривизна ее также стремится к кривизне окружности, то есть к $2\pi(1 - \beta)/L$. Наконец, привлекая некоторые свойства конформных отображений (в частности, принцип Линделефа), удается установить, что $\varphi_0 \rightarrow 0$; отсюда легко получить, что $V(s) \rightarrow 0$ при $s \in (0, L]$. При этом, очевидно, стремится к нулю и суммарное давление на парус $2X$.

6. Численное решение и асимптотические формулы при $\beta = 1/2$

Уравнение (4) решалось численно при фиксированных значениях параметра M . Были введены аппроксимация

$$\theta + i\tau = \sum_{k=1}^N a_k e^{i(2k-1)\sigma},$$

вектор $a = (a_1, \dots, a_N)$ и функционал

$$I(a) = \sum_{j=0}^{N-1} P^2(\sigma_j), \quad \sigma_j = \frac{j\pi}{2N}, \quad P(\sigma) = \theta' - MF(\sigma, \tau).$$

Уравнение (4) заменялось уравнением $I(a) = 0$; его решение находилось путем численной минимизации $I(a)$ градиентным методом Давидона — Флетчера — Пауэлла [6].

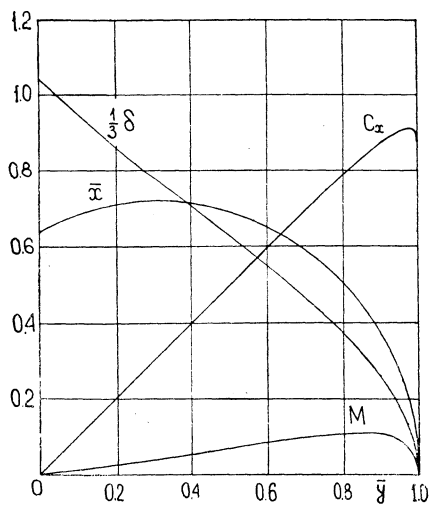


Рис. 2.

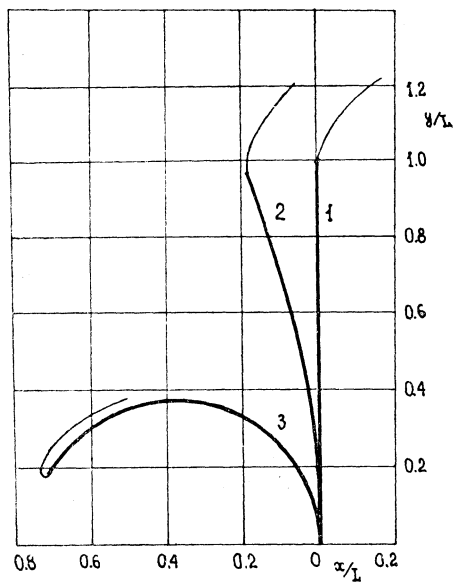


Рис. 3.

Оказалось, что при каждом значении M имеются два решения (этот факт легко получить и теоретически). Для описания результатов удобно за независимый параметр взять $\bar{y} = |y(B)| L^{-1} \in [0, 1]$.

На рис. 2 показаны зависимости параметров M , $\bar{x} = |x(B)| L^{-1}$, δ , $C_x = 2X(\rho V_\infty^2 L)^{-1}$ от \bar{y} .

Отметим следующие результаты: $\bar{x}(0) = 2/\pi = 0,6366$, $\max \bar{x}(\bar{y}) = x(0,31) = 0,7246$, $C_x(1) = 0,8798$, $\max C_x(\bar{y}) = C_x(0,9788) = 0,9086$, $\max M(\bar{y}) = M(0,86) = 0,111$, $\delta(0) = \pi$, отношение $L\Phi'(C)/\delta$ монотонно растет вместе с \bar{y} от 1 до $(4 + \pi)/2\pi = 1,137$.

На рис. 3 изображены верхняя половина паруса и граница струи в плоскости z/L . Кривые 1, 2, 3 соответствуют $\bar{y} = 1$, $\bar{y} = 0,9788$ ($C_x = \max$), $\bar{y} = 0,1932$. Расчеты показывают, что при $\bar{y} < \bar{y}_0 \approx 0,189$ область течения двулистка.

При малых M решение может быть получено в виде рядов по степеням M . В линейном приближении получаем $\delta = \pi M$, $C_x = 2\pi/(\pi + 4) + 0,542 M$, $a_k = 32M(-1)^k [\pi(2k - 3)(2k - 1) \times (2k + 1)]^{-1}$.

7. О несимметричном обтекании паруса

Пусть парус закреплен в точках B_1, B_2 ($y(B_1) < y(B_2)$), $\Phi(B_k) = -\pi\beta_k$, причем $0 < \beta_2 \leq \beta_1 < 1$, $\beta_1 + \beta_2 \neq 1$. Это означает, что течение не является симметричным и $\text{var} \Phi < \pi$ (в симметричном случае это условие существенно ослабляется; так, при $\beta = 1/2$ было $\text{var} \Phi < 2\pi$). Такое ограничение позволяет непосредственно применять теорему Зигмунда, и доказательство существования течения с вогнутой формой паруса не представляет труда.

8. Струйное обтекание замкнутой оболочки

На рис. 4 — половина картины отрывного обтекания замкнутой оболочки с внутренним давлением p_1 , закрепленной в точке C .

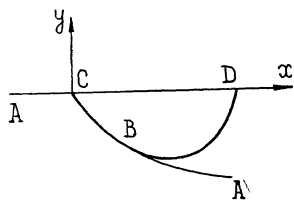


Рис. 4.

На несмоченную часть BD действует внешнее давление p_∞ , так что BD — дуга окружности с центром на оси x . Будем задавать L — длину дуги BC , ρ , p_∞ , p_1 , V_∞ . Параметры зададим так, чтобы дуга BC была выпуклой к жидкости. Особенность этой задачи в том, что углы $-\beta\pi = \Phi[s(C)] = \Phi(L)$ и $\Phi[s(B)] = \Phi(0)$ неизвестны.

Вместо (1) и (4) будем иметь

$$\Phi'(s) = (p - p_1)/T, \quad p + \rho V^2/2 = p_\infty + \rho V_\infty^2/2 = p_0,$$

$$\theta'(\sigma) = -MF_2(\sigma, \tau) = -M(\kappa\mu_1 e^{-\tau} + \mu_2 e^\tau), \quad (22)$$

где p_0 — давление торможения, $\kappa = 2(p_1 - p_0)/(\rho V_\infty^2)$. Существование течения с выпуклой дугой BC будет обеспечиваться условием $\kappa \geq 0$.

Из условия конечности кривизны свободной границы BA в точке B (условие Бриллюена) вытекает [4, с. 178].

$$\beta\pi = - \int_0^{\pi/2} \theta' \operatorname{cosec} \sigma d\sigma. \quad (23)$$

Далее, необходимо, чтобы центр кривизны дуги BC в точке B лежал на оси x ; это дает $\Phi'(0) = \cos \Phi(0)/y(B)$ или

$$\cos \Phi(0) = -M(\kappa + 1) \int_0^{\pi/2} \mu_1 e^{-\tau} \sin \Phi d\sigma. \quad (24)$$

Умножим (22) на $\sin \Phi$ и проинтегрируем от 0 до $\pi/2$; из полученного равенства и (24) имеем

$$\cos \beta\pi = -M \int_0^{\pi/2} F(\sigma, \tau) \sin \Phi d\sigma.$$

С учетом (17), (18), (22), (23) этому уравнению придадим вид

$$\frac{(\beta\pi)^3}{\cos \beta\pi} \equiv f(\beta) = H(\beta, \tau) \equiv \frac{\pi}{2} H_1^3 H_2^{-2},$$

$$H_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{F_2}{\sin \sigma} d\sigma, \quad H_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{F_2 \cos^2 \sigma}{\sin \sigma} d\sigma.$$

В итоге приходим к системе уравнений относительно $\theta(\sigma)$ и β :

$$\theta = \frac{\beta\pi}{H_1} \int_\sigma^{\pi/2} F_2 d\sigma, \quad \beta = f^{-1}[H(\beta, \tau)], \quad \tau = \int_0^{\pi/2} K_2 \theta d\sigma. \quad (25)$$

Пусть $E(N, \beta) \in C, \times R_1$ — множество пар $(\theta(\sigma), \beta)$, таких, что θ убывает на $[0, \pi/2]$, $\theta(\pi/2) = 0$, $0 \leq \theta \leq \beta\pi$, $\|\theta\| \leq N$, $0 \leq \beta \leq 1/2$. При достаточно малом ν и достаточно большом N оператор, определяемый правыми частями уравнений (25), вполне непрерывен и переводит $E(N, \beta)$ в свою внутреннюю часть. Доказательство этого утверждения проводится известными методами. Остановимся лишь на трех моментах. Во-первых, из убывания θ вытекает $\tau \geq 0$. Во-вторых, H_1 и H_2 можно оценить снизу с помощью неравенства Иенсена и неравенств $0 \leq \theta \leq \pi/2$ аналогично [5, с. 204]. В-третьих, используя эти неравенства, можно оценить

сверху интеграл от $(\mu_2 e^{\tau})^p$ при $p > 1$. Для этого запишем $\omega = \omega_7 + \omega_8$, где $\omega_k \in K$, $\theta_7 = \pi\beta/2$ на $(0, \pi/2)$. Тогда $\tau_7 = \beta \ln \mu$, $|\theta_8| \leq \pi/4$ и $\mu_2 e^{\tau} < e^{\tau_8}$, что позволяет применить теорему Зигмунда.

Таким образом, по теореме Шаудера система (25) имеет решение внутри $E(N, \beta)$. Нетрудно показать, что $\beta \rightarrow 1/2$ при $\kappa \rightarrow \infty$ (предельный случай соответствует струйному обтеканию дуги окружности).

Остается недоказанной теорема существования при $-1 < \kappa < 0$ (случай $\kappa = -1$ изучен в предыдущих пунктах).

ЛИТЕРАТУРА

1. Dugan J. P. A free-streamline model of two-dimensional sail.—J. Fluid Mech., 1970, v. 42.
2. Киселев О. М., Федяев В. Л. О струйном течении жидкости при наличии гибкого ограждения.—В кн.: Тр. семинара по краевым задачам.—Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1974, вып. 11, с. 73—82.
3. Житников В. П., Терентьев А. Г. Струйное обтекание гибкой оболочки потоком идеальной жидкости.—Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 6, с. 43—48.
4. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны.—М.: Мир, 1964.—466 с.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.—М.: ГИФМЛ, 1962.—599 с.
6. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.—М.: Мир, 1975.—534 с.

Доложено на семинаре 25 марта 1985 г.