

СВЯЗЬ С МНОГИМИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯМИ

С. И. Гельфанд, В. В. Прелов

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Настоящий обзор охватывает работы по теории связи с многими пользователями, в основном прореферированные в РЖ «Математика» с 1961 по 1976 годы.

Теория связи с многими пользователями (multiple-user communication), как область теории информации, определилась в начале 60-х годов после работы Шеннона [73] о двусторонних каналах. После этого в течение десяти лет появилось лишь несколько работ, в которых, в основном, развивались и уточнялись результаты Шеннона. В начале 70-х годов интерес к этой области резко повысился ввиду возможной связи ее с вопросами построения сложных современных сетей передачи данных. Работы Ковера [33] и Слепяна и Вулфа [76] знаменуют начало интенсивного исследования систем с многими пользователями. Этот процесс интенсивного исследования продолжается и сейчас, и число работ, посвященных многокомпонентным системам связи, быстро увеличивается. Можно, по-видимому, сказать, что в настоящее время эта область теории информации переживает период расцвета.

Работ, которые в той или иной степени можно рассматривать как обзоры теории связи с многими пользователями, очень немного. Можно упомянуть лишь обзор Вайнера [93], в котором § 6 посвящен интересующей нас теме, короткий обзор Вулфа [87] и появившийся недавно весьма подробный и содержательный обзор ван дер Мейлена [62] (и его расширенный вариант [63]), посвященный, однако, лишь многокомпонентным каналам и не затрагивающий вопросы кодирования нескольких источников. Поэтому мы сочли возможным уделить в нашем обзоре несколько большее, чем это обычно принято, место изложению основных определений и полученных результатов. В конце первого параграфа вводятся обозначения, которые постоянно

будут использоваться в дальнейшем. § 2 посвящен задачам кодирования (устранения избыточности) коррелированных источников сообщений, а § 3 — рассмотрению возможностей помехоустойчивого кодирования в односторонних каналах с несколькими компонентами, когда каждая вершина канала (терминал) является или только входом (передатчиком), или только выходом (приемником). В § 4 обсуждаются двусторонние и многосторонние каналы, когда некоторые вершины служат одновременно и входами и выходами канала. Наконец, в § 5 рассматриваются некоторые задачи теории информации, которые могут быть связаны с обсуждаемой темой.

Нам хотелось бы выразить глубокую признательность М. С. Пинскеру (ИППИ АН СССР) и Я. Кернеру (Институт математики Венгерской АН) за многочисленные полезные беседы, которые помогли пониманию различных обсуждаемых здесь вопросов. Мы также благодарны Я. Кернеру за возможность ознакомиться с некоторыми его результатами.

1.2. Введем некоторые обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем. Заглавными рукописными буквами ($\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \dots$) будут обозначаться конечные множества, соответствующими строчными буквами (x, y, z, \dots) — элементы этих множеств. Если \mathcal{X} — некоторое множество, то через \mathcal{X}^n будет обозначаться прямое произведение n экземпляров \mathcal{X} , $\mathcal{X}^n = \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X}$. Элементы \mathcal{X}^n будут обозначаться полужирными буквами: $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathcal{X}^n$, $x^i \in \mathcal{X}$. Заглавными буквами (X, Y, Z, \dots) будут обозначаться случайные величины, принимающие значения в соответствующих множествах; полужирными заглавными буквами $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$, $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n), \dots$, если не оговорено противное, будут обозначаться n -мерные случайные векторы с независимыми и одинаково распределенными компонентами, причем распределение X_i совпадает с распределением X , распределение Y_i — с распределением Y и т. д. В случае, когда случайные величины дискретны (как это чаще всего и будет) через $p_X(x)$, $p_{XY}(x, y)$, $p_{X|Y}(x|y)$ и т. д. будут обозначаться различные распределения вероятностей, задаваемые этими случайными величинами. Так, например, $p_X(x) = \text{Pr}\{X = x\}$, $p_{X|Y}(x|y) = \text{Pr}\{X = x | Y = y\}$ и т. д. Иногда нижние индексы или аргументы в выражениях такого рода будут опускаться. Через $\text{card } \mathcal{X}$ будет обозначаться число элементов конечного множества \mathcal{X} , через I_M — множество натуральных чисел $\{1, \dots, M\}$. Мы будем использовать обычные определения взаимной информации $I(X; Y)$ и энтропии $H(X)$ случайных величин X, Y . Эти определения, как и основные нужные нам понятия и результаты теории информации, можно найти, например в [42] или [89]. Логарифмы берутся по основанию 2. Через coA

обозначается выпуклая оболочка множества A в евклидовом пространстве; через A^c — замыкание A , $\mathbf{M}X$ — математическое ожидание случайной величины X .

§ 2. КОДИРОВАНИЕ ЗАВИСИМЫХ ИСТОЧНИКОВ

2.1. Общая постановка задачи. Мы сформулируем общую задачу кодирования зависимых источников сообщений следующим образом. Набор из k зависимых источников S_1, \dots, S_k состоит из k конечных множеств $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k$ (алфавиты источников) и k (зависимых) случайных величин X_1, \dots, X_k со значениями в $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k$, соответственно. Пусть $p_{X_1 \dots X_k}(x_1, \dots, x_k)$ — совместное распределение вероятностей X_1, \dots, X_k . Предполагается, что источники являются стационарными и не имеют памяти. Это означает, что для каждого натурального n определены случайные величины X_1, \dots, X_k со значениями в $\mathcal{X}_1^n, \dots, \mathcal{X}_k^n$, соответственно, распределение вероятностей $p_{X_1 \dots X_k}(x_1, \dots, x_k)$ задается формулой

$$p_{X_1 \dots X_k}(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^n p_{X_1 \dots X_k}(x_1^i, \dots, x_k^i),$$

если $x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^n), \dots, x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$.

Каждый набор источников можно кодировать многими способами в зависимости от того, как связаны между собой источники, кодеры и декодеры. Для задания схемы кодирования-декодирования нужно задать два целых числа l, m ($l \geq 1, k \geq m \geq 1$) и подмножества $B_i \subset \{1, \dots, k\}$, $1 \leq i \leq l$, $\Gamma_i \subset \{1, \dots, l\}$, $1 \leq i \leq m$. Их смысл состоит в следующем. Числа l и m являются числом кодеров и декодеров, соответственно. Подмножество B_i , $1 \leq i \leq m$, состоит из номеров тех источников, которые соединены с i -м кодером; подмножество Γ_i , $1 \leq i \leq m$, состоит из номеров тех кодеров, которые соединены с i -м декодером.

Пусть схема кодирования (т. е. l, m, B_i, Γ_i) зафиксирована. Определим, что будет пониматься под конкретным блочным кодированием и декодированием блоками длины n в соответствии с этой схемой. Нам нужно определить l кодеров E_1, \dots, E_l и m декодеров D_1, \dots, D_m .

Каждый из кодеров E_i , $1 \leq i \leq l$, задается числом M_i (объемом алфавита) и отображением (кодирующей функцией) $f_{E_i}: \prod_{j \in B_i} \mathcal{X}_j^n \rightarrow I_{M_i}$. Набор отображений f_{E_i} , $1 \leq i \leq l$, нам будет

удобно иногда объединять в одно отображение $f_E: \prod_{i=1}^k \mathcal{X}_i^n \rightarrow$

$\rightarrow \prod_{i=1}^l I_{M_i}$. Каждый из декодеров D_i , $1 \leq i \leq m$, задается отображением (декодирующей функцией) $f_{D_i}: \prod_{j \in \Gamma_i} I_{M_j} \rightarrow \mathcal{X}_i^n$. Так же как и выше, набор отображений f_{D_i} , $1 \leq i \leq m$, мы будем иногда объединять в одно отображение $f_D: \prod_{i=1}^l I_{M_i} \rightarrow \prod_{i=1}^m \mathcal{X}_i^n$. Композиция отображений f_E и f_D определяет отображение кодирования-декодирования $f_{D-E}: \prod_{i=1}^k \mathcal{X}_i^n \rightarrow \prod_{i=1}^m \mathcal{X}_i^n$. Это отображение определяет естественные случайные величины $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_m$ со значениями в $\mathcal{X}_1^n, \dots, \mathcal{X}_m^n$. А именно, совместное распределение вероятностей X_i , $1 \leq i \leq k$, и \tilde{X}_i , $1 \leq i \leq m$, задается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \text{Pr} \{X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k, \tilde{X}_1 = \tilde{x}_1, \dots, \tilde{X}_m = \tilde{x}_m\} = \\
 & = \begin{cases} p_{x_1 \dots x_k}(x_1, \dots, x_k), & \text{если } (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m) = f_{D-E}(x_1, \dots, x_k) \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Введем среднюю вероятность ошибки на символ i -го, $1 \leq i \leq m$, декодера формулой $p_{e,i} = (1/n) \text{Pr} \{X_i \neq \tilde{X}_i\}$. Назовем вектор (R_1, \dots, R_l) в l -мерном пространстве допустимым, если для любого $\epsilon > 0$ можно найти такую длину n и такие блочные кодеры и декодеры длины n , что $n^{-1} \log M_i \leq R_i + \epsilon$ для $1 \leq i \leq l$ и $p_{e,i} \leq \epsilon$ для $1 \leq i \leq m$. Пусть \mathcal{R} — область всех допустимых скоростей передачи (для данной схемы (l, m, B_i, Γ_i)).

Основная задача теории кодирования зависимых источников состоит в описании областей \mathcal{R} для различных схем кодирования.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. $k=l=m=1$, $B_1 = \Gamma_1 = \{1\}$. Это обычная задача кодирования стационарного дискретного источника без памяти X . В этом случае $\mathcal{R} = \{R : R \geq H(X)\}$ — классический результат Шеннона.

Пример 2. Тривиальным обобщением предыдущего примера является случай $m=k$, $l=1$, $B_1 = \{1, \dots, k\}$, $\Gamma_i = \{1\}$, $1 \leq i \leq k$. Эта задача сводится к предыдущей, если положить $X = (X_1, \dots, X_k)$ и объединить все декодеры D_i в один декодер. Таким образом, в этом случае также $\mathcal{R} = \{R : R \geq H(X_1, \dots, X_k)\}$.

Пример 3. $m=k=l=2$, $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{2\}$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \{1, 2\}$. Это первый случай, когда зависимость источников является существенной. Область допустимых скоростей передачи была определена в работе Слепяна и Вулфа [76], которая положила на-

чало изучению кодирования зависимых источников. Мы рассмотрим этот случай, а также другие случаи с $m=k=l=2$ в п. 2.2.

Пример 4. $k=l=2$, $m=1$, $B_1=\{1\}$, $B_2=\{2\}$, $\Gamma_1=\{1, 2\}$. Это так называемое кодирование источника при наличии дополнительной информации. Название объясняется тем, что декодер должен восстановить лишь X_1 , а X_2 служит для того, чтобы по возможности облегчить восстановление X_1 . Область допустимых скоростей была определена в работах Вайнера [95], Грея и Вайнера [46], Алсведе и Кернера [25]. Мы подробнее рассмотрим эту задачу в п. 2.3.

Общая задача определения области \mathcal{R} допустимых скоростей кодирования для произвольной схемы в настоящее время далека от своего решения. Исследованы лишь отдельные частные случаи, которые будут описаны ниже. Однако в любом случае область обладает рядом простых свойств. Следующая лемма в столь общем виде формулируется здесь впервые.

Лемма. (1). \mathcal{R} — замкнутая выпуклая область, лежащая в положительном октанте ($R_1 \geq 0, \dots, R_l \geq 0$) l -мерного пространства.

(2). Если $(R_1, \dots, R_l) \in \mathcal{R}$ и $R'_1 \geq R_1, \dots, R'_l \geq R_l$, то $(R'_1, \dots, R'_l) \in \mathcal{R}$.

Единственное не совсем тривиальное утверждение леммы — это утверждение о выпуклости \mathcal{R} . Оно доказывается стандартными в теории информации рассуждениями с «разделением времени» (см., например, [33]).

2.2. Кодирование двух зависимых источников. В своей основополагающей работе [76] Слепян и Вулф рассмотрели задачу кодирования двух зависимых дискретных стационарных источников без памяти. В обозначениях предыдущего пункта их задача соответствует случаю $k=l=m=2$. При этом может возникнуть 16 различных случаев в зависимости от того, каковы множества Γ_i и B_i . (Мы считаем, что кодеры и декодеры занумерованы так, что $i \in \Gamma_i$, $i \in B_i$). В [76] определена область допустимых скоростей передачи для каждого из этих случаев. Оказывается, что фактически все эти случаи сводятся к обычной теореме кодирования одного источника, и к случаю, когда $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{2\}$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \{1, 2\}$, т. е. к случаю, когда каждый источник кодируется отдельно от другого, а декодируются они вместе (случай 0011 в обозначениях работы [76]). В этом случае область \mathcal{R} описывается следующим образом:

Теорема. Область \mathcal{R} на плоскости (R_1, R_2) задается неравенствами

$$R_1 \geq H(X_1|X_2), \quad R_2 \geq H(X_2|X_1), \quad R_1 + R_2 \geq H(X_1, X_2).$$

Скажем несколько слов о доказательстве теоремы. Из теоремы кодирования одного источника легко получить, что ни одна пара скоростей (R_1, R_2) вне \mathcal{R} не является допустимой. Труднее доказать, что каждая точка $(R_1, R_2) \in \mathcal{R}$ допустима.

Ввиду леммы п. 2.1 достаточно показать, что $(H(X_1), H(X_2|X_1)) \in \mathcal{R}$ и $(H(X_1|X_2), H(X_2)) \in \mathcal{R}$. Приведем нестрогие (но на наш взгляд убедительные) рассуждения из [работы [76], показывающие почему это так.

Рассмотрим точку $R_1 = H(X_1) + \varepsilon$, $R_2 = H(X_2|X_1) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда теорема кодирования одного источника показывает, что R_1 достаточно велико для того, чтобы восстановить X_1 почти безошибочно. Поэтому можно считать, что декодеру известен вектор X_1 .

Рассмотрим теперь дискретный канал без памяти со входным алфавитом \mathcal{X}_2 , выходным алфавитом \mathcal{X}_1 и переходными вероятностями $p_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)/p_{X_2}(x_2)$. Тогда мы можем считать, что X_1 является выходной последовательностью этого канала, соответствующей входной последовательности X_2 . Теорема кодирования для канала без памяти утверждает, что можно найти код $\mathcal{A} = \{x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,M}\}$, $M = 2^{n[I(X_1, X_2) - \varepsilon/2]}$ длины n , и правило декодирования такие, что по последовательности x_1 можно восстановить $x_{2,i}$ с маленькой вероятностью ошибки. Оказывается, что можно найти не один, а много кодов \mathcal{A}_i , $i = 1, \dots, M'$ для канала, каждый из которых имеет такой же объем, что и \mathcal{A}_1 , и также имеет маленькую вероятность ошибки декодирования. Кодирование последовательности X_2 состоит теперь в передаче номера первого кода в последовательности $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{M'}$, к которому принадлежит x_2 . Тогда декодер, зная номер кода \mathcal{A}_i и последовательность x_1 , сможет восстановить x_2 с маленькой вероятностью ошибки.

Далее, число высоковероятных последовательностей x_2 равно $2^{n[H(X_2) + \varepsilon/2]}$. Поэтому, если коды \mathcal{A}_i почти не пересекаются, то их число должно быть равно

$$M' = 2^{n[H(X_2) + \varepsilon/2]} / 2^{n[I(X_1, X_2) - \varepsilon/2]} = 2^{n[H(X_2|X_1) + \varepsilon]}$$

и значит пора скоростей $R_1 = H(X_1) + \varepsilon$, $R_2 = H(X_2|X_1) + \varepsilon$ достижима. В работе [76] содержится строгое доказательство этого результата, основанное на случайном выборе кодов.

Аналогично (но проще) разбираются и другие случаи. Например, если $B_1 = \{1, 2\}$, $B_2 = \{2\}$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \{1, 2\}$, то область \mathcal{R} допустимых скоростей передачи задается неравенствами

$$R_1 \geq H(X_1|X_2), \quad R_2 \geq 0, \quad R_1 + R_2 \geq H(X_1, X_2).$$

Ковер [34] нашел область допустимых скоростей кодирования для произвольной эргодической пары дискретных источников.

В. Н. Кошелев [4] дал несколько другое доказательство теоремы Слепяна—Вулфа. Его доказательство позволяет, в частности, обойтись без разделения времени.

Обсуждение этой задачи содержится также в [93], VI—С, и в [88].

2.3. Кодирование источников с дополнительной информацией.

Кодирование одного источника с дополнительной информацией соответствует случаю $k=2$, $l=2$, $m=1$, $B_1=\{1\}$, $B_2=\{2\}$, $\Gamma_1=\{1, 2\}$. Иначе говоря, задана пара дискретных случайных величин X_1, X_2 с совместным распределением вероятностей $p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$, и мы хотим восстановить на выходе X_1 , а последовательность X_2 помогает нам в этом. Эта задача была рассмотрена в частном случае двоичных симметричных источников в [92], и окончательно решена независимо Вайнером [95] и Алсведе и Кернером [25] (см. также обсуждение этой задачи в [93], VI—D). Приведем описание области \mathcal{R} допустимых скоростей передачи в этом случае.

Введем множество \mathcal{P} троек случайных величин X_1, X_2, W , где W принимает значения в произвольном конечном множестве \mathcal{W} , с совместным распределением вероятностей $p_{X_1, X_2, W}(x_1, x_2, w)$, удовлетворяющим двум условиям:

$$1) \sum_{w \in \mathcal{W}} p_{X_1, X_2, W}(x_1, x_2, w) = p_{X_1, X_2}(x_1, x_2);$$

$$2) p_{X_1, X_2, W}(x_1, x_2, w) = p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) p_{W|X_2}(w|x_2).$$

Условие 2) означает, что тройка X_1, X_2, W образует цепь Маркова. Ясно, что тройка X_1, X_2, W (при фиксированных $p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$) полностью определяется условными вероятностями $p_{W|X_2}(w|x_2)$. Вайнер называет набор $p_{W|X_2}(w|x_2)$ тест-каналом.

Для каждой тройки $(X_1, X_2, W) \in \mathcal{P}$ определим область $\mathcal{R}(A)$ на плоскости (R_1, R_2) неравенствами

$$R_1 \geq H(X_1|W), \quad R_2 \geq I(X_2; W).$$

Теорема ([25], [95]). Область \mathcal{R} допустимых скоростей кодирования источника с дополнительной информацией есть

$$\mathcal{R} = \left[\bigcup_{A \in \mathcal{P}} \mathcal{R}(A) \right]^c,$$

где $[\cdot]^c$ обозначает замыкание. При этом достаточно ограничиться такими тройками $A \in \mathcal{P}$, в которых $\text{card } \mathcal{W} \leq \text{card } \mathcal{X}_1 + 2$.

Доказательства этой теоремы в [25] и [95] основаны на одинаковых идеях, но используют разные технические средства. В [25] используется лемма о максимальном коде ([89], гл. 3), а в [95] — кодирование источника с заданным критерием верности ([42], гл. 9).

Аналогично изучается схема кодирования с любым k , $l=k$, $m=k-1$; $B_i = \{i\}$, $1 \leq i \leq k$; $\Gamma_i = \{i, k\}$, $1 \leq i \leq k$. Случай $k=2$ рассмотрен в [95] и [46], он играет важную роль в определении понятия общей информации двух зависимых случайных величин. Подробнее об этом см. в п. 2.6.

Витсенхаузен [85] рассмотрел задачу кодирования источника с нулевой ошибкой при наличии дополнительной информации. По распределению вероятностей p_{x_1, x_2} , он строит некоторый граф G , и максимальная скорость кодирования кодами длины n с нулевой ошибкой оказывается равной хроматическому числу графа $G \times G \times \dots \times G$ (n раз).

2.4. Кодирование трех зависимых источников. Кернер и Мартон [52] определили область допустимых скоростей кодирования для задачи кодирования трех зависимых источников, соответствующих (в обозначениях п. 2.1) случаю $k=l=m=3$, $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{2\}$, $B_3 = \{3\}$, $\Gamma_1 = \{1\}$, $\Gamma_2 = \{1, 2\}$, $\Gamma_3 = \{2, 3\}$. Их результат состоит в следующем.

Пусть $p_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3)$ — совместное распределение величин X_1, X_2, X_3 . Введем множество \mathcal{P} четверок случайных величин X_1, X_2, X_3, U (U принимает значения в некотором конечном множестве \mathcal{U}), совместное распределение $p_{X_1, X_2, X_3, U}$ которых удовлетворяет условию

$$p_{X_1, X_2, X_3, U}(x_1, x_2, x_3, u) = p_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) p_{U|X_2}(u|x_2)$$

(т. е. последовательность $U, X_2, (X_1, X_3)$ образует цепь Маркова). Определим функцию $T_1(t)$, $-I(X_1; X_2) \leq t \leq 0$, равенством

$$T_1(t) = \inf \{ -I(X_3; U) \},$$

где нижняя грань берется по таким $(X_1, X_2, X_3, U) \in \mathcal{P}$, что $-I(X_1; U) \geq t$. Функция $T_1(t)$ — выпуклая и монотонно убывающая. Кроме того, при определении T_1 достаточно ограничиться такими \mathcal{U} , что $\text{card } \mathcal{U} \leq \text{card } \mathcal{X}_2 + 2$.

Пусть t_0 — наименьшее значение t , при котором наклон касательной к T_1 в t не меньше 1 (или $t_0 = 0$, если таких t вообще нет). Зададим $T(t)$, полагая

$$T(t) = T_1(t) \text{ при } -I(X_1; X_2) \leq t \leq t_0,$$

$$T(t) = T_1(t_0) + t - t_0 \text{ при } t_0 \leq t \leq 0.$$

Основной результат работы [52] состоит в следующем.

Теорема. Область \mathcal{R} допустимых скоростей кодирования состоит из всех троек (R_1, R_2, R_3) , удовлетворяющих неравенствам

$$R_1 \geq H(X_1),$$

$$R_2 \geq H(X_2 | X_1),$$

$$R_3 \geq T(H(X_2 | X_1) - R_2) + H(X_3).$$

В [52] доказано также сильное обращение теоремы кодирования. Доказательство основано на сравнении двух каналов с переходными вероятностями $p_{X_1|X_2}$ и $p_{X_3|X_2}$ и использует лемму Файнштейна о максимальном коде. Следствием из полученных в статье результатов является теорема Алсведе—Дюка из [23].

2.5. Кодирование зависимых источников с критерием точности. Имеется несколько работ, посвященных кодированию коррелированных источников с заданным критерием качества. В работе Вайнера и Зива [98] вычисляется функция скорость-искажение для кодирования источника с дополнительной информацией. Пусть (X, Y) — две дискретные случайные величины с совместным распределением

вероятностей $p_{XY}(x, y)$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$, и пусть $\hat{\mathcal{X}}$ — конечное множество, являющееся алфавитом декодера. Предположим, что задана мера искажения $\delta(x, \hat{x}) \geq 0$, $x \in \mathcal{X}$, $\hat{x} \in \hat{\mathcal{X}}$. Код с параметрами (n, M, Δ) состоит из двух отображений $f_E: \mathcal{X}^n \rightarrow I_M$ (кодер) и $f_D: \mathcal{Y}^n \times I_M \rightarrow \hat{\mathcal{X}}^n$ (декодер) таких, что $(1/n)M \sum_{i=1}^n \delta(X_i, \hat{X}_i) = \Delta$, где $\hat{X} = f_D(Y, f_E(X))$. Пара (R, d)

называется допустимой, если для любого $\epsilon > 0$ существует (при достаточно больших n) (n, M, Δ) -код с $M \leq 2^{n(R+\epsilon)}$, $\Delta \leq d + \epsilon$. Пусть \mathcal{R} — множество допустимых пар (R, d) и $R^*(d) = \min_{(R, d) \in \mathcal{R}} R$. Функция $R^*(d)$ описывается следующим образом. Пусть $d > 0$. Определим $\mathcal{M}(d)$ как множество троек X, Y, Z дискретных случайных величин (Z принимает значения в произвольном конечном множестве \mathcal{Z}) таких, что $p_{XYZ}(x, y, z) = p_{XY}(x, y)p_{Z|X}(z|x)$ (т. е. Y, X, Z — цепь Маркова) и существует функция $F: \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$, для которой $M\delta(X, F(Y, Z)) \leq d$. Положим $\bar{R}(d) = \inf_{p_{XYZ} \in \mathcal{M}(d)} I(X; Z|Y)$ и

$\bar{R}(0) = \lim_{d \rightarrow 0} \bar{R}(d)$. Основной результат [93] утверждает, что $R^*(d) = \bar{R}(d)$ при всех $d \geq 0$.

В случае, если $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$ и $\delta(x, \hat{x}) = 1$ при $x \neq \hat{x}$, $\delta(x, x) = 0$,

то $(1/n)M \sum_{i=1}^n \delta(X_i, \hat{X}_i)$ является средней вероятностью ошибки

на символ источника, и один из результатов работы Слепяна и Вулфа [76] утверждает, что $R^*(0) = H(X|Y)$, т. е. $R^*(0)$ совпадает с условной энтропией. В [98] показано, что уже для двоичного симметричного источника (когда $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = (0, 1)$ и $p_{XY}(x, y) = p_0$ при $x \neq y$, $p_{XY}(x, y) = 1 - p_0$ при $x = y$) $R^*(d)$, вообще говоря, не совпадает с условной функцией скорость-искажение (см. [44]). Другими словами, знание последовательности $\{Y_i\}$ также и при кодировании (а не только при декодировании) позволяет уменьшить избыточность кодирования.

Еще один результат о кодировании с заданным критерием качества содержится в работе Грея и Вайнера [46]. Схема кодирования в [46] такова. Пусть X, Y — две зависимые дискрет-

ные случайные величины со значениями в конечных множествах \mathcal{X} и \mathcal{Y} , соответственно, распределением вероятностей $p_{XY}(x, y)$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$. Пусть заданы также два конечных множества $\hat{\mathcal{X}}$, $\hat{\mathcal{Y}}$ (алфавиты декодеров) и неотрицательные меры искажения $d_1(x, \hat{x})$, $x \in \mathcal{X}$, $\hat{x} \in \hat{\mathcal{X}}$ и $d_2(y, \hat{y})$, $y \in \mathcal{Y}$, $\hat{y} \in \hat{\mathcal{Y}}$. Кодирование и декодирование задается тремя кодирующими функциями $f_{E_0}: \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n \rightarrow I_{M_0}$, $f_{E_1}: \mathcal{X}^n \rightarrow I_{M_1}$, $f_{E_2}: \mathcal{Y}^n \rightarrow I_{M_2}$ и двумя декодирующими функциями $f_{D_1}: I_{M_0} \times I_{M_1} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}^n$, $f_{D_2}: I_{M_0} \times I_{M_2} \rightarrow \hat{\mathcal{Y}}^n$. Такой код имеет параметры $(n, M_0, M_1, M_2, \Delta_X, \Delta_Y)$; здесь Δ_X и Δ_Y — средние искажения $\Delta_X = (1/n) \mathbf{M} \sum_{i=1}^n d_1(X_i, \hat{X}_i)$,

$$\Delta_Y = (1/n) \mathbf{M} \sum_{i=1}^n d_2(Y_i, \hat{Y}_i), \quad \text{где} \quad \hat{X} = f_{D_1}(f_{E_0}(X, Y), f_{E_1}(X)), \\ \hat{Y} = f_{D_2}(f_{E_0}(X, Y), f_{E_2}(Y)).$$

Пусть Δ_1, Δ_2 — два числа. Тройка (R_0, R_1, R_2) называется (Δ_1, Δ_2) -допустимой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует (при достаточно больших n) $(n, M_0, M_1, M_2, \Delta_X, \Delta_Y)$ -код с $M_i \leq 2^{n(R_i + \varepsilon)}$, $i = 0, 1, 2$, $\Delta_X \leq \Delta_1 + \varepsilon$, $\Delta_Y \leq \Delta_2 + \varepsilon$. В [46] описывается область $\mathcal{R}(\Delta_1, \Delta_2)$ всех (Δ_1, Δ_2) -допустимых троек (R_0, R_1, R_2) . Заметим, что если d_1 и d_2 — хэмминговы меры искажения, то область $\mathcal{R}(0, 0)$ есть область допустимых скоростей для задачи кодирования двух источников X, Y с дополнительной информацией $Z = (X, Y)$, и ответ в этом случае выражается через условные энтропии (см. [25], 95]). В рассматриваемом здесь случае ответ выражается похожим образом через условные функции скорость-искажение $R_{X|W}(\Delta)$.

Пусть \mathcal{P} — семейство троек дискретных случайных величин $A = (W, X, Y)$ (W принимает значения в множестве \mathcal{W}) таких, что $\sum_{w \in \mathcal{W}} p_{WXY}(w, x, y) = p_{XY}(x, y)$ для всех $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$. Пусть $R_{X|W}(\Delta_1)$, $R_{Y|W}(\Delta_2)$ — условные функции скорость-искажение (см. [44], [46]), вычисленные по распределению A . Положим $\mathcal{R}_A(\Delta_1, \Delta_2) = \{(R_0, R_1, R_2): R_0 \geq I(X, Y; W), R_1 \geq R_{X|W}(\Delta_1), R_2 \geq R_{Y|W}(\Delta_2)\}$. Основным результатом работы [46] состоит в следующем:

Теорема. $\mathcal{R}(\Delta_1, \Delta_2) = \left[\bigcup_{A \in \mathcal{P}} \mathcal{R}_A(\Delta_1, \Delta_2) \right]^c$.

В работе Бергера и Танга [27] рассматривается задача кодирования k зависимых стационарных непрерывных источников с критерием качества (время предполагается дискретным). Выдвигается гипотеза об описании области искажение-скорость $D(R)$, где $R = (R_1, \dots, R_k)$ — вектор скоростей, $D = (D_1, \dots, D_k)$ — вектор средних искажений. Рассматривается пример

гауссовских источников при среднеквадратичном критерии качества. Приводятся возможные обобщения для источников с памятью.

2.6. Общая информация, содержащаяся в двух зависимых случайных величинах. При исследовании задач о кодировании двух коррелированных источников естественно возникает вопрос о том, что такое общая информация, содержащаяся в двух зависимых случайных величинах. Довольно обычным является использование в этом качестве взаимной информации или максимальной корреляции двух случайных величин (см., например, статью Реньи [67]). В последнее время в связи с задачами кодирования источников возникли еще два варианта понятия общей информации, которые мы сейчас и опишем. Каждый из этих вариантов связан со своей схемой кодирования.

Первый вариант введен в работе Гача и Кернера [41] (см. также [92] для двоичного симметричного случая, [83] и [93], VI—D). Пусть X, Y — две (зависимые) дискретные случайные величины; код с параметрами (n, λ, ρ) (n — натуральное число, λ, ρ — вещественные) состоит из пары отображений $f_1: \mathcal{X}^n \rightarrow I_\infty = \{1, 2, \dots\}$, $f_2: \mathcal{Y}^n \rightarrow I_\infty$, таких, что, полагая $W_1 = f_1(X)$, $W_2 = f_2(Y)$, имеем $(1/n)H(W_1) = \rho$, $\text{Pr}\{W_1 \neq W_2\} \leq \lambda$. Число $R \geq 0$ называется допустимым, если для любого $\lambda > 0$ и достаточно больших n существует (n, λ, ρ) -код с $\rho \geq R$. Общая информация по Гачу и Кернеру $G(X; Y)$, содержащаяся в X и Y , определяется как верхняя грань допустимых R .

В работе Гача и Кернера дается метод вычисления $G(X; Y)$. Основной результат состоит в том, что $G(X; Y) = 0$, если только X и Y не являются детерминистически зависимыми. Точнее, если $G(X; Y) > 0$, то существуют разбиения $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2$ множеств \mathcal{X} и \mathcal{Y} на непересекающиеся подмножества положительной меры такие, что $p_{XY}(x, y) = 0$, когда $x \in \mathcal{X}_i$, $y \in \mathcal{Y}_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2$. В работе Витсенхаузена [83] результат Гача и Кернера обобщен на непрерывные случайные величины. Следует отметить также возможную связь с результатами работ [80], [75] об изоморфизме схем Бернулли.

Другой вариант определения общей информации двух дискретных случайных величин X, Y содержится в работе Вайнера [94]. Он основан на схеме кодирования двух источников, рассмотренной в работе Грея и Вайнера [46] (см. также [45]). Эта схема описывается следующим образом. Пусть $X_1 = X$, $X_2 = Y$ и рассмотрим схему кодирования, характеризуемую параметрами: $k=2, l=3, m=2, B_1 = \{1\}, B_2 = \{2\}, B_3 = \{1, 2\}, \Gamma_1 = \{1, 3\}, \Gamma_2 = \{2, 3\}$. Иначе говоря, мы кодируем X и Y с помощью трех кодеров, причем первые два знают выходы только одного из двух источников, а третий знает выходы обоих источников. Каждый из двух декодеров использует при декодировании выход своего кодера и выход общего (третьего) кодера.

Пусть \mathcal{R} — область допустимых скоростей кодирования. Легко видеть, что для любой точки $(R_1, R_2, R_3) \in \mathcal{R}$ выполнено неравенство $R_1 + R_2 + R_3 \geq H(X, Y)$. Теперь общая информация $C(X; Y)$ двух случайных величин X, Y определяется равенством

$$C(X; Y) = \sup R_3,$$

где верхняя грань берется по точкам $(R_1, R_2, R_3) \in \mathcal{R}$, для которых $R_1 + R_2 + R_3 = H(X, Y)$. В работе Вайнера доказан ряд важных свойств величины $C(X; Y)$.

1. $C(X; Y) = 0$ тогда и только тогда, когда X и Y независимы;
2. $I(X; Y) \leq C(X; Y) \leq \min(H(X), H(Y))$;
3. Если $X = (X', V)$, $Y = (Y', V)$ и X', Y', V независимы, то $C(X; Y) = H(V)$.

4. $C(X; Y) = \inf I(X, Y; W)$, где нижняя грань берется по всем тройкам дискретных случайных величин X, Y, W таким, что
 а) распределение X, Y совпадает с первоначально заданным;
 б) тройка X, W, Y в этом порядке образует цепь Маркова.

При этом можно ограничиться случайными величинами W , для которых $\text{card } \mathcal{W} \leq (\text{card } \mathcal{X})(\text{card } \mathcal{Y})$.

В работе Витсенхаузена [84] содержится подробное исследование величины $C(X; Y)$ с точки зрения теории выпуклых множеств и функций. Ему удается явно вычислить эту величину во многих случаях.

2.7. Связь между энтропией на входе и выходе дискретного канала без памяти. Пусть $T = \{t_{Y|X}(y|x)\}$ — матрица переходных вероятностей дискретного канала без памяти с входным алфавитом \mathcal{X} и выходным алфавитом \mathcal{Y} . Тогда по каждой случайной величине $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ со значениями в множестве \mathcal{X}^n (где X_i не обязательно независимы или одинаково распределены) с помощью этих переходных вероятностей определяется случайная величина $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ со значениями в \mathcal{Y}^n . Важным при исследовании различных систем связи со многими пользователями является вопрос о связи между энтропиями $H(\mathbf{X})$ и $H(\mathbf{Y})$. Этот вопрос решен Вайнером и Зивом в [97] для двоичного симметричного канала, и затем Витсенхаузенom в [82] для произвольного канала. В [86] Вайнер и Витсенхаузен указали применения к теории связи с многими пользователями. Некоторые аналогичные соображения использовались Алсведе и Кернером в [25].

Изложим коротко результаты работы [82]. Для каждого распределения вероятностей p на \mathcal{X} обозначим через Tp соответствующее распределение вероятностей на \mathcal{Y} (т. е. $Tp(y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) t_{Y|X}(y|x)$). Пусть $h(p)$ и $h(Tp)$ — энтропии этих распределений. Определим функцию $g_T(s)$ для $0 \leq s \leq \log(\text{card } \mathcal{X})$ равенством

$$g_T(s) = \min_{h(p) \geq s} \{h(Tp)\}.$$

Пусть $f_T(s)$ — выпуклая оболочка $g_T(s)$, т. е. $f_T(s) = \inf f(s)$, где нижняя грань берется по выпуклым функциям f , для которых $f \geq g_T$.

Теорема Витсенхаузена [82] утверждает теперь, что если \mathbf{X} — случайная величина с произвольным распределением на \mathcal{X}^n , как указано выше, и $(1/n)H(\mathbf{X}) \geq s$, то $(1/n)H(\mathbf{Y}) \geq f_T(s)$.

В той же работе изучается, для каких матриц T функция g_T выпукла и, значит, $f_T = g_T$. Основным результатом работы [97] состоит в том, что это так, если T — матрица переходных вероятностей двоичного симметричного канала.

Оказывается, что g_T выпукла для любого канала с двумя входами и двумя выходами, и, вообще говоря, невыпукла для каналов с большим числом входов или выходов.

§ 3. ОДНОСТОРОННИЕ МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ КАНАЛЫ

3.1 Общая постановка задачи. Аналогично тому, как это делалось для зависимых источников, попытаемся сформулировать задачу о передаче информации по каналу связи с многими компонентами. Сделать это совсем в общем случае довольно затруднительно, поэтому мы ограничимся пока лишь односторонними каналами, т. е. такими каналами, в которых каждая вершина (терминал) является или только передающей или только принимающей. Более общая ситуация будет рассмотрена в следующем параграфе.

Пусть $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_r$ — входные алфавиты, а $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_s$ — выходные алфавиты канала K с r входами и s выходами. Канал задается переходными вероятностями, т. е. набором условных вероятностей $p_{Y_1 \dots Y_s | X_1 \dots X_r}(y_1, \dots, y_s | x_1, \dots, x_r)$. Предполагается, что канал не имеет памяти. Это означает, что при любом n и любых $x_1 \in \mathcal{X}_1^n, \dots, x_r \in \mathcal{X}_r^n, y_1 \in \mathcal{Y}_1^n, \dots, y_s \in \mathcal{Y}_s^n$ переходные вероятности $p_{Y_1 \dots Y_s | X_1 \dots X_r}$ определяются формулой

$$\begin{aligned} & p_{Y_1 \dots Y_s | X_1 \dots X_r}(y_1, \dots, y_s | x_1, \dots, x_s) = \\ & = \prod_{i=1}^n p_{Y_1 \dots Y_s | X_1 \dots X_r}(y_i^1, \dots, y_i^s | x_i^1, \dots, x_i^s), \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

где $x_i^j \in \mathcal{X}_j, y_i^j \in \mathcal{Y}_j$ — i -е компоненты векторов x_j и y_j соответственно.

Далее следует описать, каким образом канал используется. Вообще говоря, в каждом из входов канала имеются сообщения различных типов, в зависимости от того, каким именно выходам они предназначены. Обозначим через Θ множество всех непустых подмножеств индексов $\{1, \dots, s\}$. Пусть для каждого $\theta \in \Theta$ и каждого $i, 1 \leq i \leq r$, заданы целые положительные числа

$M(i, \theta)$. Кодирование для канала K блоками длины n задается набором из r кодирующих отображений $f_{E,i}: \prod_{\theta \in \Theta} I_{M(i,\theta)} \rightarrow \mathcal{X}_i^n$,

$1 \leq i \leq r$. Декодирование для K задается набором декодирующих отображений $f_{D,i,j,\theta}: \mathcal{Y}_j^n \rightarrow I_{M(i,\theta)}$ для $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$ и таких $\theta \in \Theta$, что $j \in \theta$.

Множество $I_{M(i,\theta)}$ можно представить себе как набор сообщений, предназначенных для передачи из i -го входа канала в выходы с номерами $j \in \theta$. Таким образом, всего имеется $r(2^s - 1)$ различных типов сообщений. В различных конкретных случаях сообщения некоторых типов (i, θ) могут отсутствовать; формально в этом случае соответствующие $M(i, \theta)$ равны 1.

Пусть заданы кодирование $\{f_{E,i}\}$ и декодирование $\{f_{D,i,j,\theta}\}$.

Тогда каждому набору сообщений $L = \{l(i, \theta)\} \in \prod_{i,\theta} I_{M(i,\theta)}$ отве-

чает распределение вероятностей на множестве $\prod_{i=1}^s \mathcal{Y}_i^n$ (полученное из условного распределения вероятностей (3.1.1) при $x_i = f_{E,i}(l(i, \theta))$). Назовем величину $p(L) = \Pr\{f_{D,i,j,\theta}(y_i) \neq l(i, \theta)\}$ хотя бы для одной пары (i, θ) вероятностью ошибки при передаче набора сообщений L , а само событие, описанное в фигурных скобках, ошибкой при декодировании набора L .

В задачах исследования помехоустойчивости многокомпонентных каналов связи обычно используют две характеристики метода кодирования и декодирования: максимальную вероятность ошибки $p_{\max} = \max_L p(L)$ и среднюю вероятность ошибки при равномерном распределении сообщений

$$p_e = \left[\prod_{i,\theta} M(i, \theta) \right]^{-1} \left(\sum_L p(L) \right).$$

Обе эти величины зависят от используемого кодирования (отображений $f_{E,i}$) и декодирования (отображений $f_{D,i,j,\theta}$). Ясно, что всегда $p_e \leq p_{\max}$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем использовать среднюю вероятность ошибки.

Набором (или вектором) скоростей передачи называется набор из $r(2^s - 1)$ неотрицательных чисел $R = \{R(i, \theta), \theta \in \Theta, 1 \leq i \leq r\}$. Назовем набор R допустимым для канала K (при использовании средней вероятности ошибки), если для любого $\epsilon > 0$ существуют n , кодирование блоками длины n $\{f_{E,i}\}$ и декодирование $\{f_{D,i,j,\theta}\}$ такие, что

$$M(i, \theta) \geq 2^{n[R(i,\theta) - \epsilon]} \text{ для всех } (i, \theta)$$

$$p_e \leq \epsilon.$$

Обозначим через \mathcal{R} множество всех допустимых наборов R , и назовем \mathcal{R} областью пропускной способности канала K .

Описание области \mathcal{R} и является первой основной задачей при исследовании каналов с многими компонентами (см. [37]).

В столь общем виде эта задача далека от своего решения. Однако, так же как и в задаче кодирования источников, некоторые свойства области \mathcal{R} описываются следующей леммой.

Лемма. (1) \mathcal{R} — замкнутая выпуклая ограниченная область в положительном октанте ($R(i, \theta) \geq 0$) $r(2^s - 1)$ -мерного пространства.

(2) Если $R = \{R(i, \theta)\}$ лежит в \mathcal{R} , то и любая точка $R' = \{R'(i, \theta)\}$, для которой $0 \leq R'(i, \theta) \leq R(i, \theta)$ при всех (i, θ) , также лежит в \mathcal{R} .

Выпуклость \mathcal{R} доказывается использованием разделения времени. Ограниченность \mathcal{R} вытекает из следующего более точного утверждения.

Лемма. Пусть K — канал с многими компонентами, описанный выше, и K' — канал без памяти с одним входом и одним

выходом, имеющий входной алфавит $\prod_{i=1}^r \mathcal{X}_i$, выходной алфавит

$\prod_{i=1}^s \mathcal{Y}_i$ и переходные вероятности $p_{Y_1, \dots, Y_s | X_1, \dots, X_r}(y_1, \dots, y_s | x_1, \dots, x_r)$.

Пусть C — пропускная способность канала K' . Тогда для любой точки $R = \{R(i, \theta)\} \in \mathcal{R}$ выполнено неравенство

$$\sum_{i, \theta} R(i, \theta) \leq C. \quad (3.1.2)$$

Неравенство (3.1.2) является простейшим примером оценки сверху для \mathcal{R} . В следующих параграфах, когда будут описываться отдельные частные классы каналов с многими компонентами, будут приведены и другие более точные оценки.

3.2. Каналы с многократным доступом. Каналы с многократным доступом (multiple-access channels) — это каналы с несколькими входами и одним выходом (т. е. в обозначениях п. 3.1 $r > 1$, $s = 1$). Такие каналы рассматривались в работах [21], [22], [55], [58], где было получено полное описание области пропускных способностей \mathcal{R} . Для формулировки результата обозначим через \mathcal{P} множество распределений вероятностей на $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_r$ вида $p_{X_1, \dots, X_r}(x_1, \dots, x_r) = p_{X_1}(x_1) \dots p_{X_r}(x_r)$. Пусть σ — некоторая перестановка индексов $\{1, \dots, r\}$ и $p \in \mathcal{P}$. Введем вектор $R(\sigma, p) = (R_1, \dots, R_r)$, полагая

$$\begin{aligned} R_{\sigma(1)} &= I(X_{\sigma(1)}; Y), \quad R_{\sigma(2)} = I(X_{\sigma(2)}; Y | X_{\sigma(1)}), \dots, R_{\sigma(r)} = \\ &= I(X_{\sigma(r)}; Y | X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r-1)}). \end{aligned}$$

Пусть \mathcal{R}' — выпуклая оболочка множества всех векторов $R(\sigma, p)$ для всех перестановок σ и всех $p \in \mathcal{P}$.

Теорема. Область \mathcal{R} пропускной способности канала с многократным доступом совпадает с \mathcal{R}' .

Эта теорема была доказана Алсведе [21] для канала с двумя и тремя входами. Одновременно ван дер Мейлен [58] дал верхние и нижние границы для \mathcal{R} и рассмотрел ряд примеров. Ляо [55] и Алсведе [22] доказали теорему для канала с любым числом выходов.

Доказательство сформулированной теоремы не особенно сложно. Доказательство прямой части (т. е. того, что любой набор скоростей внутри \mathcal{R} является допустимым) производится методом случайного кодирования. При этом перестановка σ указывает, в каком порядке нужно производить декодирование. А именно, получатель с номером $\sigma(i)$ декодирует сперва сообщение от источников с номерами $\sigma(1), \dots, \sigma(i-1)$, а затем уже декодирует сообщение от источника с номером $\sigma(i)$.

Более сложным является доказательство обращения (т. е. того, что никакой набор вне \mathcal{R} не является допустимым). Первоначальное доказательство Алсведе [21] было громоздким. Ван дер Мейлен [60] упростил некоторые рассуждения [21]. Позднее Алсведе дал ([22]) еще более простое доказательство. Рассматривались также непрерывные каналы с многократным доступом [77]. Простое решение задачи определения области пропускных способностей для гауссовского случая содержится в работе Вайнера [93], VI—A (см. также [36]).

В работе Слепьяна и Вулфа [77] изучалась схема передачи по каналу с многократным доступом, не укладывающаяся в общую схему п. 3.1. Для описания их подхода мы ограничимся простейшим случаем канала с двумя входами и одним выходом. В этом случае схема Слепьяна и Вулфа содержит три набора сообщений $I_{M_0}, I_{M_1}, I_{M_2}$, которые нужно восстановить на выходе канала, и две кодирующие функции $f_{E_1}: I_{M_0} \times I_{M_1} \rightarrow \mathcal{X}_1^n$ и $f_{E_2}: I_{M_0} \times I_{M_2} \rightarrow \mathcal{X}_2^n$. Таким образом, сообщение $i_0 \in I_{M_0}$ кодируется и передается по обоим компонентам канала, а сообщения $i_1 \in I_{M_1}$ и $i_2 \in I_{M_2}$ — по одной компоненте каждое. Декодирующая функция f_D отображает \mathcal{Y}^n в $I_{M_0} \times I_{M_1} \times I_{M_2}$. Средняя вероятность ошибки (при равномерном распределении сообщений из $I_{M_0} \times I_{M_1} \times I_{M_2}$) и область $\mathcal{R} = \{(R_0, R_1, R_2)\}$ пропускных способностей определяется так же, как в п. 3.1.

В работе Гаардера и Вулфа [40] рассматривалось влияние обратной связи на помехоустойчивость каналов с многократным доступом. Как известно, введение обратной связи в обычный канал без памяти с одним входом и одним выходом не увеличивает его пропускной способности. Рассматривая один простой пример, Вулф и Гаардер показали, что введение бесшумной

обратной связи, которая дает возможность на каждом из входов узнать выходной символ, увеличивает область пропускных способностей канала без памяти с многократным доступом. Это можно объяснить тем, что обратная связь устанавливает зависимость между входами. Эффект введения обратной связи для произвольного канала с многократным доступом пока не изучен.

Отметим еще, что об области пропускной способности \mathcal{R}^* при использовании максимальной вероятности ошибки почти ничего не известно. По-видимому, она, вообще говоря, не совпадает с \mathcal{R} .

В некоторых случаях исследовалась вероятность ошибки декодирования при передаче по каналу с многократным доступом. В работе Слепяна и Вулфа [77] получена верхняя оценка вероятности ошибки при передаче по каналу с многократным доступом (с двумя компонентами) при коррелированных сообщениях. Такой же канал исследовался в работах Е. А. Арутюняна [1], Шарма [74] и Охкубо [64]. В [1] получена оценка снизу для вероятности ошибки декодирования в таком канале, хотя и не совпадающая с верхней оценкой из [77]. В [74] и [64] рассмотрен метод декодирования, при котором возможен отказ от декодирования (стирание). Получены верхние оценки для вероятности ошибки декодирования и стирания.

В работе Касами и Лина [50] рассмотрен канал с многократным доступом, имеющий два двоичных входа и троичный выход. Для этого канала введено понятие кодового расстояния и кода, исправляющего фиксированное число ошибок. На основе кодов Рида—Соломона построены коды для такого канала, исправляющие одну и две ошибки.

3.3: Широковещательные каналы. Общий случай. Широковещательные каналы, введенные в рассмотрение Ковером [33]—это многокомпонентные каналы с одним входом (т. е. в обозначениях раздела 3.1 $r=1$, $s>1$). При этом в большинстве работ, относящихся к широковещательным каналам, рассматривается простейший случай, когда число выходов такого канала $s=2$. Такой широковещательный канал задается множеством переходных вероятностей $p_{YZ|X}(y, z|x)$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$, $z \in \mathcal{Z}$, где \mathcal{X} —входной, а \mathcal{Y} и \mathcal{Z} —выходные алфавиты канала. Так как выходы с алфавитами \mathcal{Y} и \mathcal{Z} расположены в разных терминалах (которые не сообщаются между собой), то все характеристики такого канала определяются лишь маргинальными распределениями $p_{Y|X}(y|x) = \sum_{z \in \mathcal{Z}} p_{YZ|X}(y, z|x)$ и $p_{Z|X}(z|x) =$

$$= \sum_{y \in \mathcal{Y}} p_{YZ|X}(y, z|x).$$

3.1 величина θ здесь может принимать три значения: $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{1, 2\}$, т. е. предполагается, что по такому каналу должны быть переданы сообщения трех типов: M_i сообщений из мно-

жеств I_{M_i} (частная информация), $i=1, 2$, предназначенные i -му приемнику, и M_0 сообщений из множества I_{M_0} (общая информация), предназначенные обоим приемникам. Область пропускной способности \mathcal{R} такого широкополосного канала — это совокупность всех допустимых троек скоростей $R=(R_1, R_2, R_0)$. Обозначим через \mathcal{R}_I и \mathcal{R}_{II} сечение \mathcal{R} плоскостями $R_0=0$ и $R_2=0$ соответственно. \mathcal{R}_I (\mathcal{R}_{II}) является областью пропускной способности широкополосного канала в случае, когда отсутствует общая информация (информация для второго приемника), т. е. $M_0=1$ ($M_2=1$), и совпадает с множеством допустимых троек вида $R=(R_1, R_2, 0)$ ($R=(R_1, 0, R_0)$). В дальнейшем для краткости будем писать (R_1, R_2) вместо $(R_1, R_2, 0)$ и (R_1, R_0) вместо $(R_1, 0, R_0)$. Легко видеть, что всегда $\mathcal{R}_{II} \subset \mathcal{R}_I$.

Обозначим, наконец, через \mathcal{R}^* , \mathcal{R}_I^* и \mathcal{R}_{II}^* — соответствующие области пропускной способности при использовании максимальной (а не средней, как предполагалось выше) вероятности ошибки. Бергманс [28] показал, что $\mathcal{R}_I = \mathcal{R}_I^*$. Из этого факта вытекает, в частности, что для ухудшенных широкополосных каналов (см. раздел 3.4) $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$, хотя для общих широкополосных каналов это и не доказано.

Рассмотрим сначала задачу нахождения области \mathcal{R} . В настоящее время известно выражение \mathcal{R} с помощью некоторого предельного соотношения (см. [61]), но простой характеристики области \mathcal{R} пока не получено. Ковер [35] и ван дер Мейлен [61] независимо нашли для \mathcal{R} нижнюю границу, имеющую относительно простой вид. Гипотеза состоит в том, что эта нижняя граница на самом деле совпадает с областью \mathcal{R} . Приведем выражение для этой нижней границы, данное Ковером [35].

Рассмотрим вспомогательные случайные величины U_1 , U_2 и U_0 , принимающие значения в некоторых конечных множествах \mathcal{U}_1 , \mathcal{U}_2 и \mathcal{U}_0 с распределениями вероятностей $p_{U_i}(u_i)$, $i=1, 2, 0$. Каждому отображению $h: \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{X}$ и распределениям $p_{U_i}(u_i)$, $i=1, 2, 0$, сопоставим совместное распределение $p_{U_1 U_2 U_0 Y Z}(u_1, u_2, u_0, y, z)$ случайных величин U_1, U_2, U_0, Y, Z , вычисляемое по формуле

$$\begin{aligned} & p_{U_1 U_2 U_0 Y Z}(u_1, u_2, u_0, y, z) = \\ & = p_{U_1}(u_1) p_{U_2}(u_2) p_{U_0}(u_0) p_{YZ|X}(y, z | h(u_1, u_2, u_0)), \end{aligned}$$

где $p_{YZ|X}(y, z | x)$ — набор переходных вероятностей канала.

Пусть $\mathcal{R}(p_{U_1}, p_{U_2}, p_{U_0}, h)$ — множество троек (R_1, R_2, R_0) , удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{aligned} 0 & \leq R_1 \leq I(U_1; U_0, Y), \\ 0 & \leq R_2 \leq I(U_2; U_0, Z), \end{aligned}$$

$$0 \leq R_0 \leq \min \{I(U_0; U_1, Y), I(U_0; U_2, Z)\},$$

$$R_1 + R_0 \leq I(U_1, U_0; Y),$$

$$R_2 + R_0 \leq I(U_2, U_0; Z).$$

Пусть далее, $\mathcal{R}' = [\text{co}(\cup \mathcal{R}(p_{U_1}, p_{U_2}, p_{U_0}, h))]^c$, где объединение берется по всевозможным конечным множествам U_i , по всем p_{U_i} и h (напомним, что «со» обозначает выпуклую оболочку).

Результат Ковера [35] и ван дер Мейлена [61] состоит в том, что $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$. Этот результат, как уже отмечалось выше, был доказан независимо и разными методами Ковером [35] и ван дер Мейленом [61], который привел характеризацию \mathcal{R}' в несколько иных терминах. При этом, однако, неизвестно, изменится ли область \mathcal{R}' , если ограничиться рассмотрением множеств \mathcal{U}_1 , \mathcal{U}_2 и \mathcal{U}_0 с ограниченным числом элементов, и каково должно быть это число в благоприятном случае. Ковер и ван дер Мейлен высказали предположение, что достаточно рассматривать множества \mathcal{U}_1 , \mathcal{U}_2 и \mathcal{U}_0 со следующим числом элементов: $\text{card } \mathcal{U}_1 \leq \min(\text{card } \mathcal{X}, \text{card } \mathcal{Y})$, $\text{card } \mathcal{U}_2 \leq \min(\text{card } \mathcal{X}, \text{card } \mathcal{Z})$, $\text{card } \mathcal{U}_0 \leq \min(\text{card } \mathcal{X}, \text{card } \mathcal{Y}, \text{card } \mathcal{Z})$. Ковер [35] высказал также предположение, что достаточно рассматривать отображения h следующего вида: $h(u_1, u_2, u_0) = u_1 + u_2 + u_0 \pmod{\text{card } \mathcal{X}}$.

Ван дер Мейлен [61] получил выражение \mathcal{R} в следующей предельной форме $\mathcal{R} = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (1/n) \mathcal{R}'(K^n) \right]^c$, где $\mathcal{R}'(K^n)$ — нижняя граница для области пропускной способности $\mathcal{R}(K^n)$, полученная описанным выше способом для канала K^n — n -кратного произведения рассматриваемого широкополосного канала K (алфавитами на входе и выходе канала K^n служат соответственно множества \mathcal{X}^n , \mathcal{Y}^n и \mathcal{Z}^n , а переходные вероятности $p_{YZ|X}(y, z|x)$ задаются равенством

$$p_{YZ|X}(y, z|x) = \prod_{i=1}^n p_{Y_i|Z_i X}(y^i, z^i|x^i),$$

где x^i , y^i , z^i — i -тые координаты векторов $x \in \mathcal{X}^n$, $y \in \mathcal{Y}^n$ и $z \in \mathcal{Z}^n$ соответственно).

Ввиду того, что простое выражение для \mathcal{R} не найдено, интерес представляет изучение более простых областей \mathcal{R}_I и \mathcal{R}_{II} . Приведем сначала результаты, касающиеся изучения \mathcal{R}_I .

Нижняя граница \mathcal{R}'_I для \mathcal{R}_I может быть легко получена с помощью сечения плоскостью $R_0 = 0$ области \mathcal{R}' , описанной выше. Ван дер Мейлен [61] привел более простое описание \mathcal{R}'_I . Оно состоит в следующем. Пусть снова \mathcal{U}_1 и \mathcal{U}_2 — вспомогатель-

ные конечные множества и U_1 и U_2 — случайные величины со значениями в этих множествах и распределениями вероятностей $p_{U_1}(u_1)$ и $p_{U_2}(u_2)$, соответственно. Определим снова совместное распределение $p_{U_1 U_2 Y Z}(u_1, u_2, y, z)$ случайных величин U_1, U_2, Y, Z равенством $p_{U_1 U_2 Y Z}(u_1, u_2, y, z) = p_{U_1}(u_1) p_{U_2}(u_2) p_{YZ|X}(y, z|h(u_1, u_2))$ при заданном отображении $h: \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{X}$. Тогда \mathcal{R}_1 совпадает с выпуклой оболочкой пар (R_1, R_2) таких, что $0 \leq R_1 \leq I(U_1; Y)$, $0 \leq R_2 \leq I(U_2; Z)$, где количества информации $I(\cdot; \cdot)$ вычисляются на основе совместного распределения $p_{U_1 U_2 Y Z}(u_1, u_2, y, z)$ при всевозможных распределениях $p_{U_1}(u_1)$, $p_{U_2}(u_2)$ и отображениях h .

Известна следующая верхняя граница \mathcal{R}_1^* для \mathcal{R}_1 . Пусть \mathcal{P}' — множество условных распределений вероятностей $p'_{YZ|X}(y, z|x)$, маргинальные распределения для которых совпадают с переходными вероятностями $p_{Y|X}(y|x)$ и $p_{Z|X}(z|x)$ канала K . Пусть далее \mathcal{P} — множество всевозможных распределений вероятностей $p_X(x)$ на \mathcal{X} . Для $p \in \mathcal{P}$, $p' \in \mathcal{P}'$ рассмотрим область $\mathcal{R}(p, p')$ пар (R_1, R_2) таких, что $0 \leq R_1 \leq I(X; Y)$, $0 \leq R_2 \leq I(X; Z)$, $R_1 + R_2 \leq I(X; Y, Z)$. Пусть $\mathcal{R}(p') = \text{co} \left(\bigcup_p \mathcal{R}(p, p') \right)$ и $\mathcal{R}_1^* = \bigcap_{p'} \mathcal{R}(p')$.

В работе Сато [69] утверждается, что \mathcal{R}_1^* является верхней границей для \mathcal{R}_1 , т. е. $\mathcal{R}_1^* \supset \mathcal{R}_1$. Этот результат улучшает более раннюю верхнюю границу Ковера [33].

В некоторых случаях верхняя граница Сато оказывается точной. Так будет, например, для широкополосного канала, рассмотренного Блекуэллом (см. [61]), который относится к важному классу широкополосных каналов без шума. Канал Блекуэлла K имеет трюичный вход ($\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$) и два двоичных выхода ($\mathcal{Y} = \mathcal{Z} = \{0, 1\}$). При этом символы y, z на выходе канала определяются по символу x на входе следующим образом: если $x = 0$ или 1 , то $y = z = x$, если $x = 2$, то $y = 0, z = 1$. В работе С. И. Гельфанда [3] найдена область \mathcal{R}_1 для этого канала. При этом построение кодов для K основано на конструкции кодов, исправляющих дефекты (см. п. 5.4).

Приведем теперь результаты, касающиеся описания области \mathcal{R}_{11} . В отличие от \mathcal{R} и \mathcal{R}_1 , для \mathcal{R}_{11} известна простая характеристика. Пусть $p_{Y|X}(y|x)$ и $p_{Z|X}(z|x)$ — маргинальные распределения вероятностей, задающих рассматриваемый широкополосный канал. Введем в рассмотрение вспомогательную случайную величину U с распределением $p_U(u)$, определенную на некотором конечном множестве \mathcal{U} . Пусть $p_{X|U}(x|u)$ — некоторое условное распределение (задающее «тест-канал»). Определим совместные распределения $p_{UXY}(u, x, y)$ и $p_{UXZ}(u, x, z)$ случайных величин U, X, Y и U, X, Z , соответственно, с

помощью равенств:

$$p_{UXY}(u, x, y) = p_U(u) p_{X|U}(x|u) p_{Y|X}(y|x),$$

$$p_{UXZ}(u, x, z) = p_U(u) p_{X|U}(x|u) p_{Z|X}(z|x).$$

По этим распределениям можно вычислить следующие количества информации: $I(X; Y|U)$, $I(U; Z)$ и $I(X; Y)$. Обозначим через $\mathcal{R}(p_U, p_{X|U})$ множество всех пар (R_1, R_0) таких, что $0 \leq R_1 \leq I(X; Y|U)$, $0 \leq R_0 \leq I(U; Z)$, $R_1 + R_0 \leq I(X; Y)$. Тогда

$$\mathcal{R}_{II} = \bigcup_{p_U, p_{X|U}} \mathcal{R}(p_U, p_{X|U}).$$

При этом достаточно рассматривать множества \mathcal{U} с $\text{card } \mathcal{U} \leq \leq \min(\text{card } \mathcal{X}, \text{card } \mathcal{Y}, \text{card } \mathcal{Z})$. Этот результат доказан в работе Кернера и Мартон [54]. Ранее Г. Ш. Полтырев [14] получил характеризацию \mathcal{R}_{II} с помощью некоторого предельного соотношения. Ван дер Мейлен [61] получил эквивалентную описанной выше характеризацию \mathcal{R}_{II} , но в несколько иных терминах. Он доказал лишь прямую теорему кодирования, установив тем самым, что указанная область является нижней границей \mathcal{R}_{II} . Позднее ван дер Мейлен [62] заметил, что третье условие $R_1 + R_0 \leq I(X; Y)$, входящее в определение $\mathcal{R}(p_U, p_{X|U})$, можно заменить условием $0 \leq R_0 \leq I(U; Y)$.

Отметим еще, что в работе Познера [66] рассматривается связь между некоторыми комбинаторными задачами и задачей передачи информации по широкополосному каналу.

Многокомпонентные каналы с непрерывным временем рассматривались, по существу, еще в работах В. Л. Стефанюка и М. Л. Цетлина [16], [17]. В работе Бергманса и Ковера [30] рассматриваются методы передачи сообщений от одного приемника к двум передатчикам при наличии аддитивного белого гауссовского шума. Предполагается, что заданы общая энергия передачи по обоим каналам и общая ширина полосы частот W . Пусть N_1 и N_2 — спектральные плотности шума при передаче к первому и второму приемникам. Авторы [30] рассматривают сперва различные стандартные методы передачи (разделение времени; разделение мощности или частоты, причем сигнал к каждому передатчику рассматривается другим передатчиком как дополнительный шум). Затем они приводят схему кодирования, аналогичную кодированию для ухудшенного широкополосного канала (см. п. 3.4). Этот последний метод оказывается наилучшим.

3.4. Ухудшенные широкополосные каналы. Важным классом широкополосных каналов, для которых область пропускной способности определена точно, является класс ухудшенных широкополосных каналов. Широкополосный ка-

нал K с входным алфавитом \mathcal{X} , выходными алфавитами \mathcal{Y} , \mathcal{Z} и матрицами переходных вероятностей $p_{Y|X}(y|x)$ и $p_{Z|X}(z|x)$ называется ухудшенным (точнее вторая компонента K хуже первой), если существует матрица переходных вероятностей $p_{Z|Y}(z|y)$ такая, что

$$p_{Z|X}(z|x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} p_{Z|Y}(z|y) p_{Y|X}(y|x), \quad x \in \mathcal{X}, z \in \mathcal{Z}.$$

Понятие ухудшенного широковещательного канала было введено Ковером [33]. Это соотношение наглядно означает, что вторую компоненту канала K можно представлять в виде каскада из двух каналов, одним из которых (первым) является первая компонента K . При этом вторая компонента имеет меньшую пропускную способность, что сразу следует из результатов Шеннона [72] о частичном упорядочении каналов.

Для ухудшенных широковещательных каналов справедливо следующее утверждение:

$$((R_1, R_2, R_0) \in \mathcal{R}) \Leftrightarrow ((R_1, R_2 + R_0) \in \mathcal{R}_I) \Leftrightarrow ((R_1, R_2 + R_0) \in \mathcal{R}_{II})$$

(определение \mathcal{R} , \mathcal{R}_I и \mathcal{R}_{II} см. в разделе 3.3). Это утверждение легко следует из того, что на выходе лучшей компоненты широковещательного канала мы фактически знаем символы, полученные на выходе ухудшенной компоненты, так как имеем возможность моделировать их с помощью канала $p_{Z|Y}(z|y)$. Таким образом, для характеристики \mathcal{R} достаточно узнать характеристику \mathcal{R}_I или \mathcal{R}_{II} . Поскольку известна простая характеристика \mathcal{R}_{II} в случае общих широковещательных каналов, то тем самым задача простой характеристики области пропускной способности \mathcal{R} ухудшенных широковещательных каналов решена. Однако, исторически первое описание области \mathcal{R} для ухудшенных широковещательных каналов было получено раньше и в несколько других терминах. В частности, описывается область \mathcal{R}_I , а не \mathcal{R}_{II} . Приведем это описание.

Рассмотрим вспомогательный канал с входным алфавитом \mathcal{U} , выходным — \mathcal{X} и переходными вероятностями $p_{X|U}(x|u)$. Рассмотрим совместное распределение $p_{UXYZ}(u, x, y, z)$ случайных величин U, X, Y, Z , определяемое равенством

$$p_{UXYZ}(u, x, y, z) = p_U(u) p_{X|U}(x|u) \cdot p_{Y|X}(y|x) \cdot p_{Z|Y}(z|y),$$

где $p_U(u)$ — некоторое распределение на \mathcal{U} . Пусть $\mathcal{R}(p_U, p_{X|U})$ — совокупность пар (R_1, R_2) , удовлетворяющих условиям

$$0 \leq R_1 \leq I(X; Y|U), \quad 0 \leq R_2 \leq I(U; Z)$$

(указанные количества информации вычисляются на основе

определенного выше совместного распределения p_{UXYZ}). Положим

$$G = \bigcup_{p_U, p_{X|U}} \mathcal{R}(p_U, p_{X|U}).$$

Теорема. Для ухудшенных широкополосных каналов $\mathcal{R}_1 = G$.

Сначала Бергманс [28] показал, что $G \subset \mathcal{R}_1$, установив для этого случая теорему кодирования (предположение о том, что $G \subset \mathcal{R}_1$, высказал еще Ковер [33]). Затем слабое обращение теоремы кодирования доказал Галлагер [2], правда Галлагер рассматривал со G — выпуклую оболочку G , оставив открытым вопрос о том, является ли сама область G выпуклой. При этом Галлагер показал, что в определении G достаточно ограничиться рассмотрением \mathcal{U} , для которых $\text{card } \mathcal{U} \leq \leq \min(\text{card } \mathcal{X}, \text{card } \mathcal{Y}, \text{card } \mathcal{Z})$. Отметим также, что обращение теоремы кодирования было доказано Галлагером даже для случая зависимых источников. Кроме того, Галлагер получил оценку для вероятности ошибки декодирования и, в частности, доказал экспоненциальное стремление к нулю вероятности ошибки вместе с ростом длины блочного кода для скоростей (R_1, R_2) , лежащих внутри \mathcal{R}_1 . Выпуклость области G была установлена Алсведе и Кернером [25] и тем самым была доказана приведенная выше теорема о том, что $\mathcal{R}_1 = G$.

Важным примером ухудшенного широкополосного канала является двоичный симметричный широкополосный канал, определяемый как канал, компоненты которого являются обычными двоичными симметричными каналами. Легко видеть, что у такого канала одна из компонент всегда является ухудшенной версией другой. Изучение \mathcal{R}_1 для этих каналов было начато в работах Ковера [33] и Бергманса [28], которые показали, что множество пар (R_1, R_2) таких, что $0 \leq R_1 \leq h(q * p_1) - h(p_1)$, $0 \leq R_2 \leq 1 - h(q * p_2)$, достижимо. Здесь q — параметр, пробегающий значения от 0 до 1/2, p_1 и p_2 , $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1/2$ — вероятности ошибок компонент канала, $q * p = q(1-p) + p(1-q)$ и $h(p) = -p \log p - (1-p) \log(1-p)$. (Ковер рассматривал случай $p_1 = 0$). Слабое обращение теоремы кодирования для этого случая было доказано Вайнером [92]. Это доказательство было основано на некотором соотношении между энтропиями на входе и выходе двоичного симметричного канала, установленного в совместной работе Вайнера и Зива [97], которое было затем обобщено для произвольного дискретного канала без памяти Вистенхаузеном и Вайнером [86] и Алсведе и Кернером [25] (см. раздел 2.7).

В работе Алсведе, Гача и Кернера [24] доказано сильное обращение теоремы кодирования для ухудшенных широкополосных каналов. Их доказательство основано на весьма общем комбинаторном результате Г. А. Маргулиса [7].

Понятие ухудшенного широковещательного канала, введенное для случая широковещательного канала с двумя выходами, может быть легко обобщено для случая канала с произвольным числом выходов. Многие результаты, сформулированные в этом разделе, также могут быть перенесены на этот более общий случай (см., например, работу Бергманса [28]).

Важный класс широковещательных каналов рассмотрел Г. Ш. Полтырев [15]. Пусть имеются два широковещательных канала K_1 и K_2 . Пусть канал K_i , $i=1, 2$, имеет входной алфавит \mathcal{X}_i , выходные алфавиты \mathcal{Y}_i , \mathcal{Z}_i и матрицы переходных вероятностей $p_{Y_i|X_i}(y_i|x_i)$, $p_{Z_i|X_i}(z_i|x_i)$. Параллельным широковещательным каналом с компонентами K_1, K_2 называется канал K с входным алфавитом $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, выходными алфавитами $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2$ и $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \times \mathcal{Z}_2$ и матрицами переходных вероятностей $p_{Y|X}(y|x) = p_{Y_1|X_1}(y_1|x_1)$, $p_{Y_2|X_2}(y_2|x_2)$ и $p_{Z|X}(z|x) = p_{Z_1|X_1}(z_1|x_1)$, $p_{Z_2|X_2}(z_2|x_2)$ для $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}$, $y = (y_1, y_2) \in \mathcal{Y}$, $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{Z}$.

Пусть каждый из каналов K_1, K_2 является ухудшенным. Если они ухудшены в одну сторону, т. е. в первом канале компонента $\mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1$ хуже $\mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1$, а во втором канале $\mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$ хуже $\mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$ или наоборот, то и канал K тоже будет ухудшенным, и его область пропускной способности была описана выше. В противном случае каналы K_1 и K_2 ухудшают в разные стороны, и канал K не будет ухудшенным. Область \mathcal{R}_1 пропускной способности в отсутствие общей информации для такого канала описана Г. Ш. Полтыревым. Ясно, что если $\mathcal{R}_1^{(1)}$ и $\mathcal{R}_1^{(2)}$ — области пропускной способности для K_1 и K_2 , и $(R_1^{(1)}, R_2^{(1)}) \in \mathcal{R}_1^{(1)}$, $(R_1^{(2)}, R_2^{(2)}) \in \mathcal{R}_1^{(2)}$, $i=1, 2$, то $(R_1^{(1)} + R_1^{(2)}, R_2^{(1)} + R_2^{(2)}) \in \mathcal{R}_1$. В [15] доказано, что никакие другие точки в \mathcal{R}_1 не входят. Доказательство этого факта оказалось неожиданно непростым. В частности, оно не обобщается на параллельный широковещательный канал с произвольными компонентами K_1, K_2 . Кроме того, неизвестно, верно ли аналогичное описание для области \mathcal{R} , даже в случае, когда K_1 и K_2 — ухудшенные широковещательные каналы. В [15] для \mathcal{R} приведена граница сверху.

В работах [29, 36] рассматривались непрерывные широковещательные каналы с дискретным временем, у которых каждая компонента является каналом с аддитивным гауссовским шумом. Такой канал всегда является ухудшенным. А именно, если N_1 и N_2 — мощности шума в первой и второй компоненте, и $N_1 < N_2$, то вторая компонента канала является ухудшенным вариантом первой. Если средняя мощность сигнала на входе ограничена некоторой константой E , Бергманс [29] доказал, что область пропускной способности описывается парами скоростей (R_1, R_2) , удовлетворяющими условиям

$$\begin{aligned} 0 &\leq R_1 \leq g(N_1 + \alpha E) - g(N_1), \\ 0 &\leq R_2 \leq g(N_2 + E) - g(N_2 + \alpha E) \end{aligned}$$

при некотором $0 \leq \alpha \leq 1$; здесь $g(E) = (1/2) \log_2 \pi e E$. Достижимость указанной области ранее установил Ковер [36], а затем Бергманс [29] доказал слабое обращение, существенно используя неравенство Шеннона для энтропийных мощностей (см. [31]), для канала с произвольным числом выходов. Все эти результаты следуют также из общей теоремы Галлагера.

Понятие ухудшенного широковещательного канала естественно приводит к введению в множество обычных дискретных каналов без памяти (с одним входом и одним выходом) частичного упорядочения (см. также [72]). А именно, пусть K_1 и K_2 — два канала с одним и тем же входным алфавитом \mathcal{X} и переходными вероятностями $p_{Y|X}(y|x)$, $p_{Z|X}(z|x)$, соответственно. Тогда $K_1 \rightarrow K_2$, если существует матрица переходных вероятностей $p_{Z|Y}(z|y)$ такая, что выполнено соотношение (3.4.1). Легко видеть, что \rightarrow задает частичное упорядочение, если отождествить между собой все каналы, получающиеся друг из друга перестановкой букв выходного алфавита.

Кернер и Мартон [53] ввели еще два частичных упорядочения в множество дискретных каналов без памяти. Пусть снова K_1 и K_2 — два таких канала, \mathcal{X} — общий входной алфавит, \mathcal{Y} , \mathcal{Z} — выходные алфавиты. Канал K_1 называется менее зашумленным (less noisy), чем K_2 , если для любого конечного множества \mathcal{U} и любого распределения вероятностей $p_U(u)$, $u \in \mathcal{U}$, и любого набора условных распределений вероятностей $p_{X|U}(x|u)$, $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{U}$, выполнено неравенство $I(U; Y) \geq I(U; Z)$. Канал K_1 называется более способным (more capable), чем K_2 , если для любого распределения вероятностей $p_X(x)$ на \mathcal{X} выполнено неравенство $I(X; Y) \geq I(X; Z)$. Ясно, что $\{K_2 \text{ является ухудшенной версией } K_1\} \Rightarrow \{K_1 \text{ менее зашумленной, чем } K_2\} \Rightarrow \{K_1 \text{ более способный, чем } K_2\}$. Кернер и Мартон привели пример, показывающий, что первое и второе упорядочения в этой цепочке не совпадают. А именно, пусть $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{Z} = \{0, 1\}$ и матрицы переходных вероятностей K_1 и K_2 равны

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ p+\delta & 1-p-\delta \end{pmatrix}, \quad B = A \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -\varepsilon \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad 0 < p < 1/2, \quad \varepsilon, \delta > 0,$$

соответственно. Тогда при достаточно малых ε, δ канал K_1 будет менее зашумленным, чем K_2 , но K_2 не будет ухудшенной версией K_1 . Они предположили также, что второе и третье упорядочения также не совпадают.

При применении описанных результатов к широковещательным каналам Кернер и Мартон показали, что данное Бергмансом и Галлагером описание области пропускной способности \mathcal{R}_1 справедливо не только в том случае, когда одна из компонент широковещательного канала является ухудшенной версией другой, но и тогда, когда одна из компонент менее зашумлена, чем

другая. Приведенный выше пример показывает, что это расширяет класс разобранных широкополосных каналов.

3.5. Общие многокомпонентные каналы. Каналы, имеющие больше одного входа и больше одного выхода, изучены совсем плохо. Практически ни в одном нетривиальном случае неизвестно описание области \mathcal{R} допустимых скоростей передачи. В большинстве работ, посвященных этому вопросу, описывается пересечение области \mathcal{R} с различными координатными гиперплоскостями.

Наиболее значительное продвижение в этом направлении содержится в работе Алсведе [22] и последующей работе Ульри [81]. В работе Алсведе рассматривается дискретный канал без памяти с двумя входами и двумя выходами. Предполагается, что сообщения, передаваемые каждым источником, должны быть восстановлены обоими приемниками независимо друг от друга. Другими словами, в обозначениях п. 3.1, $r=s=2$, и ищется пересечение $\tilde{\mathcal{R}}$ области \mathcal{R} допустимых скоростей передачи с двумерной координатной плоскостью $(R(1, \{1, 2\}), R(2, \{1, 2\}))$.

Сформулированная задача была решена Алсведе [22]. Его ответ описывается следующим образом. Пусть \mathcal{P} — множество всех пар распределений вероятностей $p_{X_1}(x_1)$ на \mathcal{X}_1 и $p_{X_2}(x_2)$ на \mathcal{X}_2 . Каждая пара $(p_{X_1}, p_{X_2}) \in \mathcal{P}$ вместе с переходными вероятностями нашего канала K задает совместное распределение вероятностей на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2$. Рассмотрим множество $\mathcal{R}(p_{X_1}, p_{X_2})$ на плоскости (R_1, R_2) , состоящее из пар, удовлетворяющих следующим неравенствам:

$$0 \leq R_1 \leq \min \{I(X_1; Y_1 | X_2), I(X_1; Y_2 | X_2)\},$$

$$0 \leq R_2 \leq \min \{I(X_2; Y_1 | X_1), I(X_2; Y_2 | X_1)\},$$

$$R_1 + R_2 \leq \min \{I(X_1, X_2; Y_1), I(X_1, X_2; Y_2)\}.$$

Алсведе [21] доказал, что $\tilde{\mathcal{R}} = \bigcup_{\mathcal{P}} \mathcal{R}(p_{X_1}, p_{X_2})$ (если $R_1 = R(1, \{1, 2\})$, $R_2 = R(2, \{1, 2\})$). Доказательство легко сводится к описанию области допустимых скоростей передачи для канала с многократным доступом.

Ульри [81] обобщил результат Алсведе, предположив, что имеется канал K с любым числом r входов и любым числом s выходов, и каждый из s источников посылает одну и ту же информацию по каналу K каждому из r приемников. Он описал для этого случая область всех допустимых скоростей передачи.

Более трудной представляется задача определения допустимых скоростей передачи в случае, когда сообщения, передаваемые каждым источником, предназначены только для одного передатчика. Другими словами, ищется пересечение

$\tilde{\mathcal{R}}$ области допустимых скоростей передачи с двумерной координатной плоскостью ($R(1, \{1\}), R(2, \{2\})$). Такая задача называется иногда задачей о канале с интерференцией. Полное описание $\tilde{\mathcal{R}}$ до сих пор неизвестно. В обзоре ван дер Мейлена [62] приводятся некоторые результаты о границах для $\tilde{\mathcal{R}}$. По-видимому, единственный нетривиальный случай разобран в заметке Карлейла [32]. Он относится к аддитивному интерференционному каналу с аддитивным гауссовским шумом, причем интерференция предполагается сильной. Для такого канала $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \mathcal{Y} = \mathcal{Z} = \mathbf{R}$ (вещественные числа). Сигналы Y_1, Y_2 на выходах канала связаны с сигналами X_1, X_2 на входах канала соотношениями

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + Z_1, \\ Y_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + Z_2, \end{aligned}$$

где a_{ij} — постоянные положительные коэффициенты, Z_1 и Z_2 — гауссовские случайные величины, не зависящие от X_1 и X_2 , с дисперсиями N_1 и N_2 , соответственно. Энергия X_1 и X_2 ограничена константами E_1 и E_2 , соответственно.

В отсутствие интерференции ($a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = a_{21} = 0$) допустимыми являются любые скорости передачи R_1 (от \mathcal{X}_1 к \mathcal{Y}_1) и R_2 (от \mathcal{X}_2 к \mathcal{Y}_2), удовлетворяющие обычным условиям

$$\begin{aligned} 0 \leq R_1 &\leq (1/2) \log(1 + (E_1/N_1)), \\ 0 \leq R_2 &\leq (1/2) \log(1 + (E_2/N_2)) \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

и при наличии интерференции ни одна пара (R_1, R_2) , лежащая вне прямоугольника (3.5.1), не может быть допустимой. Неожиданный результат Карлейла состоит в том, что в случае, когда интерференция сильна, любая пара (R_1, R_2) внутри прямоугольника допустима. Условие сильной интерференции в [32] выписано в случае, когда $a_{11} = a_{22} = 1$ (ясно, что этого всегда можно добиться изменением масштаба). В этом случае оно имеет вид

$$\begin{aligned} a_{21}^2 &\geq (N_2 + E_2)/N_1, \\ a_{12}^2 &\geq (N_1 + E_1)/N_2. \end{aligned}$$

3.6. Секретные системы связи. Отдельный раздел теории многокомпонентных каналов связи составляют вопросы, связанные с так называемой теорией секретных систем связи. Впервые эти вопросы были рассмотрены в статье Шеннона [71]. Мы приведем точную постановку задачи и некоторые результаты, следуя статье Вайнера [96].

Источником сообщений является последовательность $\{S_i, i = 1, 2, \dots\}$, где все S_i — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения в конечном множестве \mathcal{S} . Пусть $H_s = H(S_i)$ — энтропия источника. Кроме

того, имеются два канала K_1 и K_2 , являющиеся дискретными каналами без памяти с одним и тем же входным алфавитом \mathcal{X} и выходными алфавитами \mathcal{Y} и \mathcal{Z} , соответственно. Пусть $p_{Y|X}(y|x)$, $y \in \mathcal{Y}$, $x \in \mathcal{X}$ и $p_{Z|X}(z|x)$, $z \in \mathcal{Z}$, $x \in \mathcal{X}$ — переходные вероятности каналов K_1 и K_2 , соответственно. В работе [96] предполагается, что канал K_2 является ухудшенным вариантом канала K_1 . Кодер (случайный) с параметрами (k, n) задается набором условных вероятностей $q_E(x|s)$, $x \in \mathcal{X}^n$, $s \in \mathcal{S}^k$. Декодер задается отображением $f_D: \mathcal{Y}^n \rightarrow \mathcal{S}^k$.

Кодер и декодер вместе с переходными вероятностями каналов K_1 и K_2 определяют совместное распределение случайных величин $\mathbf{S}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \hat{\mathbf{S}}$ со значениями в $\mathcal{S}^k, \mathcal{X}^n, \mathcal{Y}^n, \mathcal{Z}^n, \mathcal{S}^k$, соответственно ($\hat{\mathbf{S}}$ определяется как $f_D(\mathbf{Y})$). Используя эти случайные величины, введем две характеристики пары кодер-декодер: неопределенность $\Delta = (1/k) H(\mathbf{S} | \mathbf{Z})$ и среднюю вероятность ошибки $p_e = (1/k) \sum_{i=1}^k \Pr \{S_i \neq \hat{S}_i\}$ (здесь $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_k)$,

$\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_k)$). Пара чисел (R, d) называется допустимой, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют кодер-декодер с такими параметрами (n, k, Δ, p_e) , что $H_S k/n \geq R - \varepsilon$, $\Delta \geq d - \varepsilon$, $p_e \leq \varepsilon$. Основной результат работы [96] состоит в описании области \mathcal{R} допустимых пар (R, d) . Это описание состоит в следующем.

Пусть $R \geq 0$ и $\mathcal{P}(R)$ — множество всех распределений вероятностей $p_X(x)$ на \mathcal{X} , для которых $I(X; Y) \geq R$. Ясно, что $\mathcal{P}(R)$ пусто, если $R > C_1$, где C_1 — пропускная способность канала K_1 . Пусть далее $\Gamma(R) = \sup_{p_X \in \mathcal{P}(R)} I(X; Y | Z)$. Тогда область

\mathcal{R} допустимых пар (R, d) описывается следующим образом

$$\mathcal{R} = \{(R, d): 0 \leq R \leq C_1, 0 \leq d \leq H_S, R d \leq H_S \Gamma(R)\}.$$

Одно из неожиданных наблюдений, сделанных в [96], состоит в том, что область \mathcal{R} , вообще говоря, не является выпуклой, в противоположность другим задачам теории связи с многими пользователями.

Весьма интересными являются те точки $(R, d) \in \mathcal{R}$, для которых $d = H_S$. Пусть $C_S = \max_{(R, H_S) \in \mathcal{R}} R$. Величину C_S можно

интерпретировать как наибольшую скорость передачи по каналу K_1 , при которой можно добиться полной секретности, т. е. максимальной неопределенности на выходе канала K_2 . Оказывается, что C_S удовлетворяет неравенству $C_S \geq C_1 - C_2$, где: C_1 — пропускная способность канала K_1 . Таким образом, величина C_S положительна, если только канал K_2 действительно хуже канала K_1 .

В недавней работе Кернера и Чисара [38] результаты Вайнера обобщены, в частности, на случай произвольной пары дискретных каналов без памяти K_1 и K_2 .

§ 4. МНОГОСТОРОННИЕ КАНАЛЫ

4.1. Двусторонние каналы. Понятие двустороннего дискретного канала без памяти было введено Шенноном в 1961 году [73]. Эта работа Шеннона послужила началом нового направления в теории передачи информации — теории многокомпонентных каналов, которой и посвящен данный обзор.

Двусторонний дискретный канал K без памяти имеет два входа и два выхода с конечными алфавитами $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ и $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$, соответственно, и задается набором переходных вероятностей $p_{Y_1 Y_2 | X_1 X_2}(y_1, y_2 | x_1, x_2)$. Так же как и раньше, отсутствие памяти у канала K означает, что для любого n переходные вероятности $p_{Y_1 Y_2 | X_1 X_2}(y_1, y_2 | x_1, x_2)$ при n -кратном использовании такого канала задаются равенством

$$p_{Y_1 Y_2 | X_1 X_2}(y_1, y_2 | x_1, x_2) = \prod_{i=1}^n p_{Y_1 Y_2 | X_1 X_2}(y_1^i, y_2^i | x_1^i, x_2^i),$$

где $x_j \in \mathcal{X}_j^n$, $y_j \in \mathcal{Y}_j^n$, а $x_j^i \in \mathcal{X}_j$, $y_j^i \in \mathcal{Y}_j$ — i -ые компоненты векторов x_j и y_j , соответственно, $j=1, 2, i=1, \dots, n$.

Существенное отличие двустороннего канала K от других рассмотренных выше типов многокомпонентных каналов состоит в том, что на одном и том же конце (терминале) данного канала расположены и передающее и приемное устройства: на первом (втором) конце канала расположен вход 1 (2) с алфавитом \mathcal{X}_1 (\mathcal{X}_2) и выход 1 (2) с алфавитом \mathcal{Y}_1 (\mathcal{Y}_2). Это обстоятельство позволяет производить выбор символа для очередной передачи по каналу в зависимости от уже полученных символов на соответствующей стороне канала.

Предполагается, что данный канал используется для передачи M_1 сообщений из множества I_{M_1} в прямом направлении (от первого конца канала ко второму) и M_2 сообщений из множества I_{M_2} в обратном направлении (от второго конца канала к первому). Кодирование при n -кратном использовании такого канала задается двумя множествами по n функций в каждом:

$$\begin{aligned} f_0(m_1), f_1(m_1, y_1^1), f_2(m_1, y_1^1, y_1^2), \dots, f_{n-1}(m_1, y_1^1, \dots, y_1^{n-1}), \\ g_0(m_2), g_1(m_2, y_2^1), g_2(m_2, y_2^1, y_2^2), \dots, g_{n-1}(m_2, y_2^1, \dots, y_2^{n-1}), \end{aligned}$$

где все функции f_k принимают значения в алфавите \mathcal{X}_1 , а все функции g_k — в алфавите \mathcal{X}_2 , $m_j \in I_{M_j}$, $y_j^i \in \mathcal{Y}_j$, $j=1, 2, i=1, \dots, n$. Наглядно функции f_k (g_k) определяют, как должна быть выбрана следующая буква на первом (втором) конце канала, если известно сообщение m_1 (m_2), которое должно быть передано, и известны буквы на выходе первого (второго) конца канала, полученные к этому моменту времени.

Декодирование задается парой функций $\varphi(m_1, y_1)$ и $\varphi(m_2, y_2)$, $m_j \in I_{M_j}$, $y_j \in \mathcal{Y}_j^n$, $j=1, 2$, принимающих значения в множествах I_{M_2} и I_{M_1} , соответственно.

При заданных методах кодирования и декодирования так же, как и в разделе 3.1, определяются максимальная вероятность ошибки p_{\max} , средняя вероятность ошибки p_e (в предположении, что все пары сообщений (m_1, m_2) равновероятны), понятие допустимой пары (R_1, R_2) скоростей передачи и области \mathcal{R} пропускной способности канала K .

Задача простого описания области \mathcal{R} двустороннего канала в данный момент не решена и представляется одной из наиболее трудных и важных проблем теории многокомпонентных каналов. Шеннон [73] получил простые верхние и нижние границы для \mathcal{R} , а также точное описание \mathcal{R} с помощью некоторого предельного процесса. Остановимся на этом подробнее.

Для заданного совместного распределения $p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ на входах канала K определим с помощью переходной функции канала $p_{Y_1, Y_2 | X_1, X_2}(y_1, y_2 | x_1, x_2)$ совместное распределение случайных величин X_1, X_2, Y_1, Y_2 равенством

$$p_{X_1, X_2, Y_1, Y_2}(x_1, x_2, y_1, y_2) = p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) p_{Y_1, Y_2 | X_1, X_2}(y_1, y_2 | x_1, x_2).$$

На основе этого распределения можно вычислить обычным путем условные количества информации $I(X_1; Y_2 | X_2)$ и $I(X_2; Y_1 | X_1)$. Обозначим через \mathcal{R}'' множество пар $(I(X_1; Y_2 | X_2), I(X_2; Y_1 | X_1))$, полученных при всевозможных совместных распределениях $p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$, а через \mathcal{R}' — выпуклую оболочку множества тех же пар $(I(X_1; Y_2 | X_2), I(X_2; Y_1 | X_1))$, но полученных при всевозможных $p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$, являющихся произведением своих маргинальных распределений: $p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2)$ (т. е. при независимых X_1 и X_2). Шеннон доказал следующую теорему.

Теорема. Для двустороннего дискретного канала без памяти справедливо соотношение $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}''$.

Области \mathcal{R}' , \mathcal{R}'' и \mathcal{R} на плоскости (R_1, R_2) являются выпуклыми и отсекают на осях одинаковые отрезки (эти отрезки представляют собой пропускные способности канала K по каждому из двух направлений, если на противоположном входе фиксирована наилучшая буква). Внутренняя \mathcal{R}' и внешняя \mathcal{R}'' границы совпадают для некоторого класса каналов, имеющих симметричную структуру (при перестановке любой пары букв в алфавите \mathcal{X}_1 можно так переставить буквы в алфавитах $\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_1$ и \mathcal{Y}_2 , что $p_{Y_1, Y_2 | X_1, X_2}$ сохраняется). Однако, вообще говоря, области \mathcal{R}' и \mathcal{R}'' не совпадают. Это можно показать, например, для двоичного умножающего канала, предложенного Блекуэллом и определяемого соотношением: $\mathcal{X}_1 = \mathcal{Y}_1 = \{0, 1\}$, $Y_1 = Y_2 = X_1 X_2$.

Нижняя граница \mathcal{R}' , доказанная Шенноном методом случайного кодирования, имеет интересную интерпретацию: \mathcal{R}' совпадает с областью пропускной способности канала \tilde{K} , отличающегося от канала K тем, что при кодировании на первом (втором) конце канала мы не можем пользоваться информацией о полученных к данному моменту буквах на первом (втором) конце канала (т. е. предполагается, что передатчику недоступна информация, получаемая приемником на соответствующем конце канала, но в то же время приемник на первом (втором) конце канала знает сообщение, передаваемое с первого (второго) конца (именно этим последним предположением канал \tilde{K} отличается от интерференционных каналов, рассмотренных в разделе 3.5).

Шеннон получил также точное выражение $\mathcal{R} = \mathcal{R}(K)$ для канала K в терминах некоторого предельного процесса. А именно, определим двусторонний канал без памяти $K(n)$ следующим образом. Алфавитом $\mathcal{X}_1(n)$ на входе канала $K(n)$ служат векторы длины n вида

$$(x_1^1, f_1(x_1^1, y_1^1), \dots, f_{n-1}(x_1^1, \dots, x_1^{n-1}, y_1^1, \dots, y_1^{n-1}))$$

при всевозможных кодирующих функциях f_k , $x_i^1 \in \mathcal{X}_1$, и $y_i^1 \in \mathcal{Y}_1$, $i=1, \dots, n-1$. Аналогично определяется второй входной алфавит $\mathcal{X}_2(n)$. Алфавиты $\mathcal{Y}_1(n)$ и $\mathcal{Y}_2(n)$ на выходах канала $K(n)$ задаются равенствами: $\mathcal{Y}_j(n) = \mathcal{Y}_j^n$, $j=1, 2$. Переходная функция канала $K(n)$ задается естественным образом с помощью переходной функции канала K с учетом того, что K является каналом без памяти. Подобно тому, как для канала K был определен канал \tilde{K} , так и по каналу $K(n)$ можно определить канал $\tilde{K}(n)$. Пусть $\mathcal{R}(\tilde{K}(n))$ — область пропускной способности канала $\tilde{K}(n)$.

Теорема. $\mathcal{R} = \mathcal{R}(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \mathcal{R}(\tilde{K}(n))$.

Хотя эта теорема, доказанная Шенноном, и указывает точное выражение для области \mathcal{R} , однако практическое вычисление \mathcal{R} на основе этой теоремы численными методами невозможно ввиду слишком быстрого роста сложности вычисления $\mathcal{R}(\tilde{K}(n))$ с ростом n .

Шеннон показал также, что для любой внутренней точки области \mathcal{R} средняя вероятность ошибки p_e стремится к нулю по экспоненте от числа n использований канала K . Для любой же внешней точки области \mathcal{R} p_e ограничена снизу. Многие результаты были обобщены Шенноном и на некоторый класс двусторонних каналов с памятью.

Вольфовиц [90] с помощью случайного кодирования дал прозрачное доказательство результата Шеннона о том, что $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$. При этом он показал, что результат не изменится, если среднюю вероятность ошибки определить несколько по-другому.

Алсведе [20] доказал сильное обращение теоремы кодирования для канала \bar{K} : если $(R_1, R_2) \notin \mathcal{R}' = \mathcal{R}(\bar{K})$, то $p_{\max} \rightarrow 1$ вместе с ростом длины блочных кодов. Неизвестно, верно ли сильное обращение для средней вероятности ошибки p_e .

Интересен вопрос о нахождении области пропускной способности \mathcal{R}^* канала K при использовании максимальной вероятности ошибки. Очевидно, что $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}$, но верно ли, что $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$? Ответ на этот вопрос в общем случае, по-видимому, отрицателен. Основанием для подобной гипотезы служит следующий результат, полученный Алсведе [20], который в наглядной и не очень строгой форме можно сформулировать следующим образом: в общем случае от кода со средней ошибкой нельзя перейти к коду с максимальной ошибкой без существенных потерь либо в длине кода, либо в вероятности ошибки. Для обычных же односторонних каналов хорошо известен следующий факт (см. [89]): если некоторый код имеет среднюю ошибку λ , то он содержит в два раза меньшего объема подход с максимальной ошибкой, не большей 2λ . Обсуждение проблемы о нахождении \mathcal{R}^* содержится также в работе ван дер Мейлена [56].

В определении области пропускной способности \mathcal{R} при использовании средней вероятности ошибки p_e предполагалось, что p_e вычисляется в предположении (см. раздел 3.1), что все пары (m_1, m_2) значений сообщений равновероятны. Это соответствует случаю, когда имеется два независимых источника сообщений, связанных с соответствующим входом канала; при этом каждый источник порождает сообщения — независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 , принимающие значения в множествах I_{M_1} и I_{M_2} ; соответственно, с равномерным распределением на них. При более общем подходе предполагают, что случайные величины ξ_1 и ξ_2 могут быть зависимыми (в этом случае говорят о зависимых источниках) и иметь произвольные распределения вероятностей. Шеннон [73] показал, что в случае зависимых источников можно превзойти нижнюю границу \mathcal{R}' , и даже можно достичь некоторых точек верхней границы \mathcal{R}'' . Интересен вопрос о том, можно ли превзойти нижнюю границу \mathcal{R}' для независимых источников. Шеннон [73], ссылаясь на доказательство Галлагера, утверждал, что это возможно для определенного выше двоичного умножающего канала. Однако Джелинек [48] заметил, что это доказательство Галлагера содержит ошибку. Поэтому вопрос о возможности превзойти нижнюю границу \mathcal{R}' для независимых источников остается открытым. Этот вопрос обсуждается также в работе Л. М. Либкина [6]. В связи с исследованием этого вопроса Джелинек [49] ввел в рассмотрение бинарные двусторонние каналы без памяти, переходные вероятности которых удовлетворяют условию:

$$p_{Y_1 Y_2 | X_1 X_2}(y_1, y_2 | x_1, x_2) = p_{Y_2 | X_1}(y_2 | x_1) p_{Y_1 | X_2}(y_1 | x_2),$$

где

$$\sum_{y_2 \in \mathcal{Y}_2} p_{Y_2|X_1}(y_2|x_1) = \sum_{y_1 \in \mathcal{Y}_1} p_{Y_1|X_2}(y_1|x_2) = 1,$$

и исследовал различные типы таких каналов. В другой работе [48] для этих каналов Джелинек ввел понятие потерь информации при кодировании на каждом из концов канала. В терминах переходных вероятностей двустороннего канала он получил условия отсутствия или наличия потерь при кодировании.

4.2. Релейные каналы. Естественным обобщением двустороннего канала является дискретный T -сторонний канал без памяти. Такой канал имеет T концов (терминалов), в каждом из которых расположен и приемник и передатчик. Канал полностью задается набором переходных вероятностей

$$p_{Y_1 \dots Y_T | X_1 \dots X_T}(y_1, \dots, y_T | x_1, \dots, x_T),$$

где $x_i \in \mathcal{X}_i$, $y_i \in \mathcal{Y}_i$, $i=1, \dots, T$, — сигналы на входе и выходе i -го терминала канала. Передатчик каждого терминала может использовать информацию, полученную к данному моменту приемником этого терминала, для выбора очередного сигнала для передачи по каналу. Наиболее общее использование такого T -стороннего канала состоит в передаче информации от каждого терминала к каждому. Область пропускной способности \mathcal{R} T -стороннего канала определяется аналогично тому, как это было сделано для двустороннего канала.

Ввиду больших трудностей исследования \mathcal{R} в общем случае ван дер Мейлен [57] для $T=3$ рассмотрел более простую ситуацию использования трехстороннего канала, когда ставится задача о передаче информации лишь в одном направлении, например, от терминала 1 к терминалу 3. При этом терминал 2 играет вспомогательную роль — он служит для улучшения характеристик передачи в направлении $1 \rightarrow 3$. Такой канал ван дер Мейлен назвал релейным (relay). Пусть $C(1, 3)$ — пропускная способность описанного релейного канала. В [57] ван дер Мейлен нашел некоторое предельное выражение для $C(1, 3)$, получил необходимые и достаточные условия для того, чтобы $C(1, 3)$ была отлична от нуля, и указал некоторые нижние границы для $C(1, 3)$. В [59] он обобщил некоторые из этих результатов на случай T -сторонних ($T > 3$) релейных каналов.

§ 5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

5.1. Сети связи. В последнем параграфе мы хотим коротко упомянуть о некоторых направлениях теории информации, которые прямо или косвенно могут иметь отношение к теории связи с многими пользователями.

Прежде всего нужно сказать о круге проблем, возникающих при построении сетей связи. Можно считать, что сеть связи состоит из источников сообщений и потребителей, которые расположены в различных местах и связаны между собой каналами связи, аналогичными рассмотренным выше. Тогда анализ надежности такой сети связи включает в себя (но, конечно, не сводится) определение совместной области пропускной способности. Читателю, познакомившемуся с предыдущими параграфами, должно быть понятно, что до решения такой общей задачи еще очень далеко. Мы можем упомянуть здесь несколько (конечно, далеко не все) работ ([39, 43, 46, 67, 87]), в которых обсуждаются различные аспекты этой проблемы. Здесь же следует отметить важную задачу о согласовании источников и каналов. Такое согласование позволяет для одного источника и канала с одним входом и одним выходом свести задачу о помехоустойчивости системы отдельно к вычислению энтропии источника и пропускной способности канала (см., например, изложение в [91]). В случае общих многокомпонентных систем аналогичная задача не решена и кажется очень непростой (см. обсуждение в [46]).

5.2. Связь с многими доступами. Связью с многими доступами (multiple access communication) называют иногда (обычно в более технических задачах) различные ситуации, когда приходится одновременно поддерживать связь с несколькими объектами. Такие задачи возникают, в частности, в случаях связи с помощью искусственных спутников Земли (ретрансляторов). Постановки здесь могут быть весьма разнообразными; часто они не укладываются в описанные выше общие схемы. Среди относящихся сюда работ можно упомянуть работы [47, 70, 78, 51, 79].

5.3. Многопутевые каналы. Системы передачи информации, в которых один и тот же сигнал (обычно непрерывный) передается многократно (по нескольким путям-каналам), а выходной сигнал складывается из выходных сигналов всех образующих систему каналов, называются многопутевыми системами. В наиболее общей из рассмотренных многопутевых систем сигнал $\eta_j(t)$ (t — время) на выходе j -го канала равен сумме

$$\eta_j(t) = \sum_{k=1}^{N_j} a_{jk}(t) \xi(t - \tau_{jk}(t)) + \zeta_j(t), \quad j=1, \dots, n, \quad (5.3.1)$$

где n — число каналов многопутевой системы, N_j — константы, характеризующие число лучей в j -ом канале, $\xi(t)$ — передаваемый сигнал с ограниченной средней мощностью $M\xi^2(t) \leq P$, $a_{jk}(t)$, $\tau_{jk}(t)$ и $\zeta_j(t)$ при каждом фиксированном j — взаимно независимые случайные процессы, $\zeta_j(t)$ — гауссовские процессы.

И. А. Овсеевич и М. С. Пинскер [10, 11] получили формулы для пропускной способности гауссовской многопутевой системы

(случай, когда в (5.3.1) $a_{jh}(t)$ и $\tau_{jh}(t)$ являются константами), показав, что такая система эквивалентна некоторой однопутевой. В [11] рассматриваются также асимптотические формулы для пропускной способности в случае, когда $a_{jh}(t)$ и $\tau_{jh}(t)$ имеют малые дисперсии.

В работах И. А. Овсеви́ча и М. С. Пинскера [12, 13] и И. А. Овсеви́ча [9] рассматривается случай, когда $a_{jh}(t)$ и $\tau_{jh}(t)$ — случайные величины, не зависящие от t . В [13] вычисляется пропускная способность многопутевой системы в предположении, что замирания (характеризуемые случайными величинами a_{jh} и τ_{jh}) в разных каналах зависимы, а в [9] рассмотрен более общий случай, когда в разных каналах зависимы не только замирания, но и шумы $\zeta_j(t)$. В [12] исследованы характеристики оптимальных линейных методов кодирования и декодирования.

В работе Пирса и Штейна [65] найдено распределение отношения сигнал/шум для многопутевого канала в предположении, что замирания в разных каналах системы зависимы, а шумы независимы между собой.

А. С. Немировский [8] исследовал пропускную способность многопутевой системы частного вида, когда наблюдаемый сигнал на выходе такой системы равен максимальному из сигналов на выходе каждого из каналов.

5.4. Исправление дефектов. Коды, исправляющие дефекты, были введены в работе А. В. Кузнецова и Б. С. Цыбакова [5] (см. также [18, 19]). Такие коды могут быть связаны с кодами, исправляющими ошибки в многокомпонентных (в частности, в широкоэвещательных) каналах (см. п. 3.3). Приведем определение кодов, исправляющих дефекты. Дефектом d двоичного слова длины n называется пара непересекающихся подмножеств $d = (S_0, S_1)$ множества индексов $\{1, \dots, n\}$. Число $t = \text{card}(S_0 \cup S_1)$ называется кратностью дефекта. Дефект d задает отображение $x \rightarrow k(x, d) = y = (y_1, \dots, y_n)$ двоичных слов длины n в себя (канал) по правилу

$$\begin{aligned} y_i &= 0 \text{ для } i \in S_0, \\ y_i &= 1 \text{ для } i \in S_1, \\ y_i &= x_i \text{ для } i \in S_0 \cup S_1. \end{aligned}$$

Пусть W — некоторое множество таких дефектов. Кодер длины n и мощности M сопоставляет паре $m \in I_M, d \in W$, двоичное слово $\varphi(n, d) = (s_1, \dots, s_n)$, $s_i = 0, 1$, длины n .

Декодер сопоставляет каждому слову $y = (y_1, \dots, y_n)$ число $\psi(y) \in I_M$. Код (т. е. пара φ, ψ) исправляет все дефекты $d \in W$, если $\psi(k(\varphi(m, d), d)) = m$ для всех $d \in W, m \in I_M$. Иначе говоря, мы знаем (и можем использовать) состояние канала при кодировании, и не знаем его при декодировании.

В работе [5], где приведены все эти определения, выведены оценки для мощности кодов, исправляющих все дефекты заданной кратности, и явно построены коды для исправления дефектов кратности 1 и 2. Как разработанные при этом методы, так и сами построенные коды могут оказаться полезными при построении кодов для многокомпонентных каналов. В [18] приведены методы построения кодов для исправления любого числа дефектов, исходя из двоичных кодов, исправляющих ошибки. В [19] введено понятие кодов, исправляющих дефекты и ошибки, приведены границы для мощности таких кодов и даны некоторые методы их построения.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Арутюнян Е. А., Нижняя граница вероятности ошибки для каналов со многими передающими сторонами. Пробл. передачи информ., 1975, 11, № 2, 23—36 (РЖМат, 1975, 12В661)
2. Галлагер Р. Г., Пропускная способность и кодирование для некоторых ширококвещательных каналов. Пробл. передачи информ., 1974, 10, № 3, 3—14 (РЖМат, 1975, 2В643)
3. Гельфанд С. И., Пропускная способность одного ширококвещательного канала. Пробл. передачи информ., 1977, 13, № 3, 106—108 (РЖМат, 1978, 2В534)
4. Кошелев В. Н., О задаче раздельного кодирования двух зависимых источников. Пробл. передачи информ., 1977, 13, № 1, 26—32 (РЖМат, 1977, 7В672)
5. Кузнецов А. В., Цыбаков Б. С., Кодирование в памяти с дефектными ячейками. Пробл. передачи информ., 1974, 10, № 2, 52—60 (РЖМат, 1974, 11В601)
6. Либкин Л. М., Двусторонние дискретные каналы связи без памяти. Пробл. передачи информ., 1967, 3, № 2, 37—46 (РЖМат, 1969, 2В312)
7. Маргулис Г. А., Вероятностные характеристики графов с большой связностью. Пробл. передачи информ., 1974, 10, № 2, 101—108 (РЖМат, 1974, 11В4)
8. Немчировский А. С., О пропускной способности многолучевого канала при разнесенном приеме с автовыбором. Радиотехника, 1961, 16, № 9, 34—38 (РЖМат, 1962, 12В314)
9. Овсевич И. А., Пропускная способность многопутевой системы. Пробл. передачи информ. Вып. 14. М., АН СССР, 1963, 43—58 (РЖМат, 1964, 9В183)
10. —, Пинскер М. С., Скорость передачи информации, пропускная способность многопутевой системы и прием по методу линейно-оперативного преобразования. Радиотехника, 1959, 14, № 3, 9—21
11. —, —, О пропускной способности многопутевой системы информации. Изв. АН СССР. Отд. техн. и Энерг. и автоматика, 1959, № 1, 133—135 (РЖМат, 1960, 638)
12. —, —, Оптимальное линейное предсказание и корректирование сигнала при передаче его по многопутевой системе. Изв. АН СССР. Отд. техн. и Энерг. и автоматика, 1959, № 2, 49—59 (РЖМат, 1961, 7В134)
13. —, —, О пропускной способности многопутевой системы. Изв. АН СССР. Отд. техн. и Энерг. и автоматика, 1961, № 4, 208—210
14. Полтырев Г. Ш., О допустимых скоростях передачи в дискретных ширококвещательных каналах. В сб. «VI конф. по теории кодир. и передачи информ. Ч. I. Доклады», Москва — Томск, 1975, 150—155 (РЖМат, 1976, 3В662)
15. —, Пропускная способность для параллельных ширококвещательных каналов с ухудшающимися компонентами. Пробл. передачи информ., 1977, 13, № 2, 23—35 (РЖМат, 1977, 10В268)

16. Стефанюк В. Л., О «взаимопомощи» в коллективе радиостанций. Пробл. передачи информ., 1971, 7, № 3, 103—107 (РЖМат, 1971, 12В459)
17. —, Цетлин М. Л., О регулировке мощности в коллективе радиостанций. Пробл. передачи информ., 1967, 3, № 4, 49—57 (РЖМат, 1968, 7В295)
18. Цыбаков Б. С., Групповые аддитивные коды для исправления дефектов. Пробл. передачи информ., 1975, 11, № 1, 111—113 (РЖМат, 1975, 8В414)
19. —, Исправление дефектов и ошибок. Пробл. передачи информ., 1975, 11, № 3, 21—30 (РЖМат, 1976, 2В638)
20. Ahlswede R., On two-way communication channels and a problem by Zrankiewicz. Trans. 6th Prague Conf. Inform. Theory, Statist. Decis. Funct., Random Proces., Prague, 1971. Prague, 1973, 23—27 (РЖМат, 1974, 7В623)
21. —, Multy-way communication channels. 2nd Intern. Symp. Inform. Theory, Tsahkadsor, 1971. Budapest, 1973, 23—52 (РЖМат, 1974, 9В540)
22. —, The capacity region of a channel with two senders and two receivers. Ann. Probab., 1974, 2, № 5, 805—814 (РЖМат, 1975, 5В653)
23. —, Dnesck G., Every bad code has a good subcode: a local converse to the coding theorem. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1976, 34, № 2, 179—182 (РЖМат, 1976, 8В625)
24. —, Gács P., Körner J., Bounds on conditional probabilities with application in multi-user communication. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1976, 34, № 2, 157—177 (РЖМат, 1976, 9В505)
25. —, Körner J., Source coding with side information and a converse for degraded broadcast channels. IEEE Trans. Inform. Theory, 1975, 21, № 6, 629—637 (РЖМат, 1976, 8В626)
26. Berger T., Rate distortion theory. Prentice-Hall, New Jersey, 1971
27. —, Tung S.-Y., Encoding of correlated analog sources. Proc. of the 1975 IEEE—USSR Joint Workshop on Inform. Theory, Moscow, December 1975, New York, 1976, 7—10
28. Bergmans P. P., Random coding theorem for broadcast channels with degraded components. IEEE Trans. Inform. Theory, 1973, 19, № 2, 197—207 (РЖМат, 1973, 8В429)
29. —, A simple converse for broadcast channels with additive white Gaussian noise. IEEE Trans. Inform. Theory, 1974, 20, № 2, 279—280 (РЖМат, 1974, 11В543)
30. —, Cover T. M., Cooperative broadcasting. IEEE Trans. Inform. Theory, 1974, 20, № 3, 317—324 (РЖМат, 1975, 1В661)
31. Blachman N. M., The convolution inequality for entropy powers. IEEE Trans. Inform. Theory, 1965, 11, № 2, 267—271 (РЖМат, 1967, 9В237)
32. Carleial A. B., A case where interference does not reduce capacity. IEEE Trans. Inform. Theory, 1975, 21, № 5, 569—570 (РЖМат, 1976, 4В548)
33. Cover T. M., Broadcast channels. IEEE Trans. Inform. Theory, 1972, 18, № 1, 2—14 (РЖМат, 1972, 10В436)
34. —, A proof of the data compression theorem of Slepian and Wolf for ergodic sources. IEEE Trans. Inform. Theory, 1975, 21, № 2, 226—228 (РЖМат, 1975, 12В650)
35. —, An achievable rate region for the broadcast channel. IEEE Trans. Inform. Theory, 1975, 21, № 4, 399—404 (РЖМат, 1976, 4В547)
36. —, Some advances in broadcast channels. Advances in Communication Systems, 4, 229—266, Academic Press, New York, 1975
37. —, Open problem in information theory. Proc. of the 1975 IEEE—USSR Joint Workshop on Inform. Theory, Moscow, December 1975, New York, 1976, 35—36
38. Csiszár I., Körner J., Broadcast channel with confidential messages. Preprint, Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Science, 1976
39. Elias P., Networks of Gaussian channels with applications to feedback systems. IEEE Trans. Inform. Theory, 1967, 13, № 4, 493—501 (РЖМат, 1968, 7В172)

40. Gaarder N. T., Wolf J. K. The capacity region of a multiple-access discrete memoryless channel can increase with feedback. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1975, 21, № 1, 100—102 (PЖMat, 1975, 8B409)
41. Gács P., Körner J., Common information is far less than mutual information. *Пробл. упр. и теории информ.* (Венг.), 1973, 2, № 2, 149—162 (PЖMat, 1974, 9B532)
42. Gallager R. G., *Information theory and reliable communication*. Wiley, New York, 1968 (русск. перевод: PЖMat, 1975, 5B664K)
43. —, Basic limits on protocol information in data communication networks. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1976, 22, № 4, 385—398 (PЖMat, 1977, 2B310)
44. Gray R. M., A new class of lower bounds to information rates of stationary sources via conditional rate-distortion functions. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1973, 19, № 4, 480—489 (PЖMat, 1974, 4B426)
45. —, Bergmans P., Problems in simultaneous communication. *IEEE Trans. Commun.*, 1973, 21, № 5, 763—767
46. —, Wyner A. D., Source coding for a simple network. *Bell Syst. Techn. J.*, 1974, 53, № 9, 1681—1721 (PЖMat, 1975, 7B506)
47. Horwood D., Gagliardi R., Signal design for digital multiple access communications. *IEEE Trans. Commun.*, 1975, 23, № 3, 378—383 (PЖMat, 1975, 12B651)
48. Jelinek F., Loss in information transmission through two-way channels. *Inform. and Control*, 1963, 6, № 4, 337—371 (PЖMat, 1965, 5B152)
49. —, Coding for and decomposition of two-way channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1964, 10, № 1, 5—17 (PЖMat, 1965, 4B191)
50. Kasami T., Lin Shu, Coding for a multiple-access channel. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1976, 22, № 2, 129—137 (PЖMat, 1976, 12B708)
51. Kleinrock L., Tobagi F. A., Packet switching in radio channels. Part I. Carrier sense multiple-access modes and their throughput-delay characteristics. *IEEE Trans. Commun.*, 1975, 23, № 12, 1400—1416 (PЖMat, 1976, 10B216)
52. Körner J., Marton K., A source network problem involving the comparison of two channels. I. Preprint № 22, *Math. Inst. Hung. Ac. Sci., Budapest*, 1975
53. —, —, A source network problem involving the comparison of two channels. II., Preprint, 1975
54. —, —, General broadcast channels with degraded message sets. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1977, 23, № 1, 60—64 (PЖMat, 1977, 12B781)
55. Liao H. J., Channel capacity for nonorthogonal multiple access communications. *Proc. 5th Annu. Princeton Conf. Inform. Sci. and Syst.*, 1971, Princeton, N. J., s. a., 140—144 (PЖMat, 1973, 8B430)
56. Meulen E. C. van der, A note and counter example on the two-way channel. *Univ. of Rochester*, 1970
57. —, Three-terminal communication channels. *Adv. Appl. Probab.*, 1971, 3, 120—154
58. —, The discrete memoryless channel with two senders and one receiver. *2nd Intern. Symp. Inform. Theory, Tsahkadsor*, 1971. Budapest, 1973, 103—135 (PЖMat, 1974, 9B541)
59. —, Multi-terminal communication channels. *Adv. Appl. Probab.*, 1973, 5, № 1, 32—33 (PЖMat, 1973, 10B412)
60. —, On a problem by Ahlswede regarding the capacity region of certain multiway channels. *Inform. and Contr.*, 1974, 25, № 4, 351—356 (PЖMat, 1975, 2B644)
61. —, Random coding theorems for the general discrete memoryless broadcast channel. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1975, 21, № 2, 180—190 (PЖMat, 1975, 11B479)
62. —, Advances in multiple-user communication channels. *Proc. of the 1975 IEEE—USSR Joint Workshop on Inform. Theory, Moscow, December 1975, New York*, 1976, 227—247

63. —, A survey of multi-way channels in information theory: 1961—1976. IEEE Trans. Inform. Theory, 1977, 23, № 1, 1—37 (РЖМат, 1977, 12В780)
64. *Ohkubo M.*, Studies on multiple access channels. Дзёси пусин гаккай ром-бунси, 1976, А59, № 8, 652—659 (РЖМат, 1977, 2В556)
65. *Pierce J. N.*, *Stein S.*, Multiple diversity with nonindependent fading. PIRE, 1960, 48, № 1
66. *Posner E. C.*, Broadcasting and covering. Util. Math., 1974, 5, 323—333 (РЖМат, 1977, 2В555)
67. *Rényi A.*, On measures of dependence. Acta math. Acad. sci. hung., 1959, 10, № 3-4, 441—451 (РЖМат, 1961, 8В6)
68. *Rubin I.*, Communication network message path delays. IEEE Trans. Inform. Theory, 1974, 20, № 5, 738—745 (РЖМат, 1975, 12В59)
69. *Sato H.*, An upper bound to the capacity region of broadcast channel. Preprint, 1975
70. *Savage J. E.*, Signal detection in the presence of multiple-access noise. IEEE Trans. Inform. Theory, 1974, 20, № 1, 42—49 (РЖМат, 1974, 9В544)
71. *Shannon C. E.*, Communication theory of secrecy systems. Bell Syst. Techn. J., 1949, 28, № 4, 656—715
72. —, A note on a partial ordering for communication channels. Inform. and Control, 1958, 1, № 4, 390—397 (РЖМат, 1960, 709)
73. —, Two-way communication channels. Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., 1960. Vol. 1. Berkeley—Los Angeles, Univ. California Press, 1961, 611—644 (РЖМат, 1963, 1В178)
74. *Sharma Bhu Dev*, Multiple decoding scheme and bounds on the probability of error and erasure over a multiple channel. Kybernetika, 1976, 12, № 4, 213—222 (РЖМат, 1977, 3В559)
75. *Shields P.*, *Thouvenot J.-P.*, Une remarque sur les isomorphismes de schemas de Bernoulli qui préservent certains facteurs. Isr. J. Math., 1975, 21, № 2-3, 173—176 (РЖМат, 1976, 5В888)
76. *Slepian D.*, *Wolf J. K.*, Noiseless coding for correlated information sources. IEEE Trans. Inform. Theory, 1973, 19, № 4, 471—480 (РЖМат, 1974, 3В442)
77. —, A coding theorem for multiple access channels with correlated sources. Bell Syst. Techn. J., 1973, 52, № 7, 1037—1076 (РЖМат, 1974, 6В583)
78. *Stiglitz I. G.*, Multiple access consideration. A satellite example. IEEE Trans. Commun., 1973, 21, № 5, 577—582
79. —, Packet switching in radio channels. Part II. The hidden terminal problem in carrier sense multiple-access and the busy-tone solution. IEEE Trans. Commun., 1975, 23, № 12, 1417—1433 (РЖМат, 1976, 11В594)
80. *Thouvenot J.-P.*, Remarques sur les systèmes dynamiques donnés avec plusieurs facteurs. Isr. J. Math., 1975, 21, № 2-3, 215—232 (РЖМат, 1976, 5В887)
81. *Ulrey M. L.*, The capacity region of a channel with s senders and r receivers. Inform. and Contr., 1975, 29, № 3, 185—203 (РЖМат, 1976, 9В506)
82. *Wisemanhausen H. S.*, Entropy inequalities for discrete channels. IEEE Trans. Inform. Theory, 1974, 20, № 5, 610—616 (РЖМат, 1975, 4В550)
83. —, On sequences of pairs of dependent random variables. SIAM J. Appl. Math., 1975, 28, № 1, 100—113 (РЖМат, 1975, 12В648)
84. —, Values and bounds for the common information of two discrete random variables. SIAM J. Appl. Math., 1976, 31, № 2, 313—333 (РЖМат, 1977, 3В555)
85. —, The zero-error side information problem and chromatic numbers. IEEE Trans. Inform. Theory, 1976, 22, № 5, 592—593 (РЖМат, 1977, 7В551)
86. —, *Wyner A. D.*, A conditional entropy bound for a pair of discrete random variables. IEEE Trans. Inform. Theory, 1975, 21, № 5, 493—501 (РЖМат, 1976, 4В543)
87. *Wolf J. K.*, Multiple-user communications. NTC 73, Nat. Telecommun. Conf., Atlanta, Ga, 1973. Vol. 2. New York, N. Y., 1973, 28E/1—28E/11 (РЖМат, 1974, 11В542)

88. —, Data reduction for multiple correlated sources. Proc. of the 5th Colloquium on Microwave Communications, Budapest, Hungary, June 24—30, 1974
 89. *Wolfowitz J.*, Coding theorems of information theory. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1961, X, 125 pp. (PЖMar, 1963, 7B335K)
 90. —, The method of random codes for two-way channels without feedback. 1965
 91. *Wyner A. D.*, Another look at the coding theorem of information theory. A tutorial. Proc. IEEE, 1970, 58, № 6, 894—913 (PЖMar, 1971, 2B433)
 92. —, A theorem on the entropy of certain binary sequences and applications. II. IEEE Trans. Inform. Theory, 1973, 19, № 6, 772—777 (PЖMar, 1974, 7B625)
 93. —, Recent results in the Shannon theory. IEEE Trans. Inform. Theory, 1974, 20, № 1, 2—10 (PЖMar, 1974, 9B539)
 94. —, The common information of two dependent random variables. IEEE Trans. Inform. Theory, 1975, 21, № 2, 163—179 (PЖMar, 1975, 12B649)
 95. —, On source coding with side information at the decoder. IEEE Trans. Inform. Theory, 1975, 21, № 3, 294—300 (PЖMar, 1975, 11B478)
 96. —, The wire-tap channel. Bell Syst. Techn. J., 1975, 54, № 8, 1355—1387 (PЖMar, 1976, 8B627)
 97. —, *Ziv J.*, A theorem on the entropy of certain binary sequences and applications. I. IEEE Trans. Inform. Theory, 1973, 19, № 6, 769—772 (PЖMar, 1974, 7B624)
 98. —, —, The rate-distortion function for source coding with side information at the decoder. IEEE Trans. Inform. Theory, 1976, 22, № 1, 1—10 (PЖMar, 1976, 11B595)
-