УДК 519.217

II. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В АНАЛИЗЕ

А. В. Скороход

СОДЕРЖАНИЕ

В 1931 г. вышла работа А. Н. Колмогорова «Об аналитических методах в теории вероятностей». В этой работе был введен класс случайных процессов, названных в дальнейшем марковскими, и для изучения вероятностных характеристик этих процессов (их переходных вероятностей) был предложен метод дифференциальных уравнений. Для процессов с конечным или счетным фазовым пространством это были конечные или счетные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, для процессов с конечномерным фазовым пространством — дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка параболического типа. Появился новый мощный аналитический метод, позволяющий решать и задачи теории случайных процессов и получать предельные теоремы нового типа (например, задачи диффузии для случайных блужданий, рассмотренные А. Н. Колмогоровым, И. Г. Петровским и А. Я. Хинчиным). Хотя некоторые аналитические методы (преобразование Фурье) использовались при доказательстве предельных теорем, однако именно благодаря работам А. Н. Колмогорова анализ стал повсеместно использоваться в теории вероятностей. Более того, она (по крайней мере формально) могла уже считаться одним из разделов анализа.

Установленная А. Н. Колмогоровым связь между дифференциальными уравнениями и марковскими процессами сделала возможным «обратное» использование марковских процессов в теории дифференциальных уравнений. Для осуществления такой возможности нужно было иметь независимые от анализа методы изучения марковских процессов. Такая чисто вероятностная методика была развита первоначально для винеровского процесса. Построение винеровской меры позволило использовать ее для решения многих задач анализа. Наиболее существенным шагом здесь было полученное М. Кацем представление решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\Delta U+vU$$

в виде интеграла по винеровской мере. Именно этот результат показал, что вероятностные методы помогают в преодолении существенных трудностей, возникающих в анализе.

Теория стохастических дифференциальных уравнений, развитая К. Ито и И. И. Гихманом, позволяет вероятностными методами строить широкий класс марковских процессов, которые затем могут использоваться для решения уравнений с частными производными.

Глава 1

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Марковские процессы описывают эволюцию систем, испытывающих случайные возмущения, если эти возмущения независимы в различные моменты времени. В этом случае состояние системы в данный момент времени полностью определяет вероятностные характеристики процесса, описывающего дальнейшую эволюцию системы. Это означает, что прошлое поведение системы влияет на будущее только через настоящее. Дискретные последовательности событий, обладающих этим свойством были введены Марковым и получили название цепей Маркова. Процессы с непрерывным временем ввел А. Н. Колмогоров, он называл их стохастически определенными. В дальнейшем они стали называться (по аналогии с процессами с дискретным временем) марковскими процессами.

§ 1. Определение и общие свойства

1.1. Определение марковского процесса. Пусть $(X, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, которое будет играть роль фазового пространства рассматриваемого процесса. Мы будем рассматривать процессы, определенные на R_+. При определении марковского процесса естественно рассматривать не один процесс, а целое семейство процессов $\xi_{s,x}(t)$, $t \geqslant s$; $\xi_{s,x}(t)$ описывает эволюцию системы, которая в начальный момент s находилась в состоянии x. Пусть $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ — пространство элементарных событий с σ-алгеброй событий $\mathscr{F}$. Нам удобно считать, что каждому $\xi_{s,x}(t)$ отвечает на $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ своя вероятностная мера $\mathbf{P}_{s,x}(\cdot)$. Таким образом, марковскому процессу будет отвечать семейство вероятностных пространств $(\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}_{s,x}\}$, $s \in R_+$, $x \in X)$. Для марковского процесса меры $\mathbf{P}_{s,x}$ согласованы определенным образом. Пусть $\mathscr{F}_t^s$, $s<t$ — σ-алгебра событий, которые наблюдаются на отрезке $[s, t]$ (в частности $\xi_{s,x}(u)$ при $u \in [s, t]$ измеримо относительно $\mathscr{F}_t^s$). Из приведенного выше наглядного определения вытекает, что при $s<u$ условное распределение процесса $\xi_{s,x}(t)$ на t, $\infty)$ при заданном $\xi_{s,x}(v)$ на $[s, u]$ должно быть таким, как распределение процесса, который начинается в момент u из точки $\xi_{s,x}(u)$. Точно это свойство можно сформулировать так: с вероятностью $\mathbf{P}_{s,x}=1$

$$\begin{gathered}\mathbf{P}_{s,x}\{\xi(t_1)\in A_1, \ldots, \xi(t_n)\in A_n \mid \mathscr{F}_u^s\} = \\ = \mathbf{P}_{u,\xi(u)}\{\xi(t_1)\in A_1, \ldots, \xi(t_n)\in A_n\}, \qquad (1) \\ 0 \leqslant s < u \leqslant t_1 < \ldots < t_n, \quad A_k \in \mathscr{B},\end{gathered}$$

(здесь $\xi(\cdot)$ обозначает процесс, распределения которого определяются мерой, под знаком которой стоит событие, определяемое $\xi(\cdot)$: $\mathbf{P}_{u,\xi(u)}(C) = \mathbf{P}_{u,x}(C)\,|_{x=\xi(u)}$).
Заметим, что именно то обстоятельство, что мы имеем различные меры, позволяет нам обозначать процесс одним и тем же символом. В дальнейшем, поскольку рассматриваются процессы, начинающиеся в различные моменты времени, будем использовать обозначение $\xi_s(t)$ для процесса, определенного для $t \geqslant s$.

Тогда (1) перепишется так:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}_{s,x}\{\xi_s(t_1)\in A_1, \ldots, \xi_s(t_n)\in A_n\} \mid \mathscr{F}_u^s\} = \\ = \mathbf{P}_{u,\xi_s(u)}\{\xi_u(t_1)\in A_1, \ldots, \xi_u(t_n)\in A_n\}. \qquad (2)\end{gathered}$$

Таким образом, *марковский процесс* задан, если заданы

1) Фазовое пространство — измеримое пространство $(X, \mathscr{B})$.

2) Измеримое пространство $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ и семейство σ-алгебр $\mathscr{F}_t^s \subset \mathscr{F}$, $0 \leqslant s < t < \infty$, удовлетворяющих условию $\mathscr{F}_t^s \subset \mathscr{F}_v^u$ при $u \leqslant s < t \leqslant v$.

3) Семейство функций $\xi_s(t) = \xi_s(t, \omega)$, $s \in R_+$, $t > s$, при всех $0 \leqslant s < t$ $\xi_s(t, \omega)$ — измеримое отображение Ω в X относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_t^s$.

4) Семейство вероятностных мер $\mathbf{P}_{s,x}(\cdot)$ на $\mathscr{F}$, удовлетворяющих условиям

а) для всех $s \in R_+$, $x \in X$ $\mathbf{P}_{s,x}\{\xi_s(s) = x\} = 1$,

б) для всех n, $0 \leqslant s < u \leqslant t_1 < \ldots < t_n$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{B}$ с вероятностью $\mathbf{P}_{s,x} = 1$ выполнено (2),

в) функция $\mathbf{P}_{s,x}\{\xi_s(t) \in A\}$ измерима по x при $s < t$, $A \in \mathscr{B}$.

Будем обозначать математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_{s,x}$ через $\mathbf{M}_{s,x}$. Соотношение (2) можно переписать так:

$$\mathbf{M}_{s,x}\left(\prod_{k=1}^{n} I_{A_k}(\xi_s(t_k)) \mid \mathscr{F}_u^s\right) = \mathbf{M}_{u,\xi_s(u)} \prod_{k=1}^{n} I_{A_k}(\xi_s(t_k)). \tag{3}$$

Здесь $s < u \leqslant t_1 < \ldots < t_n$, $A_k \in \mathscr{B}$, $k = 1, \ldots, n$, равенство выполняется с вероятностью $\mathbf{P}_{s,x} = 1$

1.2. Вероятность перехода. *Вероятностью перехода* называется функция $P(s, x, t, A) = \mathbf{P}_{s,x}\{\xi_s(t) \in A\}$. Она удовлетворяет следующим очевидным свойствам.

I. $P(s, x, t, A)$ определена при $0 \leqslant s \leqslant t$, $x \in X$ и измерима по x.

II. $P(s, x, t, A)$ является вероятностной мерой по $A \in \mathscr{B}$.

Следующее свойство определяет марковский характер процесса.

III. $P(s, x, t, A)$ удовлетворяет уравнению (*уравнению Чепмена—Колмогорова*): при $0 \leqslant s < u < t$, $A \in \mathscr{B}$

$$P(s, x, t, A) = \int P(s, x, u, dz) P(u, z, t, A). \tag{4}$$

Действительно, воспользовавшись свойством 4, б), находим

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\xi_s(t) \in A \mid \mathscr{F}_u^s\} = \mathbf{P}_{u,\xi_s(u)}(\xi_u(t) \in A\} = P(u, \xi_s(u), t, A).$$

Взяв от обеих частей этого равенства математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_{s,x}$, находим

$$\int \mathbf{P}_{s,x}\{\xi_s(u) \in dz\} P(u, z, t, A) = \mathbf{M}_{s,x} \mathbf{P}_{s,x}\{\xi_s(t) \in A \mid \mathscr{F}_u^s\} = \\ = \mathbf{P}_{s,x}\{\xi_s(t) \in A\}.$$

Это и доказывает (4).

Используя равенство (3), можно получить следующую формулу для конечномерных распределений процесса $\xi_s(t)$ по мере $\mathbf{P}_{s,x}$: при $s<t_1<\ldots<t_n$

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\xi_s(t_1)\in A_1,\ldots,\xi_s(t_n)\in A_n\}=$$

$$=\mathbf{M}_{s,x}I_{A_1}(\xi_s(t_1))\,\mathbf{M}_{s,x}\left(\prod_{k=2}^{n} I_{A_k}(\xi_s(t_k))\,|\,\mathcal{F}_{t_1}^{s}\right)=$$

$$=\mathbf{M}_{s,x}I_{A_1}(\xi_s(t_1))\,M_{t_1,\xi_s(t_1)}\prod_{k=2}^{n} I_{A_k}(\xi_{t_1}(t_k))=$$

$$=\int_{A_1} P(s,\,x,\,t_1,\,dx_1)\mathbf{M}_{t_1,x_1}\prod_{k=2}^{n} I_{A_k}(\xi_{t_1}(t_k)).$$

Отсюда по индукции получаем

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\xi_s(t_1)\in A_1,\ldots,\xi_s(t_n)\in A_n\}=$$

$$=\int_{A_1} P(s,\,x,\,t_1,\,dx_1)\int_{A_2} P(t_1,\,x_1,\,t_2,\,dx_2)\ldots$$

$$\ldots\int_{A_n} P(t_{n-1},\,x_{n-1},\,t_n,\,dx_n). \qquad (5)$$

Таким образом вероятность перехода определяет значение меры $\mathbf{P}_{s,x}$ на σ-алгебрах $\mathcal{C}_u^s$, определяемых событиями $\{\xi_s(t)\in\in A\}$, $t\in[s,u]$, $A\in\mathcal{B}$. Это показывает, что вероятность перехода позволяет построить марковский процесс на специальном пространстве $\{\Omega,\ \mathcal{F}\}$. В качестве Ω выберем пространство X^{R_+} всех X-значных функций $\omega=\omega(t)$, определенных на R_+, $\mathcal{F}$ — цилиндрическая σ-алгебра в X^{R_+}, $\xi_s(\omega)=\omega(t)$ при $t\geqslant s$. Будем считать, что $\xi_s(\omega)\in C$, где $C\in\mathcal{F}$, если существует такое $\bar{\omega}$, что $\omega(t)=\bar{\omega}(t)$ при $t\geqslant s$ и $\bar{\omega}\in C$. Через $\mathcal{F}_t^s$, где $s<t$ будем обозначать σ-алгебру цилиндрических множеств из $\mathcal{F}$ с основаниями в $[s,t]$. Очевидно выполнены условия 1)—3). Меры $\mathbf{P}_{s,x}$ определим сначала на σ-алгебре $\mathcal{F}_\infty^s$ с помощью конечномерных распределений, заданных равенством (5). Для любого $C\in\mathcal{F}$ считаем, что $\xi_s(\omega)\in C$, если при некотором $\bar{\omega}\in C$ $\xi_s(t,\omega)=$ $=\xi_s(t,\bar{\omega})$. То, что выполнены свойства а, б, в 4), вытекает из формулы (5) и свойств I—III вероятности перехода.

Итак, в определенном смысле изучение марковского процесса сводится к изучению вероятностей перехода, т. е. функций $P(s,x,t,A)$, удовлетворяющих условиям I—III. Уравнение III здесь является основным.

С вероятностью перехода можно связать два семейства линейных преобразований — в пространстве ограниченных $\mathcal{B}$-измеримых функций $\mathbf{B}_X$ из X в R, это банахово пространство с нормой $\|f\|=\sup\limits_x|f(x)|$, и пространстве $\mathcal{M}_X$ зарядов (счетно аддитивных функций ограниченной вариации) на $\mathscr{B}$, если ν — такой заряд, то

$$\|\nu\| = \operatorname{var} \nu = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \left| \int f \, d\nu \right|.$$

Эти семейства преобразований $T_{s,t}$ определяются равенствами;

$$[T_{s,t} f](x) = \int f(y) P(s, x, t, dy), \quad f \in \mathbf{B}_X, \tag{6}$$

$$[\nu T_{s,t}](A) = \int P(s, x, t, A) \nu(dx), \quad \nu \in \mathscr{M}_X. \tag{7}$$

Первое преобразование переводит $\mathbf{B}_X$ в $\mathbf{B}_X$, второе — $\mathscr{M}_X$ в $\mathscr{M}_X$. Мы обозначаем преобразование одной буквой, но к мерам оно применяется справа, а к функциям слева (это аналогично тому как матрицы применяются к строкам справа, а к столбцам слева).

Из условия II вытекает, что $\|T_{s,t}\| = 1$. Наконец, условие III перепишется так: при $0 \leqslant s < t < u$ будет

$$T_{s,t} T_{t,u} = T_{s,u}. \tag{8}$$

Так как $P(t, x, t, A) = I_A(x)$, то $T_{s,s} = I$, где I — оператор тождественного преобразования. Операторы $T_{s,t}$ обладают еще одним свойством: они неотрицательные функции из $\mathbf{B}_X$ переводят в неотрицательные, а меры из $\mathscr{M}_X$ в меры.

Приведем еще связь вероятности перехода с некоторым классом мартингалов, порождаемых марковским процессом. Пусть $f \in \mathbf{B}_X$, положим для $0 \leqslant t \leqslant a$

$$u(t, x) = \int P(t, x, a, dy) f(y). \tag{9}$$

Тогда при $t \in [s, a]$ числовой процесс $\zeta_t = u(t, \xi_s(t))$ является мартингалом относительно потока $\mathscr{F}_t^s$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}_{s,x}$ каково бы ни было $x \in X$. Действительно, при $s < v < t$

$$\mathbf{M}_{s,x}(u(t, \xi_s(t)) \mid \mathscr{F}_v^s) = \mathbf{M}_{v, \xi_s(v)} u(t, \xi_v(t)) =$$

$$= \int u(t, z) P(v, \xi_s(v), t, dz) = \int \left(\int P(t, z, a, dy) f(y) \right) \times$$

$$\times P(v, \xi_s(v), t, dz) = \int f(y) \int P(v, \xi_s(v), t, dz) P(t, z, a, dy) =$$

$$= \int f(y) P(v, \xi_s(v), a, dy) = u(v, \xi_s(v)).$$

Наоборот, если некоторая ограниченная функция $\Phi(t, x)$ такова, что при $t \in [s, a]$ $\Phi(t, \xi_s(t))$ является мартингалом, то

$$\Phi(t, \xi_s(t)) = \mathbf{M}_{s,x}(\Phi(a, \xi_s(a)) \mid \mathscr{F}_t^s) =$$

$$= \mathbf{M}_{t, \xi_s(t)} \Phi(t, \xi_t(a)) = \int \Phi(t, z) P(t, \xi_s(t), a, dz).$$

Таким образом, формула (9) задает все ограниченные функции $u(t,x)$ двух переменных, измеримые по x, для которых $u(t, \xi_s(t))$ является мартингалом относительно мер $\mathbf{P}_{s,x}$.

а) Однородные марковские процессы. *Марковский процесс* называется *однородным*, если вероятность перехода $P(s,x,t,A)$ зависит лишь от разности $t-s$: $P(s,x,t,A)=P(0,x,t-s,A)$. Для однородного процесса будем обозначать $P(0,x,t,A)$ через $P(t,x,A)$. В этом случае будем говорить об однородной по времени вероятности перехода. Уравнение Чепмена—Колмогорова для однородного процесса имеет вид

$$P(t+s, x, A)=\int P(t, x, dz)P(z, s, A). \tag{10}$$

Операторы $T_{s,t}$ зависят лишь от разности $t-s$, если положить $T_{0,t}=T_t$, то семейство операторов $\{T_t, t>0\}$ образует однопараметрическую полугруппу операторов: $T_{t+s}=T_tT_s$, операторы T_t коммутируют между собой. Формула (5) для однородного процесса имеет вид:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_{s,x}\{\xi_s(t_1)\in A_1, \ldots, \xi_s(t_n)\in A_n\}=\\&=\int\limits_{A_1}P(t_1-s, x, dx_1)\int\limits_{A_2}P(t_2-t_1, x_1, dx_2)\ldots\\&\ldots\int\limits_{A_n}P(t_n-t_{n-1}, x_{n-1}, dx_n).\end{aligned} \tag{11}$$

Эта формула показывает, что конечномерные распределения процесса $\xi_s(t+s)$ зависят только от x (начального состояния) и не зависят от s. Поэтому можно рассматривать один процесс $\xi(t)$ и семейство мер $\mathbf{P}_x$, $x\in X$, которые отвечают процессу, начинающемуся в момент 0 из точки x. Условие (2) для однородного марковского процесса принимает вид: при $0\leqslant u<t_1<\ldots$ $\ldots<t_n$

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_x\{\xi(t_1)\in A_1, \ldots, \xi(t_n)\in A_n \mid \mathcal{F}_u^0\}=\\&=\mathbf{P}_{\xi(u)}\{\xi(t_1-u)\in A_1, \ldots, \xi(t_n-u)\in A_n\}.\end{aligned} \tag{12}$$

Пусть $u(t,x)=T_tf(x)$. Тогда для всех $x\in X$ числовой процесс $u(t, \xi(t-s))$ является мартингалом по мере $\mathbf{P}_x$.

1.3. Регулярность. Нас будет интересовать вопрос, когда марковский процесс можно считать непрерывным или не имеющим разрывов второго рода, непрерывным справа. Следующий общий результат вытекает из (см. статью I, гл. 4, § 1, теорема 6 данного тома). Пусть X — полное метрическое пространство с метрикой $\rho(x,y)$, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра, порожденная шарами. Обозначим через $S_r(y)$ шар с центром в точке y радиуса r.

Теорема 1. Пусть вероятность перехода процесса $P(s,x,t,A)$ удовлетворяет условию равномерной стохастической непрерывности: для всех T

$$\lim_{h\to 0} \sup_{x\in X} \sup_{t\leqslant T, s\leqslant T, |t-s|\leqslant h} P(s, x, t, X\setminus S_r(x)) = 0. \tag{13}$$

Тогда существуют такие функции $\tilde{\xi}_s(t, \omega)$, что: а) $\tilde{\xi}_s(t, \omega)$ как функция $t \geqslant s$ не имеет разрывов второго рода, б) $\mathbf{P}_{s,x}\{\xi_s(t, \omega) = \tilde{\xi}_s(t, \omega)\} = 1$ для всех $s\in R_+$, $x\in X$.

Доказательство. Рассмотрим значение процесса $\xi_s(t, \omega)$ на множестве $\Lambda\cap[s, \infty)$, где Λ — множество рациональных точек. Как показано в упомянутой выше теореме, $\xi_s(t, \omega)$ на $\Lambda\cap[s, \infty)$ имеет с вероятностью $\mathbf{P}_{s,x}=1$ предел по любой убывающей или ограниченной возрастающей последовательности аргументов. Процесс $\xi_s(t+, \omega) = \xi_s(t, \omega)$ и будет удовлетворять нужным требованиям. □

Замечание. Легко привести достаточные условия, чтобы процессы $\tilde{\xi}_s(t)$ оказались непрерывными. Для этого достаточно, чтобы для всякого $r > 0$, $T > 0$, $x\in X$

$$\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \int P(s, x, t_k, dy) P(t_k, y, t_{k+1}, X\setminus S_r(y)) = 0,$$

$$s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Сумма под знаком предела есть

$$\mathbf{M}_{s,x} \sum_{k=0}^{n-1} I_{\{\rho(\tilde{\xi}_s(t_k), \tilde{\xi}_s(t_{k+1})) > r\}},$$

а величина под знаком $\mathbf{M}_{s,x}$ стремится (при почти всех r) к числу скачков процесса, превосходящих r. В частности, приведенное условие будет выполнено, если равномерно по $t \leqslant T$ и $x\in X$

$$P(t, x, t+h, X\setminus S_r(x)) = o(h).$$

а) Условия, связанные с мартингалами. Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathbf{C}_X$ — пространство непрерывных ограниченных функций с обычной нормой. Будем предполагать, что выполнены следующие условия: Ф1) операторы $T_{s,t}$ переводят $\mathbf{C}_X$ в $\mathbf{C}_X$, Ф2) $T_{s,t}f(x) \to f(x)$ при $s\to t$ равномерно на каждом шаре. Пусть $u_f(s, x, t) = T_{s,t}f(x)$. Тогда при $u<s<t$ процесс $u_f(s, \xi_u(s), t)$ является мартингалом. Можно выбрать модификацию этого мартингала так, чтобы он не имел разрывов второго рода и был непрерывным справа. Используя то обстоятельство, что можно выбрать такой счетный набор непрерывных функций $f_n(x)$ (например $r(x_n, x)$, где $\{x_n\}$ — плотная в X последовательность), которые разделяют точки из X, можно убедиться, что и для $\xi_u(s)$ существует модификация без разрывов второго рода, непрерывная справа.

§ 2. Чисто разрывные процессы

Будем предполагать, что фазовое пространство процесса $(X, \mathscr{B})$ таково, что $\mathscr{B}$ содержит все одноточечные множества $\{x\}$, $x \in \mathscr{B}$.

2.1. Определение. Марковский процесс называется *равномерно чисто разрывным*, если каково бы то ни было $T>0$, равномерно по $x \in X$, $t \leqslant T$ и $A \in \mathscr{B}$ существует предел

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(P(t, x, t+h, A) - I_A(x)) = q(t, x, A). \tag{14}$$

Как равномерный предел счетно аддитивных функций (по A) ограниченной вариации, $q(t, x, A)$ будет такой же функцией, при этом $q(t, x, \{x\})$ и $q(t, x, X \setminus \{x\})$ будут ограничены. Из (14) вытекает, что $q(t, x, X) = 0$. Положим

$$\lambda(t, x) = -q(t, x, \{x\}). \tag{15}$$

Тогда $q(t, x, X \setminus \{x\}) = \lambda(t, x)$ и

$$\pi(t, x, A) = \frac{1}{\lambda(t, x)} q(t, x, A \setminus \{x\}) \tag{16}$$

будет вероятностной мерой по A. (Она определена при $\lambda(t, x) > 0$; если $\lambda(t, x) = 0$, будем считать, что $\pi(t, x, A) = I_A(x)$.) Как уже указывалось, функция $\lambda(t, x)$ ограничена. Если $\lambda(t, x) < C$, то

$$1 - P\{t, x, t+h, \{x\}) < Ch, \quad P(t, x, t+h, \{x\}) > e^{-Ch},$$

при достаточно малых h. Так как при $t < s < u$

$$P(t, x, u, \{x\}) \geqslant P(t, x, s, \{x\}) P(s, x, u, \{x\})$$

(это вытекает из уравнения Колмогорова—Чепмена), то для всех x

$$p(s, x, t, \{x\}) \geqslant e^{-C(t-s)}, \quad P(s, x, t, X \setminus \{x\}) \leqslant 1 - e^{-C(t-s)}.$$

Рассматривая X как дискретное метрическое пространство, можем убедиться, что процесс имеет модификацию без разрывов второго рода, непрерывную справа.

Теорема 1. Пусть марковский процесс чисто разрывный и $\xi_s(t)$ не имеет разрывов второго рода и непрерывно справа. Обозначим через τ момент первого выхода процесса из начального состояния. Тогда

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\tau < t, \xi_s(\tau) \in A\} = \int_s^t \lambda(u, x) e^{-\int_s^u \lambda(v, x) dv} \pi(u, x, A)\, du. \tag{17}$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\xi_s(\tau) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{i}{2^n}\right) = x\right\}} I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{k+1}{2^n}\right) \in X \setminus \{x\}\right\}} \xi_s\left(\frac{k+1}{2^n}\right),$$

(хотя X не обязательно линейно, мы определяем $0\cdot x=0$, $0+x=x$ для $x\in X$), получаем

$$I_A(\xi_s(\tau))=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{k} I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{i}{2^n}\right)=x\right\}}\right) I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{k+1}{2^n}\right)\in A\setminus\{x\}\right\}}.$$

Точно так с вероятностью $\mathbf{P}_{s,x}=1$

$$\tau-s=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^n}\left(\prod_{i=1}^{k} I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{i}{2^n}\right)=x\right\}}\right) I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{k+1}{2^n}\right)\neq x\right\}}.$$

При $z>0$

$$\mathbf{M}_{s,x}e^{-z(\tau-s)}=\mathbf{M}_{s,x}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{kz}{2^n}}\left(\prod_{i=1}^{k} I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{i}{2^n}\right)=x\right\}}\right) I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{k+1}{2^n}\right)\neq x\right\}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{kz}{2^n}}\mathbf{M}_{s,x}\left(\prod_{i=1}^{k} I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{i}{2^n}\right)=x\right\}}\right) I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{k+1}{2^n}\right)\neq x\right\}}.$$

(Возможность внесения $\mathbf{M}_{s,x}$ под знак предела вытекает из того, что сумма под знаком предела не превосходит 1.) Так как

$$\mathbf{M}_{s,x}\left(\prod_{i=1}^{k} I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{i}{2^n}\right)=x\right\}}\right) I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{k+1}{2^n}\right)\neq x\right\}}=$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{k} P\left\{s+\frac{i-1}{2^n},\ x,\ s+\frac{i}{2^n},\ \{x\}\right\}\right)\times$$

$$\times P\left(s+\frac{k}{2^n},\ x,\ s+\frac{k+1}{2^n},\ X\setminus\{x\}\right)=$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{k}\left(1-\lambda\left(s+\frac{i-1}{2^n},\ x\right)\frac{1}{2^n}+o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\lambda\left(s+\frac{k}{2^n},\ x\right)\left(\frac{1}{2^n}+o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\right),$$

то

$$\mathbf{M}_{s,x}e^{-z(\tau-s)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda\left(s+\frac{k}{2^n},\ x\right)\exp\left\{-\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{k}\lambda\left(s+\frac{i-1}{2^n},\ x\right)-\frac{zk}{2^n}\right\}=$$

$$=\int_0^{\infty}\exp\left\{-\int_0^{t-s}\lambda(s+u,\ x)\,du-(t-s)\,z\right\}\lambda(t,\ x)\,dt.$$

Отсюда вытекает, что распределение τ имеет по мере $\mathbf{P}_{s,x}$ непрерывное распределение с плотностью

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}_{s,x}\{\tau<t\}=I_{\{t>s\}}\exp\left\{-\int_s^t\lambda(u,\ x)\,du\right\}\lambda(t,\ x). \qquad (18)$$

Из непрерывности распределения τ вытекает, что с вероятностью $\mathbf{P}_{s,x}=1$

$$I_{\{\tau<t\}}I_{\{\xi_s(\tau)\in A\}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k+1<2^n(t-s)}\left(\prod_{i=1}^{k}I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{i}{2^n}\right)=x\right\}}\right)I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{k+1}{2^n}\right)\in A\setminus\{x\}\right\}},$$

так что

$$\mathbf{M}_{s,x}I_{\{\tau<t\}}I_{\{\xi_s(\tau)\in A\}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k+1<2^n(t-s)}\mathbf{M}_{s,x}\left(\prod_{i=1}^{k}I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{i}{2^n}\right)=x\right\}}\right)I_{\left\{\xi_s\left(s+\frac{k+1}{2^n}\right)\in A\setminus\{x\}\right\}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k+1<2^n(t-s)}\left(\prod_{i=1}^{k}P\left(s+\frac{i-1}{2^n},\ x,\ s+\frac{i}{2^n},\ \{x\}\right)\times\right.$$

$$\left.\times P\left(s+\frac{k}{2^n},\ x,\ s+\frac{k+1}{2^n},\ A\setminus\{x\}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k+1<2^n(t-s)}\left(\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{2^n}\lambda\left(s+\frac{i-1}{2^n},\ x\right)+o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{2^n}\lambda\left(s+\frac{k}{2^n},\ x\right)+o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\pi\left(s+\frac{k}{2^n},\ x,\ A\right)\right).$$

Отсюда и получаем (17). □

Замечание. Из формул (17) и (18) вытекает, что при $s<t$

$$\pi(t,\ x,\ A)=\mathbf{P}_{s,x}\{\xi_s(\tau)\in A\mid\tau=t\}.$$

2.2. Уравнения Колмогорова.

Теорема 2. Для чисто разрывного процесса, удовлетворяющего соотношению (14), справедливо каждое из следующих уравнений для вероятности перехода

$$-\frac{\partial}{\partial s}P(s,\ x,\ t,\ A)=\int q(s,\ x,\ dy)P(s,\ y,\ t,\ A),\quad s<t,\qquad(19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P(s,\ x,\ t,\ A)=\int P(s,\ x,\ t,\ dy)q(t,\ y,\ A),\quad t>s.\qquad(20)$$

Первое уравнение называется первым (обратным) *уравнением Колмогорова*, второе — вторым (прямым) уравнением Колмогорова.

Доказательство. Имеем

$$P(s-h,\ x,\ t,\ A)-P(s,\ x,\ t,\ A)=$$

$$=\int[P(s-h,\ x,\ s,\ dz)-I_{\{x\in dz\}}]P(s,\ z,\ t,\ A).$$

Поэтому

$$|P(s-h,\ x,\ t,\ A)-P(s,\ x,\ t,\ A)|\leqslant$$

$$\leqslant\operatorname{var}|P(s-h,\ x,\ s,\ \cdot)-I_{\{x\}}|.$$

Справа написана вариация разности мер, $I_{\{x\}}$ — мера, сосредоточенная в точке x, равная в ней 1. Очевидно,

$$\operatorname{var}|P(s-h, x, s, \cdot)-I_{\{x\}}|\leqslant(1-P(s-h, x, s, \{x\})+$$
$$+P(s-h, x, s, X\setminus\{x\})=2|1-P(s-h, x, s, \{x\})|\leqslant$$
$$\leqslant 2(1-e^{-ch}).$$

Поэтому $P(s, x, t, A)$ непрерывно по s. Аналогично можно установить непрерывность $P(s,x,t,A)$ по t и по совокупности переменных s и t. Из непрерывности по t выражения, стоящего под знаком предела в левой части (14), и равномерной сходимости вытекает, что $q(t,x,A)$ непрерывно по t. Имеем

$$\frac{1}{h}(P(s-h, x, t, A)-P(s, x, t, A))=$$
$$=\int\frac{1}{h}(P(s-h, x, s, dz)-I_{\{x\in dz\}})P(s, z, t, A).$$

Из (14) вытекает, что существует предел справа и что он равен правой части (20). Поэтому существует и предел слева, который представляет собой левую производную функции $P(s,x,t,A)$ по s. Эта производная непрерывна по s. Поэтому она совпадает с обычной производной и выполнено (19). Аналогично из равенства

$$\frac{1}{h}(P(s, x, t+h, A)-P(s, x, t, A))=$$
$$=\int P(s, x, t, dy)\frac{1}{h}(P(t, y, t+h, A)-I_A(y))$$

получаем уравнение (20). □

Замечание. Используя функции $\lambda(s,x)$ и $\pi(s,x,A)$, уравнение (19) можно переписать так:

$$-\frac{\partial}{\partial s}P(s, x, t, A)=-\lambda(s, x)P(s, x, t, A)+$$
$$+\lambda(s, x)\int\pi(s, x, dy)P(s, y, t, A).$$

Так как

$$-\frac{\partial}{\partial s}P(s, x, t, A)+\lambda(s, x)P(s, x, t, A)=$$
$$=-\exp\left\{-\int_s^t\lambda(u, x)\,du\right\}\frac{\partial}{\partial s}\left(\exp\left\{\int_s^t\lambda(u, x)\,du\right\}P(s, x, t, A)\right)$$

и

$$\int_s^t\exp\left\{-\int_v^t\lambda(u, x)\,du\right\}P(v, x, t, A)\,dv=$$
$$=I_A(x)-\exp\left\{\int_s^t\lambda(u, x)\,du\right\}P(s, x, t, A),$$

то получаем следующее интегральное уравнение для $P(s, x, t, A)$

$$P(s, x, t, A)=I_A(x)\exp\left\{-\int_s^t \lambda(u, x)\,du\right\}+$$
$$+\int_s^t\int \lambda(v, x)\exp\left\{-\int_v^t \lambda(u, x)\,du\right\}\pi(v, x, dy)\,P(v, y, t, A)\,dv. \tag{21}$$

Уравнение (21) можно решать методом последовательных приближений. Если положить

$$\left.\begin{aligned} Q_0(s, x, t, A)&=\exp\left\{-\int_s^t \lambda(u, x)\,du\right\} I_A(x),\\ Q_n(s, x, t, A)&=\\ =\int_s^t\int \lambda(v, x)\exp&\left\{-\int_v^t \lambda(u, x)\,du\right\}\pi(v, x, dy)\times\\ &\times Q_{n-1}(v, y, A)\,dv, \quad n\geqslant 1, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

то

$$P(s, x, t, A)=\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(s, x, t, A). \tag{23}$$

Уравнение (21) имеет смысл и единственное решение, определяемое формулами (22)—(23) и при более широких условиях:

а) функция $\lambda(t, x)$ измерима по совокупности переменных, неотрицательна и ограничена,

б) функция $\pi(t, x, A)$ есть вероятностная мера по A, при $\lambda(t, x)>0$ $\pi(t, x, \{x\})=0$, при $\lambda(t, x)=0$ $\pi(t, x, \{x\})=1$, для всех $A\in\mathscr{B}$ $\pi(t, x, A)$ измерима по t, x.

Если вероятность перехода марковского процесса удовлетворяет уравнению (21), в котором λ и π удовлетворяют а) и б), то процесс будем называть *чисто разрывным.*

а) Процессы с конечным множеством состояний. Пусть X — конечное множество, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра всех его подмножеств. Для задания вероятности перехода достаточно задать функции

$$p(s, x, t, y)=P(s, x, t, \{y\}), \quad x, y\in X, \quad 0\leqslant s\leqslant t,$$

так как

$$P(s, x, t, A)=\sum_{y\in A} p(s, x, t, y).$$

Условие I выполнено автоматически, условие II сводится к следующему:

$$p(s, x, t, y) \geqslant 0, \quad \sum_{y \in X} p(s, x, t, y) = 1.$$

Уравнение Чепмена—Колмогорова имеет вид: при $s<t<u$

$$p(s, x, u, y) = \sum_{z \in X} p(s, x, t, z)\, p(t, z, u, y).$$

Для регулярности процесса достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon>0$ и $T>0$ можно было бы указать такое $\delta>0$, что при $s<T$, $0<t-s<\delta$ было бы $1-p(s, x, t, y)<\delta$ для всех $x \in X$. Операторы $T_{s,t}$ можно задать так. Занумеруем элементы $X: x_1, x_2, \ldots, x_m$. Тогда пространство $\mathbf{B}_X$ определяется векторами $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, где f_k — значение функции f в точке x_k, а пространство $\mathbf{M}_X$ — векторами $(p_1, \ldots, p_m)$, где p_i — значение меры (знакопеременной) в точке x_i. Тогда

$$T_{s,t} f(x_k) = \sum_{j=1}^{m} p(s, x_k, t, x_j)\, f_j,$$

$$\mu T_{s,t}(\{x_j\}) = \sum_{k} \mu(x_k)\, p(s, x_k, t, x_j).$$

Таким образом, если задать матрицу $\Pi_{s,t}$ с элементами $p(s, x_k, t, x_j)$ (k — номер строки, j — номер столбца), то $T_{s,t}$ действует на функции как матрица $\Pi_{s,t}$ на столбцы, а на меры, как эта матрица на строки.

Процесс будет число разрывным, если равномерно по $t \leqslant T$, каково бы ни было $T>0$, существуют пределы

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} p(t, x, t+h, y) = a(t, x, y), \quad x \neq y.$$

Обозначим $a(t, x, x) = -\sum_{y \neq x} a(t, x, y)$. Тогда первая и вторая системы Колмогорова имеют вид

$$-\frac{\partial}{\partial s} p(s, x, t, y) = \sum_{z \in X} a(s, x, z)\, p(s, z, t, y), \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(s, x, t, y) = \sum_{z \in X} p(s, x, t, z)\, a(t, z, y). \tag{25}$$

Уравнение (24) сводится к следующей системе интегральных уравнений

$$p(s, x, t, y) = I_{\{y\}}(x) \exp\left\{\int_s^t a(u, x, x)\, du\right\} +$$
$$+ \sum_{z \in X} \int_s^t \exp\left\{\int_v^t a(u, x, x)\, du\right\} a(v, x, z)\, p(v, z, t, y)\, dv. \tag{26}$$

б) Однородные процессы. Однородный процесс с вероятностью перехода $p(t, x, A)$ называется чисто разрывным, если

А) для всякого $x \in X$ равномерно по $A \in X \setminus \{x\}$ существует предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} P(h, x, A) = q(x, A),$$

где $q(x, A)$ — мера по A;

Б) функция

$$\lambda(x) = q(x, X \setminus \{x\})$$

является ограниченной.

(Эти условия по форме более слабые, чем те, которые приведены в п. 2.1, однако они эквивалентны им в однородном случае.) Опять из соотношения $P(h, x, \{x\}) \geqslant e^{-hC}$ для достаточно малых h вытекает, что

$$P(t, x, \{x\}) \geqslant e^{-tC}$$

для всех t; C не зависит от x. Из этого неравенства вытекает, что аддитивные функции множества

$$\frac{1}{h}(P(h, x, A) - I_A(x))$$

имеют вариацию, удовлетворяющую соотношению

$$\frac{2}{h}(1 - P(h, x, \{x\})) \leqslant \frac{2}{h}(1 - e^{-hC}) \leqslant 2C.$$

Это позволяет точно так, как в теореме 2, получить первое и второе уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, x, A) = -\lambda(x) P(t, x, A) + \int q(x, dy) P(t, x, A), \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, x, A) = -\int_A P(t, x, dy) \lambda(y) + \int P(t, x, dy) q(y, A). \quad (28)$$

Из уравнения (27) получаем такой аналог уравнения (21):

$$P(t, x, A) = e^{-t\lambda(x)} I_A(x) + \int_0^t \int e^{-(t-s)\lambda(x)} P(s, y, A) q(x, dy). \quad (29)$$

Из последнего соотношения вытекает, что при $x \overline{\in} A$

$$P(t, x, A) = \int_0^t e^{-(t-s)\lambda(x)} \int_A q(x, dy) e^{-s\lambda(y)} ds + O(t^2) =$$

$$= tq(x, A) + O(t^2);$$

$$P(t, x, \{x\}) = e^{-t\lambda(x)} + O(t^2).$$

Из этих соотношений находим, что предел

$$\frac{1}{h}(P(h, x, A)-I_A(x))=q(x, A)-\lambda(x) I_A(x)$$

существует равномерно по x и A.

в) Счетные однородные процессы. В этом случае $X=(1, 2, \ldots)$, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра всех подмножеств X, вероятность перехода определяется набором функций $p_{ij}(t)=P(t, i, \{j\})$. Уравнения Чепмена—Колмогорова имеют вид

$$p_{ij}(t+s)=\sum_k p_{ik}(t)\, p_{kj}(s).$$

Процесс будет чисто разрывным, если выполнены условия

α) существуют при $i\neq j$ пределы

$$a_{ij}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}p_{ij}(h);$$

β) существуют для всех i пределы

$$-a_{ii}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(1-p_{ii}(h));$$

γ) $\sup\limits_i(-a_{ii})<\infty$ и $\sum\limits_k a_{ik}=0$. Уравнения Колмогорова имеют вид (это первая и вторая системы)

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\sum_k a_{ik}p_{kj}(t), \quad \frac{d}{dt}p_{ij}(t)=\sum_k p_{ik}(t)\, a_{kj}. \tag{30}$$

Пусть P_t — оператор в пространстве ограниченных последовательностей $x=\{x_k\}$ в R, действующий по формуле

$$(P_t x)_k=\Sigma p_{ki}(t)\, x_i.$$

Из первого из уравнений (30) вытекает

$$\frac{d}{dt}P_t=AP_t, \tag{31}$$

где A — ограниченный оператор, определяемый равенством

$$(Ax)_k=\Sigma a_{ki}x_i.$$

Из равенства (31) и условия $P_0=I$ получаем

$$P_t=\exp\{tA\}=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n. \tag{32}$$

§ 3. Диффузионные процессы

Рассмотрим марковские процессы с фазовым пространством R^d. $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств в R^d. Относительно вероятности перехода будем предполагать выполненным следующее условие: для всех $T>0$ и $\varepsilon>0$

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{t\leqslant T}\sup_{x\in X}\sup_{0<t-s<\delta}\frac{1}{\delta}P(s, x, t, V_\varepsilon(x))=0, \tag{33}$$

где $V_\varepsilon(x)=\{y: |x-y|>\varepsilon\}$. Как вытекает из § 1, при этом условии существует непрерывная модификация марковского процесса. Непрерывный марковский процесс может служить моделью движения частицы под влиянием соударения с хаотически двигающимися молекулами среды, т. е. явления диффузии — распространения чужеродных частиц в данной среде. Этим объясняется название рассматриваемого класса марковских процессов.

3.1. Определение диффузионного процесса. Непрерывный марковский процесс с вероятностью перехода $P(s, x, t, A)$, удовлетворяющей условию (33), называется *диффузионным*, если для него выполнены следующие два условия:

I. Существует непрерывная функция $a(t, x)$, определенная на $R_+\times R^d$ со значениями в R^d, такая, что для всех $\varepsilon>0$ и $T>0$ равномерно по $x\in R^d$ и $t\leqslant T$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{|y-x|<\varepsilon}(y-x)P(t, x, t+h, dy)=a(t, x). \tag{34}$$

II. Существует непрерывная функция $B(t, x)$, определенная на $R_+\times R^d$ со значениями в $L(R^d)$, такая, что для всех $\varepsilon>0$, $T>0$ и $v, z\in R^d$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{|y-x|\leqslant\varepsilon}(y-x, z)(y-x, v)P(t, x, t+h, dy)=$$
$$=(B(t, x)z, v). \tag{35}$$

Векторная функция $a(t, x)$ называется *коэффициентом переноса* диффузионного процесса, $a(t, x)$ есть скорость течения в среде, в которой находится диффундирующая частица. Операторная функция $B(t, x)$ называется *оператором диффузии*, он характеризует дисперсию отклонения частицы от начального положения, $B(t, x)$ — неотрицательный симметричный оператор, $a(t, x)$ и $B(t, x)$ называются диффузионными коэффициентами процесса, точнее, если выбран некоторый базис в R^d $\{e_1, \ldots, e_d\}$, то диффузионными коэффициентами являются координаты вектора $a(t, x)$ в этом базисе: $a^k(t, x)=(a(t, x), e_k)$, $k=1, \ldots, d$ и элементы матрицы оператора $B(t, x)$ в этом базисе:

$$b^{ik}(t, x)=(B(t, x)e_i, e_k), \ i, k\leqslant d.$$

Простейшим примером диффузионного процесса в R^d является винеровский процесс. Это однородный процесс с независимыми приращениями $\xi(t)$, для которого $\xi(t+h)-\xi(t)$ имеет нормальное распределение со средним 0 и единичной корреляционной матрицей, т. е. распределение $\xi(t+h)-\xi(t)$ имеет плотность

$$(2\pi h)^{-d/2}\exp\left\{-\frac{1}{2h}(x, x)\right\}.$$

Вероятность перехода для такого процесса задается равенством

$$P(s, x, t, A) = (2\pi(t-s))^{-d/2}\int_A \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}(y-x, y-x)\right\}dy.$$

Простой подсчет показывает, что для всех $m>0$

$$\int |y-x|^m P(s, x, t, dy) = O(((t-s)^{m/2}),$$

$$\int (y-x) P(s, x, t, dy) = 0,$$

$$\int (y-x, z)(y-x, v) P(s, x, t, dy) = (z, v)(t-s).$$

Поэтому $\xi(t)$ является диффузионным процессом, для которого $a=0$, $B=I$, I — единичная матрица.

3.2. Уравнения Колмогорова. Наша цель — получить дифференциальные уравнения, с помощью которых можно определить вероятность перехода. Эти уравнения похожи на уравнения диффузии, получаемые в физике, лишнее свидетельство того, что название «диффузионный процесс» отражает существенное в процессе. Предварительно установим одно вспомогательное предложение.

Лемма 1. Если $\varphi(x)$ — числовая функция на R^d, ограниченная и непрерывная, дважды дифференцируемая в окрестности некоторой точки x_0, то

$$\lim_{h\to}\frac{1}{h}\left[\int \varphi(y) P(t, x_0, t+h, dy) - \varphi(x_0)\right] =$$

$$= (a(t, x_0), \varphi'(x_0)) + \frac{1}{2}\operatorname{Sp} B(t, x_0)\varphi''(x_0) \qquad (36)$$

($\varphi''(x_0)$ — оператор из $L(R^d)$, для которого

$$(\varphi''(x_0)u, v) = \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\varphi(x_0 + tu + sv)\Big|_{\substack{t=0,\\ s=0}},$$

$\operatorname{Sp} A$ — след оператора A).

Доказательство. Имеем для всякого $\varepsilon>0$

$$\int(\varphi(y)-\varphi(x_0)) P(t, x_0, t+h, dy) =$$

$$= \int_{|x-y|\leq\varepsilon}(\varphi(y)-\varphi(x_0)) P(t, x_0, t+h, dy) + o(h) =$$

$$= \int_{|x-y|\leq\varepsilon}(\varphi'(x_0), y-x_0) P(t, x_0, t+h, dy) +$$

$$+ \int_{|x-y|\leq\varepsilon}\frac{1}{2}(\varphi''(x_0)(y-x_0), y-x_0) P(t, x_0, t+h, dy) +$$

$$+\int \alpha_\varepsilon \, |y-x_0|^2 P(t, x_0, t+h, dy)+o(h),$$

где

$$\alpha_\varepsilon \, |y-x_0|^2=\varphi(y)-\varphi(x_0)-$$

$$-(\varphi'(x_0), y-x_0)-\frac{1}{2}(\varphi''(x_0)(y-x_0), y-x_0),$$

$\alpha_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Воспользовавшись соотношениями (34) и (35), получаем (36). □

Теорема 1. Пусть $\varphi \in C_{R^d}$ и функция

$$u(s, x)=\int P(s, x, t, dy)\,\varphi(y)-$$

дважды дифференцируема по x, производные u'_x и u''_x непрерывны по s. Тогда при $s<t$ она удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial s} u(s, x)=(a(s, x), u'_x(s, x))+\frac{1}{2} \operatorname{Sp} B(s, x)\, u''_{xx}(s, x), \quad (37)$$

$$s<t,$$

и начальному условию

$$\lim_{s\to t} u(s, x)=\varphi(x).$$

Доказательство. Имеем на основании леммы

$$u(s-h, x)-u(s, x)=\int u(s, y)\, P(s-h, x, s, dy)-u(s, x)=$$

$$=h\left[(a(s, x), u'_x(s, x))+\frac{1}{2} \operatorname{Sp} B(s, x)\, u''_{xx}(s, x)\right]+o(h).$$

Отсюда вытекает, что $u(s,x)$ имеет левую производную по s, ее значение равно левой части (37), взятой с минусом. Значит, она непрерывна и поэтому совпадает с обычной производной. □

Можно уравнение (37) связать с диффузионным процессом еще и так.

Теорема 2. Пусть функция $u(s, x)$ при $s\leqslant t$ непрерывна и ограничена и имеет непрерывные ограниченные производные $u'_s(s, x)$, $u'_x(s, x)$, $u''_{xx}(s, x)$. Если для $u(s, x)$ выполнено уравнение (37), то

$$u(s, x)=\int u(t, y)\, P(s, x, t, dy). \quad (38)$$

Доказательство. Для доказательства формулы (38) достаточно показать, что $u(s, \xi(s))$ является мартингалом. Имеем

$$\mathbf{M}(u(s+h, \xi(s+h))\,|\,\xi(s))=\int P(s, \xi(s), s+h, dy)\, u(s+h, y)=$$

$$=u(s, \xi(s))+u'_s(s, \xi(s))\,h+o(h)+\int u(s, y)\, P(s, \xi(s), s+h, dy)=$$

$$=u(s, \xi(s))+h(u'_s(s, \xi(s)))+(u'_x(s, \xi(s)), a(s, \xi(s)))+$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{Sp} B(s, \xi(s))\, u''_{xx}(s, \xi(s))+o(h)=u(s, \xi(s))+o(h).$$

Мы воспользовались леммой 1 и тем, что $u(s, x)$ удовлетворяет уравнению (37). Из этого соотношения легко получить такое:

$$\mathbf{M}(u((s+nh), \xi(s+nh)))=u(s, \xi(s))+no(h).$$

Если $s+nh=v$, то $h=\frac{v-s}{n}$ и $n=\frac{v-s}{h}$,

$$\mathbf{M}(u(v, \xi(v)) \mid \xi(s))=u(s, \xi(s))+\frac{1}{h}o(h).$$

Левая часть от h не зависит. Переходя к пределу при $h \to 0$, получаем

$$\mathbf{M}(u(v, \xi(v)) \mid \xi(s))=u(s, \xi(s))=\int u(v, y)\, P(s, \xi(s), v, dy). \ \square$$

Глава 2

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Уравнения Колмогорова для диффузионных процессов устанавливают связь между марковскими процессами и дифференциальными операторами второго порядка с диффузионными коэффициентами процесса. Если $a^k(t, x)$, $k=1, \ldots, d$ — координаты вектора переноса в некотором базисе, $b^{ik}(t, x)$ — элементы матрицы оператора диффузии в том же базисе, то этот дифференциальный оператор имеет вид

$$L_t u(t, x)=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{d} b^{ik}(t, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k}(t, x)+\sum_{k=1}^{d} a^k(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_k}(t, x) \qquad (1)$$

(здесь x^k — координаты точки x в указанном базисе). Оказывается, если нам удастся построить диффузионный процесс (т. е. семейство мер $\mathbf{P}_{s,x}$) с диффузионными коэффициентами, входящими в правую часть (1), то решения многих задач, содержащих дифференциальный оператор L, можно записать в виде

$$\mathbf{M}_{t,x}F(t, \xi_t(\cdot)),$$

где $F(t, x(\cdot))$ при фиксированном t — некоторая функция, определенная на пространстве непрерывных функций $x(\cdot)$ $\mathbf{C}_{R^d}^{([t,\infty])}$ определенных на $[t, \infty)$ и принимающих значения из R^d. Это и есть вероятностное представление решения. С помощью такого представления, используя свойства случайного процесса, можно получать результаты о свойствах решений. Кроме того, в теории вероятностей есть методы построения диффузионных процессов. Поэтому формулы такого вида могут использоваться для вычисления значений самого решения.

§ 1. Задачи для параболического уравнения

В этом параграфе L_t — дифференциальный оператор, определяемый равенством (1), символ t указывает, что коэффициенты оператора зависят от времени. Относительно функций $b^{ik}(t, x)$ и $a^k(t, x)$ будем предполагать, что они ограничены и достаточно гладки, так что решение рассматриваемых задач существует и единственно.

1.1. Задача Коши.

а) Обратная задача Коши для уравнения с правой частью. Пусть $T>0$. Рассмотрим решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x)+L_t u(t, x)=f(t, x), \quad t<T, \quad x \in R^d, \quad u(T, x)=\varphi(x). \tag{2}$$

Краевое условие задается на гиперплоскости $t=T$, функции $f(t, x)$ и $\varphi(x)$ ограничены и непрерывны.

Теорема 1. Пусть $\xi_t(\cdot)$ — диффузионный марковский процесс с диффузионными коэффициентами $a(t, x)$ и $B(t, x)$, которые в естественном базисе R^d имеют координаты a^k и матрицу (b^{ik}). Если $\mathbf{P}_{s,x}$ обозначает соответствующие процессу вероятности, то

$$u(t, x)=\mathbf{M}_{t,x}\varphi(\xi_t(T))-\mathbf{M}_{t,x}\int_t^T f(s, \xi_t(s))\,ds. \tag{3}$$

Доказательство. Покажем, что для всех $0 \leqslant s<t<T$ и $x \in X$ числовой процесс

$$\zeta(t)=u(t, \xi_s(t))-\int_s^T f(u, \xi_s(u))\,du$$

является мартингалом относительно меры $\mathbf{P}_{s,x}$. Имеем при $t+h \leqslant T$ (в обозначениях главы 1)

$$\mathbf{M}_{s,x}(\zeta(t+h)-\zeta(t) \mid \mathcal{F}_t^s)=$$
$$=\mathbf{M}_{s,x}(u(t+h, \xi_s(t+h))-u(t, \xi_s(t)) \mid \mathcal{F}_t^s)-$$
$$-\mathbf{M}_{s,x}\left(\int_t^{t+h} f(u, \xi_s\, u))\,du \mid \mathcal{F}_t^s\right)=$$
$$=\mathbf{M}_{s,x}(u'_x(t, \xi_s(t))h+(u'_x(t, \xi_s(t)), a(t, \xi_s(t))]h+$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{Sp} u''_{xx}(t, \xi_s(t)]B(t, \xi_s(t))h-hf(t, \xi_s(t)) \mid \mathcal{F}_t^s)+o(h)=o(h)$$

(мы воспользовались леммой 1 § 3, гл. 1 и уравнением (2)).

Если $0 \leqslant s < t < u \leqslant T$, $h = \frac{u-t}{n}$, то, суммируя равенства

$$\mathbf{M}_{s,x}(\zeta(t+kh) - \zeta(t+(k-1)h) \mid \mathcal{F}^s_{t+(k-1)h}) = o(h), \quad k = 1, \ldots, n,$$

и затем беря условное математическое ожидание относительно $\mathcal{F}^s_t$, получим

$$\mathbf{M}_{s,x}(\zeta(u) - \zeta(t) \mid \mathcal{F}^s_t) = no(h) = \frac{u-t}{h} o(h).$$

После перехода к пределу при $h \to 0$ убеждаемся, что $\zeta(t)$ — мартингал. Так как $\zeta(T) = \varphi(\xi_s(T))$, то

$$\mathbf{M}_{s,x}\varphi(\xi_s(T)) = \mathbf{M}_{s,x}\zeta(T) = \mathbf{M}_{s,x}\zeta(s) =$$
$$= \mathbf{M}_{s,x}u(s, \xi_s(s)) - \mathbf{M}_{s,x}\int_s^T f(u, \xi_s(u))\,du.$$

Из этой формулы получаем при $s=t$ (3), так как $\mathbf{M}_{s,x}u(s, \xi_s(s)) = u(s, x)$. $\square$.

б) Прямая задача Коши для уравнения с правой частью. Пусть $T>0$. Рассмотрим решение уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) - L_t u(t, x) = f(t, x), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in R^d, \\ u(0, x) = \varphi(x).\end{gathered} \tag{4}$$

Тогда функция $v_T(t, x) = u(T-t, x)$ будет удовлетворять уже уравнению

$$\frac{\partial v_T(t, x)}{\partial t} + \sum_{k=1}^d a^k(T-t, x)\frac{\partial v_T(t, x)}{\partial x^k} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^d b^{ik}(T-t, x)\frac{\partial^2 v_T(t, x)}{\partial x^i \partial x^k} = -f(T-t, x). \tag{5}$$

Пусть $\xi^T(t)$ — диффузионный процесс, заданный на $[0, T]$ с диффузионными коэффициентами, входящими в уравнение (5). Тогда, используя результат теоремы 1 находим

$$u(t, x) = v_T(T-t, x) = \mathbf{M}^T_{T-t,x}\varphi(\xi^T_{T-t}(T)) +$$
$$+ \mathbf{M}^T_{T-t,x}\int_{T-t}^T f(T-u, \xi^T_{T-t}(u))\,du. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{M}^T_{s,x}$ — мера, отвечающая процессу $\xi^T_s(t)$, начинающемуся в момент s из точки x.

Замечание. Пусть $L_t = L$, коэффициенты у L уже не зависят от t. Тогда распределение процесса $\xi^T_s(s+t)$ не зависит ни от s, ни от T. Решение задачи (4) можно записать для всех T с помощью такой формулы:

$$u(t, x)=\mathbf{M}_x\varphi(\xi(t))+\mathbf{M}_x\int_0^t f(u, \xi(u))\,du, \qquad (7)$$

процесс $\xi(u)$ — однородный марковский диффузионный процесс с диффузионными коэффициентами $a(x)$ и $B(x)$, определяемыми оператором L.

1.2. Формула Каца. Пусть $v(t, x)$ — ограниченная непрерывная функция. Рассмотрим обратную задачу Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x)+L_t u(t, x)+v(t, x)\,u(t, x)=0, \quad t\in[0, T], \qquad (8)$$
$$u(T, x)=\varphi(x);$$

функция φ — ограничена и непрерывна.

Теорема 2. Пусть $\xi_s(t)$ — такой же марковский диффузионный процесс, как в теореме 1. Тогда

$$u(t, x)=\mathbf{M}_{t,x}\varphi(\xi_t(T))\exp\left\{\int_0^T v(u, \xi_t(u))\,du\right\}. \qquad (9)$$

Эта формула называется *формулой Каца.*

Доказательство. Пусть $0\leqslant s<t\leqslant T$. Рассмотрим процесс

$$\zeta(t)=u(t, \xi_s(t))\exp\left\{\int_s^t v(u, \xi_s(u))\,du\right\}. \qquad (10)$$

Покажем, что он является мартингалом относительно меры $\mathbf{P}_{s,x}$. Как и в теореме 1, достаточно показать, что

$$\mathbf{M}_{s,x}(\zeta(t+h)-\zeta(t)\mid\mathcal{F}_t^s)=o(h).$$

Имеем

$$\mathbf{M}_{s,x}(\zeta(t+h)-\zeta(t)\mid\mathcal{F}_t^s)=\exp\left\{\int_s^t v(u, \xi_s(u))\,du\right\}\times$$
$$\times\mathbf{M}_{s,x}\left(u(t+h, \xi_s(t+h))e^{\int_t^{t+h} v(u,\xi_s(u))du}-u(t, \xi_s(t))\mid\mathcal{F}_t^s\right)=$$
$$=\exp\left\{\int_s^t v(u, \xi_s(u))\,du\right\}\mathbf{M}_{s,x}(u(t+h, \xi_s(t+h))+$$
$$+hu(t+h, \xi_s(t+h))v(t, \xi_s(t))-u(t, \xi_s(t))\mid\mathcal{F}_t^s)+o(h)=$$
$$=\exp\left\{\int_s^t v(u, \xi_s(u))\,du\right\}[u'_t(t, \xi_s(t))+(u'_x(t, \xi_s(t)), a(t, \xi_s(t)))+$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{Sp}u''_{xx}(t, \xi_s(t))B(t, \xi_s(t))+u(t, \xi_s(t))v(t, \xi_s(t))]h+$$
$$+o(h)=o(h)$$

(мы опять пользуемся леммой 1 § 3 гл. 1 и уравнением (8)). Значит, $\zeta(t)$ мартингал и

$$\mathbf{M}_{s,x}\zeta(T)=\mathbf{M}_{s,x}\zeta(s).$$

Но $\zeta_s=u(s,\xi_s(s))=u(s,x)$ с вероятностью $\mathbf{P}_{s,x}=1$. Отсюда получаем (9). □

Замечание 1. Пусть $f(t,x)$ — ограниченная непрерывная функция. Тогда решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,\ x)+L_t u(t,\ x)+v(t,\ x)\,u(t,\ x)=f(t,\ x),\quad t\in[0,\ T],$$

$$u(T,\ x)=\varphi(x) \tag{11}$$

представимо в виде

$$u(t,\ x)=\mathbf{M}_{t,x}\varphi(\xi_t(T))\exp\left\{\int_t^T v(u,\ \xi_t(u))\,du\right\}-$$

$$-\mathbf{M}_{t,x}\int_t^T f(s,\ \xi_t(s))\exp\left\{\int_t^s v(u,\ \xi_t(u))\,du\right\}ds. \tag{12}$$

Доказательство этой формулы сводится к доказательству того, что при $0\leqslant s<t\leqslant T$ процесс

$$\zeta(t)=u(t,\ \xi_s(t))\exp\left\{\int_s^t v(u,\ \xi_s(u))\,du\right\}-$$

$$-\int_s^t f(u,\ \xi_s(u))\exp\left\{\int_s^u v(\tau,\ \xi_s(\tau))\,d\tau\right\}du \tag{13}$$

является мартингалом, а это доказывается точно так, как в теоремах 1 и 2.

Замечание 2. Пусть $L_t=L$ (т. е. коэффициенты не зависят от t). Тогда решение уравнения

$$\frac{\partial u(t,\ x)}{\partial t}-Lu(t,\ x)-v(t,\ x)\,u(t,\ x)=f(t,\ x),$$

$$u(0,\ x)=\varphi(x)$$

представимо в виде

$$u(t,\ x)=\mathbf{M}_x\,\varphi(\xi(t))\exp\left\{\int_0^t v(s,\ \xi(s))\,ds\right\}+$$

$$+\mathbf{M}_x\int_0^t f(s,\ \xi(s))\exp\left\{\int_0^s v(u,\ \xi(u))\,du\right\}ds, \tag{14}$$

где $\xi(u)$ — однородный марковский диффузионный процесс такой же, как в формуле (7). Эта формула точно так получается из (13), как (7) из (6).

1.3. Смешанная задача для обратного параболического уравнения. Пусть $T>0$, $G(t,x)$ — достаточно гладкая функция, определенная на $[0,T]\times R^d$, для которой уравнение $G(t,s)=0$ определяет гладкую поверхность в $[0,T]\times R^d$, сечения этой поверхности S_t гиперплоскостями, перпендикулярными оси t, являются гладкими поверхностями в R^d, являющимися границей ограниченной односвязной области V_t. Обозначим $V=\{(t,x),\ t\in[0,T],\ x\in V_t\}$. Будем рассматривать такую граничную задачу в области V:

$$\frac{\partial u(t,\ x)}{\partial t}+L_t u(t,\ x)=f(t,\ x),$$
$$u(t,\ x)|_{x\in S_t}=\psi(t,\ x),\quad 0\leqslant t<T,$$
$$u(T,\ x)=\varphi(x). \tag{15}$$

Функция $\psi(t,\ x)$ достаточно гладкая, $\varphi(x)$ и $f(t,\ x)$ непрерывны, $\psi(t,\ x)=\varphi(x)$ при $x\in S_T$.

Обозначим через V' границу области V (она состоит из поверхностей $\bigcup\limits_t\{t\}\times S_t$ и V_T). Через $\tau_{V'}$ будем обозначать *момент первого выхода* процессов $\xi_s(t)$ *из области* V. $\tau_{V'}=T$, если $\xi_s(t)\in V_t$ для $t\in[s,\ T]$, если $G(t,\ x)>0$ при $(t;\ x)\in V$, то при $\tau_{V'}<T$, $\tau_{V'}$ совпадает с первым моментом, для которого $G(t,\ \xi_s(t))=0$. Очевидно $\tau_{V'}$ есть момент остановки относительно потока $\mathscr{F}_t^s$ при вероятностной мере $\mathbf{P}_{s,x}$, каково бы ни было $x\in X$.

Теорема 3. Пусть $u(t,\ x)$—решение задачи (15). Тогда

$$u(t,\ x)=\mathbf{M}_{t,x}\psi(\tau_{V'},\ \xi_t(\tau_{V'}))\,I_{\{\tau_{V'}<T\}}+$$
$$+\mathbf{M}_{t,x}\varphi(\xi_t(T))\,I_{\{\tau_{V'}=T\}}-\mathbf{M}_{t,x}\int\limits_t^{\tau_{V'}}f(u,\ \xi_t(u))\,du. \tag{16}$$

Доказательство. При сделанных предположениях функция $u(t,\ x)$ допускает продолжение на $[0,T]\times R^d$, для которого производные u'_t, u'_x, u''_{xx} ограничены и непрерывны (мы обозначаем продолжение тем же символом). Продолженная функция будет удовлетворять уравнению (2) уже в $[0,T]\times R^d$, при этом в $[0,T]\times R^d\setminus V$ функция $f(t,x)$ полагается просто равной левой части (2), куда подставлено выбранное продолжение функции $u(t,x)$. Как было доказано в теореме 1, процесс

$$\zeta(t)=u(t,\ \xi_s(t))-\int\limits_s^t f(u,\ \xi_s(u))\,du$$

является мартингалом. Так как $s\leqslant\tau_{V'}$ с вероятностью $\mathbf{P}_{s,x}=1$, то

$$\mathbf{M}_{s,x}\zeta(\tau_{V'})=\mathbf{M}_{s,x}\zeta(s).$$

Так как $\zeta(s)=u(s, x)$ с вероятностью $\mathbf{P}_{s,x}=1$, то

$$u(s, x)=\mathbf{M}_{s,x}\zeta(s). \tag{17}$$

Имеем

$$\zeta(\tau_{V'})=u(\tau_{V'}, \xi_s(\tau_{V'}))-\int\limits_s^{\tau_{V'}} f(u, \xi_s(u))\,du, \tag{18}$$

при этом $f(u, \xi_s(u))$ совпадает со значениями функции f на области V, именно теми значениями f, которые входят в правую часть (15). Далее, если $\tau_{V'}<T$, то $u(\tau_{V'}, \xi_s(\tau_{V'}))=\psi(\tau_{V'}, \xi_s(\tau_{V'}))$, если $\tau_{V'}=T$, то $u(\tau_{V'}, \xi_s(\tau_{V'}))=\varphi(\xi_s(T))$. Подставляя эти значения в (18) из (17), получим (16). □

Аналогично теореме 3 доказывается следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и функция $v(t, x)$ непрерывна вместе со своими производными v'_t, v'_x, v''_{xx} в замыкании области V. Если $u(t, x)$ удовлетворяет на V уравнению

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}+L_t u(t, x)+v(t, x)\,u(t, x)=f(t, x) \tag{19}$$

с граничными условиями $u(t, x)|_{x\in S_t}=\psi(t, x)$, $0\leqslant t<T$, $u(T, x)=\varphi(x)$, $x\in V_T$; то $u(t, x)$ представимо в виде

$$u(t, x)=\mathbf{M}_{t,x}\psi(\tau_{V'}, \xi_t(\tau_{V'}))\exp\left\{\int\limits_t^{\tau_{V'}} v(u, \xi(u))\,du\right\}I_{\{\tau_{V'}<T\}}+$$

$$+\mathbf{M}_{t,x}\varphi(\xi_t(\tau))\exp\left\{\int\limits_t^{T} v(u, \xi_t(u))\,du\right\}I_{\{\tau_{V'}=T\}}-$$

$$-\mathbf{M}_{t,x}\int\limits_0^{\tau_{V'}} f(u, \xi_t(u))\exp\left\{\int\limits_t^{u} v(\tau, \xi_t(\tau))\,d\tau\right\}du. \tag{20}$$

§ 2. Краевые задачи для эллиптических операторов

Пусть $a(x)$ и $B(x)$ — ограниченные достаточно гладкие функции со значениями из R^d и $L(R^d)$ соответственно, $a^k(x)$, $k=1, 2, \ldots, d$, — координаты $a(x)$ в естественном базисе, $b^{ik}(x)$ — элементы матрицы оператора $B(x)$ в этом же базисе. Будем предполагать, что существует марковский диффузионный процесс с такими диффузионными коэффициентами. Пусть G — ограниченная область в R^d с гладкой границей G'. Будем рассматривать дифференциальный оператор

$$Lu=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{k} b^{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^k}(x)+\sum_{k=1}^{d} a^k(x)\frac{\partial u}{\partial x^k}(x) \tag{21}$$

(из того, что $b^{ik}(x)$ являются диффузионными коэффициентами, вытекает неотрицательная определенность матрицы $(b^{ik}(x))$. Мы будем предполагать, что эта матрица положительно определена. Поэтому оператор L будет эллиптическим.

2.1. О моментах выхода из ограниченной области. Пусть $\xi(t)$ — однородный марковский процесс с диффузионными коэффициентами $a(x)$ и $B(x)$. Обозначим через τ_G момент первого выхода из ограниченной области G:

$$\tau_G=\inf\{s : \rho(\xi(s), X\setminus G)=0\},$$

здесь $\rho(x, F)$ — расстояние от точки x до множества F, если для всех s будет $\rho(\xi(s), X\setminus G)>0$, считаем $\tau_G=\infty$. Наша цель в этом пункте доказать, что $\mathbf{M}_x\tau_G<\infty$ и значит

$$\mathbf{P}_x\{\tau_G<+\infty\}=1.$$

Предварительно установим одно предложение, имеющее самостоятельный интерес.

Лемма 1. Пусть $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая финитная функция. Тогда процесс

$$\zeta(t)=f(\xi(t))-\int_0^t Lf(\xi(s))\,ds$$

является мартингалом относительно потока $\mathcal{F}_t^0$ и меры $\mathbf{P}_x$, каково бы ни было x.

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{M}_x(\zeta_{t+h}-\zeta_t\,|\,\mathcal{F}_t^0)=\mathbf{M}_{\xi(t)}f(\xi(h))-f(\xi(t))+\int_t^{t+h}\mathbf{M}_{\xi(t)}Lf(\xi(s))ds.$$

Из леммы 1 § 1 вытекает, что

$$\mathbf{M}_xf(\xi(h))=hLf(x)+h\alpha_h(x),$$

где $\alpha_h(x)$ ограничено и $\alpha_h(x)\to 0$ и $h\to 0$ равномерно по x. Далее

$$\int_0^h\mathbf{M}_xLf(\xi(s)\;ds=hLf(x)+\int_0^h[\mathbf{M}_xLf(\xi(s))-Lf(x)]\,ds.$$

Легко убедиться, что $\sup\limits_x|\mathbf{M}_xg(\xi(s))-g(x)|\to 0$ для всякой непрерывной финитной функции g. Поэтому равномерно по x

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h[\mathbf{M}_xLf(\xi(s))-Lf(x)]\,ds=0.$$

Значит,

$$\mathbf{M}_x(\zeta_{t+h}-\zeta_t\,|\,\mathcal{F}_t^0)=o(h), \tag{22}$$

где величина $o(h)$ зависит от $\xi(t)$, но $\frac{o(h)}{h}\to 0$ стремится к нулю равномерно по $\xi(t)$. Поэтому точно так, как в теореме 1 § 1, устанавливаем, что из (22) вытекает утверждение леммы. □

Так как G ограничено, можно указать такой шар S, что $G\subset S$. Тогда при $x\in G$

$$\mathbf{P}_x\{\tau_G<\tau_S\}=1.$$

Значит, изучая ограниченность τ_G, достаточно рассмотреть случай $G=S$.

Теорема 1. Равномерно по $x\in S$ $\mathbf{M}_x\tau_S$ ограничено.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $S=\{y: |y|<r\}$. Пусть $c\in R^d$, $|c|=1$,

$$\varphi(x)=\exp\{k(c, x)\}.$$

Тогда

$$L\varphi(x)=\exp\{k(c, x)\}\left[k(c, a(x))+\frac{k^2}{2}(B(x)c, c)\right].$$

Обозначим через $\alpha=\sup\limits_{x\in S}|a(x)|$, $\beta=\inf\limits_{x\in S}(B(x)c, c)$. По предположению о положительной определенности $B(x)$ будет $\beta>0$. Поэтому

$$L\varphi(x)\geqslant\exp\{-kr\}\left[-\alpha k+\frac{k^2}{2}\beta\right]$$

и, выбирая $k=\dfrac{3\alpha}{\beta}$, получим при $x\in S$

$$L\varphi(x)\geqslant\exp\left\{-\frac{3\alpha^2 r}{\beta}\right\}\frac{3\alpha^2}{2\beta}=c_1>0.$$

Пусть $s<\tau_S$. Тогда $\xi(s)\in S$ и $L\varphi(\xi(s))\geqslant c_1$. Используя то, что $\varphi(\xi(t))-\int\limits_0^t L\varphi(\xi(s))\,ds$ является мартингалом, получим

$$\mathbf{M}_x\left[\varphi(\xi(\tau_s\wedge t))-\int\limits_0^{\tau_s\wedge t}L\varphi(\xi(s))\,ds\right]=\varphi(x),$$

$$\mathbf{M}_x\int\limits_0^{t_s\wedge t}L\varphi(\xi(s))\,ds=\mathbf{M}_x\varphi(\xi(\tau_s\wedge t))-\varphi(x),$$

$$c_1\mathbf{M}_x\tau_s\wedge t\leqslant\sup_{x\in S}e^{k(c,x)}-\inf_{x\in S}e^{k(c,x)}<e^{kr}.$$

Так как для $\mathbf{M}_x\tau_S\wedge t$ получена равномерная оценка сверху, то, переходя к пределу при $t\to+\infty$, убеждаемся, что она справедлива и для τ_S:

$$\mathbf{M}\tau_S\leqslant\frac{2\beta}{3\alpha^2}\exp\left\{\frac{6\alpha^2 r}{\beta}\right\}. \qquad □$$

2.2. Решение внутренней краевой задачи. Рассмотрим сначала решение *задачи Дирихле* для уравнения

$$Lu(x)=0,\ x\in G,\ u(x)=\varphi(x)\ \text{при}\ x\in G'. \tag{23}$$

Так как $u(t, x) = u(x)$ является в то же время решением такой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu(x) = 0, \quad u(t, x) = \varphi\ x), \text{ при } x \in G' \quad u(T, x) = u(x)$$

в области $[0, T] \times G$, то на основании теоремы 3 § 1

$$u(x) = \mathbf{M}_x \varphi(\xi(\tau_G)) I_{\{\tau_G < T\}} + \mathbf{M}_x u(\xi(T)) I_{\{\tau_G \geqslant T\}}.$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $T \to \infty$, получаем

$$u(x) = \mathbf{M}_x \varphi(\xi(\tau_G)).$$

Аналогичный подход возможен и при решении более сложной краевой задачи, связанной с оператором L.

Теорема 2. Пусть $V(x) \leqslant 0$ и $f(x)$ — ограниченные непрерывные функции, а $u(x)$ является решением уравнения

$$Lu(x) + V(x) u(x) = f(x) \tag{24}$$

с граничным условием

$$u(x) = \varphi(x) \text{ при } x \in G'.$$

Тогда

$$u(x) = \mathbf{M}_x \left[\varphi(\xi(\tau_G)) \exp\left\{ \int_0^{\tau_G} V(\xi(s))\, ds \right\} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\tau_G} f(\xi(s)) \exp\left\{ \int_0^s V(\xi(u))\, du \right\} ds \right]. \tag{25}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 3 (см. также замечание 1 к этой теореме) установлено, что процесс

$$\zeta(t) = u(\xi(t)) \exp\left\{ \int_0^t V(\xi(u))\, du \right\} - \int_0^t f(\xi(s)) \exp\left\{ \int_0^s V(\xi(u))\, du \right\} ds$$

является мартингалом. Поэтому для всех $t > 0$

$$\mathbf{M}_x \zeta(t \wedge \tau_G) = \mathbf{M}_x(\zeta(0)) = u(x),$$

$$u(x) = \mathbf{M}_x u(\xi(t \wedge \tau_G)) \exp\left\{ \int_0^{t \wedge \tau_G} V(\xi(s))\, ds \right\} -$$

$$- \mathbf{M}_x \int_0^{t \wedge \tau_G} f(\xi(s)) \exp\left\{ \int_0^s V(\xi(u))\, du \right\} ds. \tag{26}$$

Формула (25) получается из (26) с помощью предельного перехода при $t \to \infty$.

Возможность предельного перехода под знаком $\mathbf{M}_x$ в правой части (26) вытекает из того, что в силу неравенства $V \leqslant 0$

$$\exp\left\{\int_0^t V(\xi(s))\,ds\right\}\leqslant 1$$

и, значит, при $t<\tau_G$

$$\left|u(\xi(t))\exp\left\{\int_0^t V(\xi(s))\,ds\right\}-\right.$$

$$\left.-\int_0^t f(\xi(s))\exp\left\{\int_0^s V(\xi(u))\,du\right\}ds\right|\leqslant c_1+c_2\tau_G,$$

где $c_1=\sup\limits_{x\in G}u(x)$, $c_2=\sup\limits_{x\in G}f(x)$, а $\mathbf{M}_x\tau_G<\infty$ в силу теоремы 1. □

а) Уравнение со знакопеременным V. Если функция $V(x)$ в уравнении (24) меняет знак (возможно, просто положительна), формула (25) может не выполняться. Например, может существовать ненулевое решение уравнения (24) с $f=0$ и $\varphi=0$, а правая часть (25) при этом будет равна нулю. Это связано с тем, что предельный переход в равенстве (26) неоправдан. Для его оправдания нам потребуются условия конечности $\mathbf{M}_x e^{\lambda\tau_G}$ при $\lambda>0$.

Лемма 2. Если $\sup\limits_{x\in G}\mathbf{M}_x\tau_G\leqslant q$, то при $\lambda<(eq)^{-1}$ будет $\mathbf{M}_x e^{\lambda\tau_G}<\infty$.

Доказательство. При $c>q$ будет для всех $x\in G$

$$\mathbf{P}_x\{\tau_G>c\}\leqslant\frac{q}{c}.$$

Заметим, что

$$\mathbf{P}_x\{\tau_G>nc\}=\mathbf{M}_x I_{\{\tau_G>nc\}}=\mathbf{M}_x I_{\{\tau_G>(n-1)c\}}\mathbf{M}_x\left(I_{\{\tau_G>nc\}}\mid\mathcal{F}^0_{(n-1)c}\right)=$$

$$=\mathbf{M}_x I_{\{\tau_G>(n-1)c\}}\mathbf{M}_{\xi((n-1)c)} I_{\{\tau_G>c\}}\leqslant\frac{q}{c}\,\mathbf{P}_x\{\tau_G>(n-1)\,c\}\leqslant\left(\frac{q}{c}\right)^n.$$

Поэтому

$$\mathbf{M}e^{\lambda\tau_G}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}e^{\lambda nc}\mathbf{P}\{\tau_G\geqslant(n-1)\,c\}=e^{\lambda c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{\lambda c}\cdot\frac{q}{c}\right)^n$$

и при $\lambda<\frac{1}{c}\ln\frac{c}{q}$ ряд справа сходится. Максимальное значение правая часть принимает при $c=qe$. □

Лемма 3. Пусть при некотором $\lambda>0$ существует строго положительное решение уравнения

$$Lu(x)+\lambda u(x)=0,\quad x\in G,$$
$$\inf_{x\in G}u(x)=c>0.$$

Тогда $\mathbf{M}_x e^{\lambda\tau_G}<\infty$.

Доказательство. Можно применить формулу (26) с $V=\lambda$, $f=0$. Получим

$$u(x)=\mathbf{M}_x u(\xi(t\wedge\tau_G))\exp\{\lambda t\wedge\tau_G\}.$$

Поэтому

$$\mathbf{M}_x\exp\{\lambda t\wedge\tau_G\}\leqslant c^{-1}u(x).$$

Переходя к пределу при $t\to\infty$, получим доказательство леммы. □

Теорема 3. Пусть $\mathbf{M}_x e^{\lambda\tau_G}<\infty$ при некотором $\lambda>0$. Тогда при $V(x)\leqslant\lambda$ решение уравнения (24) с граничным условием $u(x)=\varphi(x)$, $x\in G'$ представимо по формуле (25).

Доказательство. При сделанном предположении для $s\leqslant\tau_G$

$$\exp\left\{\int_0^s V(\xi(s))\,ds\right\}\leqslant e^{\lambda s},$$

$$\int_0^{t\wedge\tau_G}\exp\left\{\int_0^s V(\xi(u))\,du\right\}ds\leqslant\frac{\exp\{\lambda t\wedge\tau_G\}-1}{\lambda}.$$

Поэтому

$$\left|u(\xi(t\wedge\tau_G))\exp\left\{\int_0^{t\wedge\tau_G}V(\xi(u))\,du\right\}-\right.$$

$$\left.-\int_0^{t\wedge\tau_G}f(\xi(s))\exp\left\{\int_0^s V(\xi(u))\,du\right\}ds\right|\leqslant c_1+c_2e^{\lambda\tau_G},$$

где c_1 и c_2 — некоторые постоянные. Поэтому в (26) возможен предельный переход под знаком $\mathbf{M}_x$. □

§ 3. Винеровская мера и решение уравнений с оператором Лапласа

3.1. Винеровский процесс в R^d. *Винеровский процесс* в R^d — это однородный процесс $w(t)$ с независимыми приращениями, для которого величина $w(t+h)-w(t)$ имеет нормальное распределение со средним 0 и корреляционным оператором hI (I — единичный оператор в R^d), т. е. распределение с плотностью

$$g_h(x)=(2\pi h)^{-d/2}\exp\left\{-\frac{1}{2h}|x|^2\right\}. \tag{27}$$

а) Марковский процесс, связанный с винеровским. Поскольку винеровский процесс имеет независимые приращения, то при $0\leqslant t_1<\ldots<t_n\leqslant t<t+h$

$$\mathbf{P}\{w(t+h)\in A/w(t_1),\ \ldots,\ w(t_n),\ w(t)\}=$$

$$=\mathbf{P}\{w(t+h)-w(t)\in A-w(t)/w(t_1),\ \ldots,\ w(t_n),\ w(t)\}=$$

$$=\mathbf{P}\{w(t+h)-w(t)\in A-w(t)/w(t)\}=$$
$$=\mathbf{P}(w(h)-w(0)\in A-x\}|_{x=w(t)},$$

здесь $A-x=\{y:y+x\in A\}$, мы воспользовались не только независимостью приращений, но и однородностью. Полагая

$$P^w(h,\ x,\ A)=\mathbf{P}\{w(h)-w(0)\in A-x\}=$$
$$=(2\pi h)^{-d/2}\int\limits_A \exp\left\{-\frac{1}{2h}|y-x|^2\right\}dy, \tag{28}$$

убеждаемся, что

$$\mathbf{P}\{w(t+h)\in A/w(t_1),\ \ldots,\ w(t_n),\ w(t)\}=P^w(h,\ w(t),\ A),$$

это означает, что семейство процессов $w(t)-w(0)+x$ можно рассматривать как однородный марковский процесс с вероятностью перехода (28). Этот процесс обладает свойством однородности по пространству: процесс, начинающийся в точке x, может быть получен сдвигом на x траектории процесса, начинающегося в точке 0. Будем в дальнейшем считать, что $w(0)=0$, и тогда $w(t)$ обозначает траекторию марковского процесса, начинающегося в точке 0. Если, как в предыдущем параграфе, обозначать через $\mathbf{P}_x$ распределение в $\mathbf{C}_{R^d}$, отвечающее начальному значению x, то однородность по пространству означает, что для всякой ограниченной измеримой функции $f(x(\cdot))$ на $\mathbf{C}_{R^d}$

$$\mathbf{M}_x f(\xi(\cdot))=\mathbf{M}_0 f(\xi(\cdot)+x)$$

(здесь через $\xi(\cdot)$ обозначена траектория процесса), если $f(x(\cdot))$ измерима, то такой будет и функция $f_a(x(\cdot))=$ $=f(x(\cdot)+a)$. Таким образом, для процесса, однородного по пространству, можно вместо семейства мер $\mathbf{P}_x$ рассматривать единственную меру.

Используя вид вероятности перехода, убеждаемся, что

$$P^w(h,\ x,\ V_\varepsilon(x))=\mathbf{P}\{|w(h)|>\varepsilon\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^m}\mathbf{M}|w(h)|^m=$$
$$=\frac{h^{m/2}}{\varepsilon^m}\mathbf{M}|w(1)|^m=o(h),\quad m>2, \tag{29}$$

$$\int\limits_{|y-x|\leqslant\varepsilon}(y^i-x^i)P^w(h,\ x,\ dy)=\int\limits_{|y|\leqslant\varepsilon}y^iP^w(h,\ 0,\ dy)=$$
$$=\mathbf{M}w^i(h)I_{\{|w(h)|\leqslant\varepsilon\}}=\mathbf{M}w^i(h)+\mathbf{M}w^i(h)I_{\{|w(h)|>\varepsilon\}}=$$
$$=O((\mathbf{M}|w(h)|^2)^{1/2}(\mathbf{P}\{|w(h)|>\varepsilon\})^{1/2})=o(h) \tag{30}$$

(мы воспользовались оценкой (29)). Наконец, аналогично

$$\int\limits_{|y-x|\leqslant\varepsilon}(y^i-x^i)(y^k-x^k)P^w(h,\ x,\ dy)=\mathbf{M}(w^i(h)w^k(h))+$$
$$+v(h)=\delta_{ik}h+o(h).$$

Таким образом, $w(t)$ — диффузионный процесс с постоянными диффузионными коэффициентами: $a^i=0$, $b^{ik}=\delta_{ik}$.

б) Винеровская мера. Винеровский процесс $w(t)$ (считаем, как говорилось выше, что $w(0)=0$) обладает еще одним замечательным свойством — автомодельностью. Это означает, что существует такая функция ψ из R_+ в R_+, для которой для всякого $\lambda>0$ процесс $w(\lambda t)$ имеет такие же распределения, как и $\psi(\lambda)w(t)$, конкретно для винеровского процесса $\psi(\lambda)=\sqrt{\lambda}$. Действительно, $w(\lambda t)$ и $\sqrt{\lambda}w(t)$ — однородные процессы с независимыми приращениями, $w(\lambda t)$ и $\sqrt{\lambda}w(t)$ имеют нормальное распределение со средним 0 и корреляционным оператором λtI.

Обозначим через $\mathbf{P}_x{}^T$ меру, отвечающую марковскому процессу на пространстве функций $\mathbf{C}_{R^d}[0,T]$, определенных на $[0,T]$ (она определяется своими значениями на цилиндрических множествах с основаниями из $[0,T]$, см. статью 1, гл. 2, § 4.2). Из однородности и автомодельности вытекает, что для всякой ограниченной измеримой функции $f(x(\cdot))$ на $\mathbf{C}_{R^d}[0,T]$ выполняется равенство

$$\mathbf{M}_x^T f(\xi(\cdot))=\mathbf{M}_0^1 R_{T,x} f(\xi(\cdot)),$$

где $\mathbf{M}_x^T$ — математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_x^T$, а $R_{T,x}f(x(\cdot))=f(R_{T,x}x(\cdot))$, $R_{T,x}(t)=\sqrt{T}\,x\left(\frac{t}{T}\right)+x$ — измеримое отображение $\mathbf{C}_{R^d}[0,1]$ в $\mathbf{C}_{R^d}[0,T]$. Меру $\mathbf{P}_0^1$ на $\mathbf{C}_{R^d}[0,1]$ обычно и называют *винеровской мерой*. Эту меру будем обозначать μ_w, а интегралы по ней $\int f d\mu_w$. Она определяется своими интегралами на цилиндрических функциях: если $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ — измеримая числовая функция на $(R^d)^n$ и

$$f_\Phi(t_1,\ldots,t_n,x(\cdot))=\Phi(x(t_1),\ldots,x(t_n)),$$

где $0=t_0<t_1<\ldots<t_n\leqslant 1$, это цилиндрическая функция с основанием $\{t_1,\ldots,t_n\}$, тогда, считая $x_0=0$, имеем

$$\int f_\Phi(t_1,\ldots,t_n,x(\cdot))\,d\mu_w=$$
$$=\prod_{k=1}^n(2\pi(t_k-t_{k-1}))^{-\frac{d}{2}}\int\ldots\int\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\frac{|x_k-x_{k-1}|^2}{t_k-t_{k-1}}\right\}\times$$
$$\times\Phi(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n. \qquad (31)$$

Аппроксимация непрерывных функций цилиндрическими позволяет использовать формулу (31) для вычисления интегралов по винеровской мере с помощью предельного перехода.

Лемма 1. Пусть $f(x(\cdot))$ — непрерывный ограниченный функционал на $\mathbf{C}_{R^d}[0,1]$. Обозначим для $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$ и $0=x_0,x_1,\ldots,x_n\in R^d$ через $l(t_1,\ldots,t_n,x_1,\ldots,x_n,t)$ ломанную в $[0,1]\times R^d$ с вершинами $(t_i;x_i)$. Тогда

$$\int f(x(\cdot))\,d\mu_w = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \prod_{k=1}^{n} (2\pi (t_k - t_{k-1}))^{-d/2} \times$$

$$\times \int \ldots \int \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k-1}^{n} \frac{|x_k - x_{k-1}|^2}{t_k - t_{k-1}}\right\} f(l(t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n, \cdot)) \times$$

$$\times dx_1 \ldots dx_n. \tag{32}$$

Доказательство. Под знаком предела стоит

$$\int f(l(t_1, \ldots, t_n, x(t_1), \ldots, x(t_n), \cdot))\,d\mu_w$$

и при $\max \Delta t_k \to 0$ для всех $x(\cdot) \in C_R{}^d\,[0, 1]$ $f(l(t_1, \ldots, t_n, x(t_1), \ldots, x(t_n), \cdot)) \to f(x(\cdot))$. Поэтому утверждение леммы вытекает из теоремы Лебега. □

3.2. Стохастический интеграл. Нам понадобится интеграл вида $\int_0^1 (f(w(t)), dw(t))$, где $f(x)$ — достаточно гладкая функция из R^d в R^d. Это частный случай *стохастического интеграла* по винеровскому процессу. Рассмотрим подробно случай $d = 1$.

Лемма 2. Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция из R в R и $f'(x)$ ограничена, а $w(t)$ — одномерный винеровский процесс, тогда с вероятностью 1 существует

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{0\leqslant k<2^n} f\left(\left(w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)\left[w\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]. \tag{33}$$

Доказательство. Обозначим величину под знаком предела в (33) через $S_n(f)$. Тогда

$$S_n(f) - S_{n+1}(f) = \sum_{0\leqslant k<2^n}\left(f\left(w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)\left[w\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right] -\right.$$

$$- f\left(w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)\left[w\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right] - f\left(w\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right)\left[w\left(\frac{k+1}{2^n}\right) -\right.$$

$$\left.\left. - w\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right]\right) = \sum_{0\leqslant k<2^n}\left[f\left(w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) - f\left(w\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right)\right] \times$$

$$\times \left[w\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - w\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right].$$

Поэтому

$$\mathbf{M}|S_n(f) - S_{n+1}(f)|^2 = \sum_{0\leqslant k<2^n} \mathbf{M}\left[f\left(w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) - f\left(w\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right)\right]^2 \times$$

$$\times \left[w\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - w\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right]^2 + 2\sum_{0\leqslant k<i<2^n} \mathbf{M}\left[f\left(w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) -\right.$$

$$\left. - f\left(w\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right)\right]\left[w\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - w\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)\right]\left[f\left(w\left(\frac{i}{2^n}\right) -\right.\right.$$

$$-f\left(w\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right)\right)\right]\left[w\left(\frac{i+1}{2^n}\right)-w\left(\frac{2i+1}{2^n}\right)\right].$$

Вторая сумма равна нулю, так как $w\left(\frac{i+1}{2^n}\right)-w\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right)$ не зависит от остальных сомножителей и $\mathbf{M}\left[w\left(\frac{i+1}{2^n}\right)-w\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right)\right]=0$. В первой сумме сомножители под знаком суммы независимы, поэтому одно слагаемое имеет вид

$$\mathbf{M}\left[f\left(w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)-f\left(w\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)\right)\right]^2\cdot\frac{1}{2^{n+1}}.$$

При некотором L будет выполнено неравенство $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$. Значит,

$$\mathbf{M}\,|S_n(f)-S_{n+1}(f)|^2\leqslant L^2\sum_{0\leqslant k<2^n}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2\leqslant c_1\cdot 2^{-n}.$$

Так как

$$\mathbf{P}\{|S_n(f)-S_{n+1}(f)|\geqslant 2^{-n/4}\}\leqslant c_1\cdot 2^{-n}\cdot 2^{n/2}=c_1\cdot 2^{-n/2},$$

то утверждение леммы вытекает из теоремы Бореля—Кантелли. □

Предел (33) будем обозначать

$$\int_0^1 f(w(t))\,dw(t).$$

Замечание 1. Аналогично устанавливается существование с вероятностью 1 предела

$$\int_0^1 (f(w(t)),\,dw(t))=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{0\leqslant k<2^n}\left(f\left(w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right),\ w\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right),\qquad (34)$$

здесь $w(t)$ — винеровский процесс в R^d, $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция из R^d в R^d, $f'(x)$ — ограничено.

Замечание 2. Можем определять интеграл $\int_0^t (f(w(s)),\,dw(s))$ как предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{0\leqslant k<2^n t}\left(f\left(w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right),\ w\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right),$$

доказательство существования с вероятностью 1 этого предела таково же, как в лемме 2. Обычным образом определяем

$$\int_t^{t+h}=\int_0^{t+h}-\int_0^t.$$

Лемма 3. Если функция $f(x)$ ограничена, то выполняются равенства

1) $\mathbf{M}\int\limits_t^{t+h}(f(w(s)), dw(s))=0$;

2) $\mathbf{M}\left[\int\limits_t^{t+h}(f(w(s)), dw(s))\right]^2=\mathbf{M}\int\limits_t^{t+h}|f(w(s))|^2\,ds$;

3) $\mathbf{M}\left[\int\limits_t^{t+h}(f(w(s)), dw(s))\right]^4=O(h^2)$;

4) при $z\in R^d$

$$\mathbf{M}\exp\left\{\int\limits_t^{t+h}(f(w(s)), dw(s))\right\}(w(t+h)-w(t), z)=$$

$$=\mathbf{M}\int\limits_t^{t+h}(f(w(s)), z)\,ds+o(h);$$

5) $\mathbf{M}\exp\left\{\int\limits_t^{t+h}(f(w(s)), dw(s))\right\}=1+O(h)$.

Доказательство. Будем использовать предельный переход, с помощью которого определялся стохастический интеграл. Первые три утверждения получаются очевидным образом. Если $|f|\leqslant c$, то, используя неравенство

$$1\leqslant\mathbf{M}\left(\exp\left\{\left(f\left(w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right), w\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)\right\}\Big|\, w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)=$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{2^{n+1}}\left|f\left(w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)\right|^2\right\}\leqslant\exp\left\{c^2\frac{1}{2^{n+1}}\right\},$$

можем убедиться, что

$$1\leqslant\mathbf{M}\exp\left\{\lambda\int\limits_t^{t+h}(f(w(s)), dw(s))\right\}\leqslant\exp\{h\lambda^2c^2\}.$$

Отсюда вытекает 5). Далее,

$$\mathbf{M}\exp\left\{\int\limits_t^{t+h}(f(w(s)), dw(s))\right\}(w(t+h)-w(t), z)=$$

$$=\mathbf{M}\left(1+\int\limits_t^{t+h}(f(w(s)), dw(s))\right)(w(t+h)-w(t), z)+$$

$$+\mathbf{M}\theta_h=\mathbf{M}\int\limits_t^{t+h}(f(w(s)), z)\,ds+\mathbf{M}\theta_h,$$

где

$$|\theta_h| \leqslant \mathbf{M}\left(\int_t^{t+h} (f(w(s)),\, dw(s))\right)^2 \left(\exp\left\{\int_t^{t+h} (f(w(s)),\, dw(s))\right\} + \right.$$

$$\left. + \exp\left\{-\int_t^{t+h} (f(w(s)),\, dw(s))\right\}\right) |w(t+h)-w(t),\, z)|.$$

Двукратное использование неравенства Коши и 3) и 5) убеждает, что $\mathbf{M}|\theta_h| = o(h)$. □

а) Мартингалы, связанные с винеровским процессом.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — непрерывная и ограниченная функция из R^d в R, для которой существуют ограниченные непрерывные производные $f'(x)$ и $f''(x)$. Если $a(x)$ и $v(x)$ — ограниченные непрерывные функции из R^d в R^d и R^d в R соответственно, и $a'(x)$ ограничена, то процесс

$$\zeta(t) = f(w(t)+x)\exp\left\{\int_0^t (a(x+w(s)),\, dw(s)) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \left[v(x+w(s)) - \frac{1}{2}|a(x+w(s))|^2\right] ds\right\} -$$

$$-\int_0^t L_{a,v} f(x+w(s)) \exp\left\{\int_0^s (a(x+w(u)),\, dw(u)) + \right.$$

$$\left. + \int_0^s \left[v(x+w(u)) - \frac{1}{2}|a(x+w(u))|^2\right] du\right\} ds,$$

где $\qquad L_{a,v} f = \frac{1}{2}\Delta f + (a(x),\, f'(x)) + v(x) f(x), \qquad \Delta f = \operatorname{sp} f''$,

является мартингалом.

Доказательство. Достаточно показать, что $\mathbf{M}(\zeta(t+h) - \zeta(t) \mid \mathcal{F}_t^0) = o(h)$, где $\mathcal{F}_t^0$ — σ-алгебра, порожденная $w(s)$, $s \leqslant t$.

Легко видеть, что

$$\mathbf{M}\left(\int_t^{t+h} L_{a,v} f(x+w(s)) \exp\left\{\int_0^s (a(x+w(u)),\, dw(u)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^s \left[v(x+w(u)) - \frac{1}{2}|a(x+w(u))|^2\right] du\right\} ds \,\Big|\, \mathcal{F}_t^0\right) =$$

$$= h L_{a,v} f(x+w(t)) \exp\left\{\int_0^t (a(x+w(u)),\, dw(u)) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \left[v(x) + w(u)) - \frac{1}{2}|a(x+w(u))|^2\right] du\right\} + o(h).$$

Далее,

$$f(x+w(t+h))\exp\left\{\int_0^{t+h}(a(x+w(s)),\ dw(s))+\right.$$
$$\left.+\int_0^{t+h}\left[v(x+w(s))-\frac{1}{2}|a(x+w(s))|^2\right]ds\right\}-$$
$$-f(x+w(t))\exp\left\{\int_0^{t}(a(x+w(s)),\ dw(s))+\right.$$
$$\left.+\int_0^{t}\left[v(x+w(s))-\frac{1}{2}|a(x+w(s))|^2\right]ds\right\}=$$
$$=\exp\left\{\int_0^{t}(a(x+w(s)),\ dw(s))+\right.$$
$$\left.+\int_0^{t}\left[v(x+w(s))-\frac{1}{2}|a(x+w(s))|^2\right]ds\right\}[f(x+w(t+h))\times$$
$$\times\exp\left\{\int_t^{t+h}(a(x+w(s)),\ dw(s))\right\}(1+h[v(x+w(t))-$$
$$\left.-\frac{1}{2}|a(x+w(s))|^2\right]+o(h))-f(x+w(t))\Big].$$

Поэтому для доказательства достаточно показать, что

$$\mathbf{M}\,(f(x+w(t+h))\exp\left\{\int_t^{t+h}(a(x+w(s)),\ dw(s))\right\}-$$
$$-f(x+w(t))+hf(x+w(t))[v(x+w(t))-$$
$$\left.-\frac{1}{2}|a(x+w(t))|^2\right]-hL_{a,v}f(x+w(t))/\mathcal{F}_t^0)= \tag{35}$$
$$=o(h).$$

Имеем

$$\mathbf{M}\left(f(x+w(t+h))\exp\left\{\int_t^{t+h}(a(x+w(s)),\ dw(s))\right\}-\right.$$
$$-f(x+w(t))/\mathcal{F}_t^0)=\mathbf{M}\,(f(x+w(t+h))-f(x+w(t))/\mathcal{F}_t^0)+$$
$$+\mathbf{M}_x(f(x+w(t+h))-f(x+w(t))\times$$
$$\times\left(\exp\left\{\int_t^{t+h}(a(x+w(s)),\ dw(s))\right\}-1\right)\Big/\mathcal{F}_t^0\Big)+$$

$$+\mathbf{M}(f(x+w(t))\left(\exp\left\{\int_t^{t+h}(a(x+w(s)),\ dw(s))\right\}-1\right)\Big/\mathcal{F}_t^0\Big)=$$

$$=\frac{h}{2}\operatorname{Sp} f''(x+w(t))+hf'(x+w(t))\,a(x+w(t))+$$

$$+\frac{h}{2}f(x+w(t))\,|a(x+w(t))|^2+o(h).$$

Мы воспользовались равенством $\mathbf{M}f(x+w(h))=\frac{h}{2}\operatorname{Sp} f''(x)$, а также леммой 3. Подставив последнее выражение в левую сторону (35), получим правую. □

3.3. Представление решений уравнения.

а) Задача Коши для параболического уравнения.

Теорема 2. Пусть $u(t,x)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta u(t,\ x)+(a(x),\ u'_x(t,\ x))+v(x)\,u(t,\ x),\quad (36)$$

$$u(0,\ x)=\varphi(x),$$

где $a(x)$ — ограниченная непрерывная функция из R^d в R^d и $a'(x)$ ограничена, $v(x)$ — непрерывная и ограниченная функция из R^d в R. Тогда

$$u(t,\ x)=\mathbf{M}\varphi(x+w(t))\exp\left\{\int_0^t(a(x+w(s)),\ dw(s))+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\left[v(x+w(s))-\frac{1}{2}\left|a(x+w(s))\right|^2\right]ds\right\}.$$

Доказательство. При всех $t>0$ функция

$$\zeta(s)=u(t-s,\ x+w(s))\exp\int_0^s(a(x+w(u)),\ dw(u))+$$

$$\left.+\int_0^s\left[v(x+w(u))-\frac{1}{2}|a(x+w(u))|^2\right]du\right\}$$

является мартингалом в силу замечания к теореме 1. Так как $\zeta(0)=u(t,x)$, то утверждение теоремы вытекает из равенства $\mathbf{M}\zeta(t)=\mathbf{M}\zeta(0)$. □

Замечание. Формулу (36) можно записать с помощью интеграла по мере μ_w:

$$u(t,\ x)=\int\varphi(x+\sqrt{t}\,x(1))\exp\left\{\sqrt{t}\int_0^1(a(x+\sqrt{t}\,x(s)),\ dx(s))+\right.$$

$$\left.+t\int_0^1\left[v(x+\sqrt{t}\,x(s))-\frac{1}{2}|a(x+\sqrt{t}\,x(s))|^2\right]ds\right\}d\mu_w.\quad (37)$$

б) Задача Дирихле для эллиптического уравнения. Пусть G — область в R^d с односвязной ограниченной гладкой границей G'. Рассмотрим решение уравнения

$$\frac{1}{2}\Delta u(x)+(a(x), u'_x(x))+v(x)u(x)=f(x),$$
$$u(x)=\psi(x) \quad \text{при } x\in G' \tag{38}$$

Теорема 3. Определим функцию $\tau_G(x(\cdot))$ на $\mathbf{C}_{R^d}$ равенством

$$\tau_G(x(\cdot))=\sup\{t: x(s)\in G,\ s\leqslant t\}.$$

Если при некотором $\lambda>0$

$$\sup_{x\in G}\mathbf{M}_x\exp\{\lambda\tau_G\}<\infty,$$

где $\tau_G=\tau_G(x+w(\cdot))$, то при

$$\frac{1}{2}\sup_{x\in G}|a(x)|^2+\sup_{x\in G}\left[v(x)-\frac{1}{2}|a(x)|^2\right]\leqslant\lambda$$

имеет место представление

$$u(x)=\mathbf{M}\exp\left\{\int_0^{\tau_G}(a(x+w(s)), dw(s))+\right.$$
$$\left.+\int_0^{\tau_G}\left[v(x+w(s))-\frac{1}{2}|a(x+w(s))|^2\right]ds\right\}\psi(x+w(\tau_G)). \tag{39}$$

Доказательство. Рассмотрим некоторое дважды непрерывно дифференцируемое финитное продолжение функции $u(x)$. На основании теоремы 1 процесс

$$\zeta(t)=u(x+w(t))\exp\left\{\int_0^t(a(x+w(s)), dw(s))+\right.$$
$$\left.+\int_0^t\left[v(x+w(s))-\frac{1}{2}|a(x+w(s))|^2\right]ds\right\}-$$
$$-\int_0^t g(x+w(s))\exp\left\{\int_0^s(a(x+w(u)), dw(u))+\right.$$
$$\left.+\int_0^t\left[v(x+w(u))-\frac{1}{2}|a(x+w(u))|^2\right]du\right\}ds,$$

где $g(x)=0$ при $x\in G$, является мартингалом. Значит, будет мартингалом процесс

$$\zeta_1(t)=\zeta(t\wedge\tau_G)=u(x+w(t\wedge\tau_G))\exp\left\{\int_0^{t\wedge\tau_G}(a(x+w(s)), dw(s))+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{t\wedge\tau_G}\left[v(x+w(s))-\frac{1}{2}|a(x+w(s))|^2\right]ds\Bigg\}.$$

Значит,

$$u(x)=\mathbf{M}\zeta_1(0)=\mathbf{M}\zeta_1(t).$$

Используя лемму 3, можно убедиться, что в последнем равенстве возможен предельный переход под знаком $\mathbf{M}$ при $t\to\infty$. □

Замечание. Если функция $f(t, x)$ на $R_+\times R^d$ непрерывна, ограничена и имеет непрерывные ограниченные производные f'_t, f'_x, f''_{xx}, то утверждение теоремы остается справедливым, если $f(x)$ заменить на $f(t, x)$, а $L_{a,v}f$ на

$$\hat{L}_{a,v}f(t, x)=\frac{1}{2}\Delta f(t, x)+(a(x), f'_x(t, x))+$$
$$+f'_t(t, x)+v(x)f(t, x).$$

ИСТОРИКО-БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ

Строгое построение винеровского процесса с помощью винеровской меры в **C** было осуществлено в [10].

Широкий класс марковских процессов был введен в статье [3] (это перевод немецкой статьи 1931 г.). Здесь были получены уравнения для вероятностей перехода, носящие имя Колмогорова.

В статье [4] развит метод дифференциальных уравнений для доказательства сходимости марковских случайных блужданий к непрерывным марковским процессам. В статье [7] рассматривается построение некоторых классов марковских процессов и их вероятностей перехода исходя из уравнений Колмогорова. В статье [8] был впервые определен стохастический интеграл по винеровскому процессу. В работе [9] было впервые получено представление решения уравнения теплопроводности с потенциалом в виде интеграла по винеровской мере.

Полное изложение теории однородных марковских процессов содержится в книге [2]. В частности, в ней приведены вероятностные представления решений уравнений, содержащих производящие и характеристические операторы марковских процессов. Книга [6] содержит полное изложение теории счетных однородных цепей и процессов Маркова. Книга [1] содержит, в частности, вероятностное представление решений краевых задач, а также использование марковских процессов для асимптотического анализа решения краевых задач для дифференциальных операторов второго порядка с малым параметром при старших производных. В книге [5] были в частности рассмотрены задачи диффузии и связанные с ними предельные теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под влиянием случайных возмущений.— М.: Наука, 1979.— 424 с.
2. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы.— М.: Физматгиз, 1963.— 856 с.
3. *Колмогоров А. Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей // УМН.— 1938.— *5*.— С. 5—41.

4. *Петровский И. Г.* Ueber das Irrfahrproblem // Math. Ann.— 1934.— *109*, С. 425—444.
5. *Хинчин А. Я.* Асимптотические методы теории вероятностей.— М. Л.: Гостехиздат, 1937.
6. *Чжун К. Л.* Однородные цепи Маркова.— М.: Мир, 1964.
7. *Feller W.* Zur Theorie der Stochastischen Prozesse // — 1936.— *113*.— С. 113—160.
8. *Ito K.* Stachastic integral // Proc. Imp. Acad. Tokyo.— 1944.— *20*.— С. 519—524.
9. *Кас М.* On distribution of certain Wiener functionals // Trans. Amer. Math. Soc.— 1949.— *65*.— С. 1—13.
10. *Wiener N.* Differential space // J. Math. Phys. Mass. Techn.— 1923.— *2*.— С. 131—174.

УДК 519.21

I. А. В. Скороход. **Вероятность. Основные понятия. Структура. Методы** // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. фундам. направл., 1989, 43, 5—145

Излагаются аксиоматика теории вероятностей и основные факты, связанные со случайными величинами, случайными процессами, предельными теоремами. Библ. 17.

УДК 519.217

II. А. В. Скороход. **Марковские процессы и вероятностные приложения в анализе** // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направл., 1989, 43, 147—188

Статья содержит краткий обзор основных фактов теории марковских процессов (в основном — скачкообразных и диффузионных) и ее связь с теорией дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка. Библ. 10.

УДК 519.22

III. А. В. Скороход. **Вероятность. Прикладные аспекты** // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направл., 1989, 43, 189—270

Статья содержит краткий обзор основных понятий математической статистики, а также обзор статистических задач в теории вероятности (управляемые случайные процессы, энтропия и информация, фильтрация случайных процессов). Библ. 22.