П. Н. Вабищевич, Неявные разностные схемы для нестационарных уравнений Навье–Стокса в переменных функция тока–вихрь, *Дифференц. уравнения*, 1984, том 20, номер 7, 1135–1144

17. Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. Текон. Пакет программ для решения тепловых задач.— М., 1978.— 24 с. (Препринт/ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР: № 65).

18. Самарский А. А., Соболь И. М.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, т. 3, № 4, с. 702—719.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР

Поступила в редакцию 24 февраля 1984 г.

УДК 519.633.8

П. Н. ВАБИЩЕВИЧ

НЕЯВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА В ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЯ ТОКА—ВИХРЬ

Введение. Численное моделирование двухмерных (плоских и осесимметричных) течений чаще всего [1—4] проводится на основе использования системы уравнений Навье—Стокса в переменных функция тока — вихрь скорости. При решении нестационарных задач широко применяется метод переменных направлений [1, 3, 5, 6]. Однако при его использовании возникают трудности с реализацией краевых условий для вихря скорости, которые вносят ограничения на максимальный временной шаг. Поэтому применение неявных методов для уравнений Навье—Стокса лишь незначительно эффективнее использования простейших явных схем. Использование матричных итерационных методов одновременного определения функции тока и вихря, как установлено в работе [7], позволяет избежать ограничений на шаг по времени.

В работе [8] предложен новый подход к построению неявных разностных схем для уравнений Навье—Стокса в переменных функция тока — вихрь скорости, позволяющий избежать влияния краевых условий на величину максимального временного шага.

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию и более подробному изложению результатов, анонсированных в [8]. В § 1 дана постановка простейшей задачи для нестационарных уравнений Навье—Стокса, далее описывается процедура дискретизации по пространству. В § 3 приведены примеры некоторых абсолютно устойчивых разностных схем для модельного псевдопараболического уравнения. Рассмотрен одномерный пример и представлены результаты по численному решению задачи о течении в квадратной каверне с подвижной верхней границей. Проведенный вычислительный эксперимент демонстрирует преимущества предложенных схем по сравнению с традиционными.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим простейшую задачу для нестационарных уравнений Навье—Стокса в прямоугольнике $\Omega=\{(x,\ y)\,|\,0<x<a,\ 0<y<b\}$. Функция тока ψ и вихрь скорости ω удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\omega)+\frac{\partial}{\partial y}(v\omega)-\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\omega=f(x,\ y,\ t), \tag{1}$$

$$\Delta\psi=-\omega,\ (x,\ y)\in\Omega,\ t>0, \tag{2}$$

с начальным и краевыми условиями

$$\psi(x,\ y,\ 0)=\psi_0(x,\ y),\ (x,\ y)\in\Omega, \tag{3}$$

$$\psi(x,\ y,\ t)=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial n}(x,\ y,\ t)=0,\ (x,\ y)\in\partial\Omega,\ t>0. \tag{4}$$

Здесь $u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ — составляющие скорости, Re — число Рейнольдса, n — нормаль к $\partial\Omega$, $f(x, y, t)$, $\psi_0(x, y)$ — некоторые заданные функции, а через Δ обозначен оператор Лапласа: $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Систему уравнений (1), (2) иногда удобно записать в виде одного уравнения для ψ (ψ-уравнение):

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\Delta\psi) + \frac{\partial}{\partial y}(v\Delta\psi) - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta^2\psi = -f(x, y, t),\ (x, y)\in\Omega,\ t>0, \tag{5}$$

дополнив его условиями (3), (4).

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ ЗАДАЧА

В области Ω введем равномерную прямоугольную сетку $\overline{\Omega}_h = \Omega_h + \gamma_h$ с шагами h_x и h_y по переменным x и y соответственно:

$$\overline{\Omega}_h = \{(x_i, y_j) = (ih_x, jh_y),\ i = 0, 1, \ldots, M,\ j = 0, 1, \ldots, N,\ Mh_x = a, Nh_y = b\}.$$

Для аппроксимации граничных условий (4) со вторым порядком равномерно продолжим сетку $\overline{\Omega}_h$ на один узел за границу γ_h, т. е. введем узлы с $i=-1$, $M+1$, $j=-1$, $N+1$. Граничное условие для $\dfrac{\partial\psi}{\partial n}$ аппроксимируем центральными разностями. Это соответствует использованию широко применяемым в вычислительной гидродинамике условий Тома [9]. Фиктивные узлы исключаются затем с помощью разностного аналога бигармонического оператора в уравнении (5), записанного в приграничных узлах $i=1$, $M-1$, $j=1$, $N-1$.

Обозначим через Λ сеточный оператор Лапласа, определенный на множестве сеточных функций, обращающихся в нуль на границе γ_h. В стандартных безындексных обозначениях [10] теории разностных схем

$$\Lambda u = u_{\bar{x}x} + u_{\bar{y}y},\ (x, y)\in\Omega_h,\ u(x, y) = 0,\ (x, y)\in\gamma_h.$$

Определим аналогично оператор Λ^2. На расширенной сетке

$$\Lambda^2 u = u_{\bar{x}x\bar{x}x} + 2u_{\bar{x}x\bar{y}y} + u_{\bar{y}y\bar{y}y},\ (x, y)\in\Omega_h,\ u(x, y) = 0,\ \Lambda u = 0,\ (x, y)\in\gamma_h.$$

Разностный аналог бигармонического оператора Δ^2 с однородными условиями Дирихле (4) имеет представление [11]

$$A_0 = \Lambda^2 + \rho_0(x, y)E,\ (x, y)\in\Omega_h, \tag{6}$$

где E — единичный сеточный оператор. Сеточная функция $\rho_0(x, y)$ в (6) отлична от нуля лишь в приграничных узлах:

$$\rho_0(x, y) = \begin{cases} 0,\ i = 2, 3, \ldots, M-2,\ j = 2, 3, \ldots, N-2, \\ 2h_x^{-4},\ i = 1, M-1,\ j = 2, 3, \ldots, N-2, \\ 2h_y^{-4},\ i = 2, 3, \ldots, M-2,\ j = 1, N-1, \\ 2(h_x^{-4} + h_y^{-4}),\ i = 1, M-1,\ j = 1, N-1. \end{cases}$$

Аналогично можно рассмотреть случай с аппроксимацией краевых условий (4) с более высоким порядком [12]. Аппроксимация $\partial\psi/\partial n$ с точностью $O(h^3)$ с учетом первого условия (4) дает при $x_1 = 0$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}(0,\ jh_y)\approx\frac{1}{h_x}\left(-\frac{1}{6}\psi_{2j}+\psi_{1j}-\frac{1}{3}\psi_{-1,j}\right).$$

В этом случае представление, аналогичное (6), имеет вид

$$A_0'=\Lambda^2-\rho_0'\Lambda'+\rho_0''E, \tag{7}$$

где сеточные функции ρ_0', ρ_0'' определяются аналогично $\rho_0(x,\ y)$:

$$\rho_0'\Lambda'u=\begin{cases}0,\ i=2,\ 3,\ \dots,\ M-2,\ j=2,\ 3,\ \dots,\ N-2,\\ 0{,}5\,h_x^{-2}u_{\bar{x}x},\ i=1,\ M-1,\ j=2,3,\dots,\ N-2,\\ 0{,}5\,h_y^{-2}u_{\bar{y}y},\ i=2,3,\dots,M-2,\ j=1,\ N-1,\\ 0{,}5\,(h_x^{-2}u_{\bar{x}x}+h_y^{-2}u_{\bar{y}y}),\ i=1,\ M-1,\ j=1,\ N-1,\end{cases}$$

$$\rho_0''(x,\ y)=\begin{cases}0,\ i=2,\ 3,\ \dots,\ M-2,\ j=2,\ 3,\ \dots,\ N-2,\\ 3h_x^{-4},\ i=1,\ M-1,\ j=2,\ 3.\ \dots,\ N-2,\\ 3h_y^{-4},\ i=2,\ 3,\ \dots,\ M-2,\ j=1,\ N-1,\\ 3\,(h_x^{-4}+h_y^{-4}),\ i=1,\ M-1,\ j=1,\ N-1.\end{cases}$$

С учетом свойств оператора Λ и определения функций ρ_0, ρ_0' и ρ_0'' можно заключить, что сеточные операторы A_0 и A_0', определяемые формулами (6) и (7) соответственно, являются самосопряженными и положительно-определенными.

Обозначим через A_x и A_y сеточные аналоги операторов $\frac{\partial}{\partial x}u$ и $\frac{\partial}{\partial y}v$ соответственно. Конкретизировать выбор A_x и A_y пока не будем, отметим лишь, что в вычислительной практике наиболее часто используются схемы с центральными и направленными разностями [1—7]. Запишем дифференциально-разностную задачу для (3)—(5) с учетом представления (6). Она имеет вид

$$\frac{\partial\Lambda\psi_h}{\partial t}+A_x\Lambda\psi_h+A_y\Lambda\psi_h-\frac{1}{\mathrm{Re}}\Lambda^2\psi_h-$$

$$-\frac{1}{\mathrm{Re}}\rho(x,\ y,\ t)\psi_h=-f_h(x,\ y,\ t),\ (x,\ y)\in\Omega_h,\quad t>0. \tag{8}$$

Здесь $\rho(x,\ y,\ t)=\rho_0(x,\ y)+\rho_1(x,\ y,\ t)$, где $\rho_1(x,\ y,\ t)$ — сеточная функция, определяемая аналогично $\rho_0(x,\ y)$, обусловлена оператором A_x+A_y. Сам вид $\rho_1(x,\ y,\ t)$ определяется выбором A_x, A_y.

Уравнение (8) дополним начальным условием

$$\psi_h(x,\ y,\ 0)=\psi_0(x,\ y),\ (x,\ y)\in\Omega_h. \tag{9}$$

В силу определения операторов Λ, Λ^2 в (8), (9) реализуются следующие однородные условия на границе γ_h:

$$\psi_h(x,\ y,\ t)=0,\ \Lambda\psi_h(x,\ y,\ t)=0,\ (x,\ y)\in\gamma_h,\ t>0. \tag{10}$$

Отметим, что наиболее существенным моментом в записи дифференциально-разностной задачи для (3)—(5) в форме (8), (9) являются именно условия (10), которые соответствуют заданным на границе функции тока и вихря скорости. Формальная запись (8), (9) позволяет облегчить построение неявных схем, допускающих эффективную реализацию краевых условий (4).

Обозначим разностный аналог вихря ω через ω_h, причем из (2) следует

$$\Lambda\psi_h = -\omega_h, \ (x, \ y) \in \Omega_h, \ t > 0. \tag{11}$$

Из (8) — (11) получим уравнение для $\omega_h(x, \ y, \ t)$ следующего вида:

$$\frac{\partial \omega_h}{\partial t} + A_x \omega_h + A_y \omega_h - \frac{1}{\mathrm{Re}} \Lambda\omega_h - \frac{\rho}{\mathrm{Re}} \Lambda^{-1}\omega_h = \tag{12}$$

$$= f_h(x, \ y, \ t), \ (x, \ y) \in \Omega_h. \ t > 0,$$

с начальным условием

$$\omega_h(x, y, \ 0) = -\Lambda\psi_0(x, \ y), \ (x, \ y) \in \Omega_h \tag{13}$$

и условием на границе

$$\omega_h(x, \ y, \ t) = 0, \ (x, \ y) \in \gamma_h, \ t > 0. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь вопросы построения разностных схем для дифференциально-разностной задачи (8) — (10) или (12) — (14).

§3. МОДЕЛЬНОЕ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Остановимся на задаче

$$-\frac{\partial \Lambda\psi_h}{\partial t} - A_1\Lambda\psi_h + A_2\psi_h = f_h \tag{15}$$

с разностными операторами $A_1 > 0$, $A_2 \geqslant 0$. Операторное уравнение (15) соответствует задаче (8) — (10) при $A_1 = A_x + A_y - \frac{1}{\mathrm{Re}} \Lambda$, $A_2 = \frac{1}{\mathrm{Re}} \rho(x, y, t) E$. Для решения (15) с начальным условием (9) рассмотрим схему вида

$$B \frac{\psi_h^{n+1} - \psi_h^n}{\tau} + A\psi_h^n = f_h^n \tag{16}$$

с оператором A, представимым в форме

$$A = -A_1\Lambda + A_2. \tag{17}$$

Оператор B в схеме (16) удобно выбрать в факторизованном виде

$$B = B_1 B_2, \ B_1 = E + \sigma\tau A_1, \ B_2 = -\Lambda + \sigma\tau A_2. \tag{18}$$

В этом случае значению веса σ, равному 0,5, соответствует аналог схемы Писмена—Рэкфорда, $\sigma = 1$ — Дугласа—Рэкфорда.

Основной результат для схемы (16) — (18) можно сформулировать в следующем утверждении.

Теорема. *Факторизованная схема (16)—(18) с* $A_1 > 0$, $A_2 \geqslant 0$ *устойчива в сеточном пространстве* H_D, *где* $D = B_2^2$, *при* $\sigma \geqslant 0{,}5$.

Чтобы не усложнять изложение, рассмотрим устойчивость лишь по начальным данным, т. е. в схеме (16) положим $f_h^n \equiv 0$. Утверждение будет доказано, если будет установлена следующая оценка устойчивости в H_D при $D = B_2^2$: $\| B_2 \psi_h^{n+1} \| \leqslant \| B_2 \psi_h^n \|$.

Для оператора перехода с n на $n+1$ временной слой схемы (16) имеет место представление $S = B^{-1}(B - \tau A)$. В случае (17), (18) получим

$$B - \tau A = -\Lambda - (1 - \sigma)\tau(-A_1\Lambda + A_2) + (\sigma\tau)^2 A_1 A_2. \tag{19}$$

Обозначим

$$R = (E - \sigma\tau A_1)(-\Lambda - \sigma\tau A_2) = -\Lambda - \sigma\tau(-A_1\Lambda + A_2) + (\sigma\tau)^2 A_1 A_2. \tag{20}$$

При $\sigma > 0$ с учетом (18) — (20) получим $B - \tau A = \frac{1}{2\sigma}(2\sigma - 1)B + \frac{1}{2\sigma}R$. Отсюда $S = \frac{2\sigma - 1}{2\sigma}E + \frac{1}{2\sigma}B^{-1}R$. С учетом $B_2\psi_h^{n+1} = B_2S\psi_h^n$ рассмотрим оператор

$$B_2 S = \frac{2\sigma - 1}{2\sigma}B_2 + \frac{1}{2\sigma}B_2B^{-1}R. \tag{21}$$

Обозначим $S' = B_2B^{-1}R$ и получим

$$S' = (E + \sigma\tau A_1)^{-1}(E - \sigma\tau A_1) \times \times (-\Lambda - \sigma\tau A_2) = S_1S_2^*B_2, \tag{22}$$

где

$$S_1 = (E + \sigma\tau A_1)^{-1}(E - \sigma\tau A_1), \; S_2 = (-\Lambda + \sigma\tau A_2)^{-1}(-\Lambda - \sigma\tau A_2).$$

Подстановка (22) в (21) дает

$$B_2 S = \left(\frac{2\sigma - 1}{2\sigma}E + \frac{1}{2\sigma}\; S_1 S_2^* \right)B_2. \tag{23}$$

Легко устанавливается [10], что при наших ограничениях на операторы A_1 и A_2 справедливо $\| S_1 \| \leqslant 1$ и $\| S_2 \| = \| S_2^* \| \leqslant 1$. Принимая во внимание (23) и учитывая условие $\sigma \geqslant 0{,}5$, получим

$$\| B_2 \psi_h^{n+1} \| \leqslant \frac{2\sigma - 1}{2\sigma} \| B_2\psi_h^n \| + + \frac{1}{2\sigma} \| S_1 \| \|S_2^*\| \| B_2\psi_h^n \| \leqslant \|B_2 \psi_h^n \| .$$

Таким образом, теорема доказана.

В качестве примера схем (16) — (18) применительно к задаче (15), (9) приведем схему Дугласа — Рэкфорда ($\sigma = 1$):

$$-\Lambda \frac{\psi_h^{n+1/2} - \psi_h^n}{\tau} - A_1\Lambda\psi_h^{n+1/2} + A_2 \psi_h^n = f_h^n , \tag{24}$$

$$-\Lambda \frac{\psi_h^{n+1} - \psi_h^{n+1/2}}{\tau} + A_2 (\psi_h^{n+1} - \psi_h^n) = 0. \tag{25}$$

Вводя обозначения

$$\Lambda\psi_h^{n+k/2} = -\omega_h^{n+k/2}, \; k = 0, \; 1, \; 2, \tag{26}$$

схему (24), (25) перепишем в виде

$$\frac{\omega_h^{n+1/2} - \omega_h^n}{\tau} + A_1\omega_h^{n+1/2} + A_2\psi_h^n = f_h^n , \tag{27}$$

$$\Lambda\psi_h^{n+1} - \tau A_2 (\psi_h^{n+1} - \psi_h^n) = -\omega_h^{n+1/2} . \tag{28}$$

Запишем теперь неявную схему для уравнения (15) при условии, что граничное условие для вихря берется с предыдущей итерации. Вихрь на $(n + 1)$-м слое определяется из уравнения

$$\frac{\omega_h^{n+1} - \omega_h^n}{\tau} + A_1 \omega_h^{n+1} + A_2\psi_h^n = f_h^n , \tag{29}$$

а уравнение для функции тока имеет вид

$$\Lambda\psi_h^{n+1} = -\omega_h^{n+1} . \tag{30}$$

Сравнивая схемы (27), (28) и (29), (30), видим, что уравнение (27) для вихря $\omega_h^{n+1/2}$ ничем не отличается от уравнения (29). А в уравнении (28) в отличие от (30) присутствует слагаемое $\tau A_2(\psi_h^{n+1}-\psi_h^n)$, которого нет в (30). Такая коррекция уравнения для функции тока обусловливает устойчивость схемы (27), (28), чего нельзя сказать о схеме (29), (30), которая при достаточно большом $A_2\psi$ (малые шаги сетки по пространству) будет неустойчивой. Это ограничение на временной шаг в схеме (29), (30) обусловлено способом реализации краевых условий. Заметим, что при решении нелинейных краевых задач естественно ожидать дополнительных ограничений на шаг по времени, обусловленных нелинейностью (операторы A_1 и A_2 в (15), вообще говоря, нелинейны).

В схеме (29), (30) граничные условия определяются оператором A_2 (граничные условия (4) приводят к появлению слагаемого $A_2\psi_h^n$ в (29)). Применение схемы (27), (28) соответствует тому, что вместо $A_2\psi_h^n$ задан оператор

$$A_2\psi_h^{n+1}+\tau^2 A_1 A_2 \frac{\psi_h^{n+1}-\psi_h^n}{\tau}.$$

Это эквивалентно тому, что граничное условие в схеме (27), (28) аппроксимируется на $(n+1)$-м временном слое с точностью $O(\tau^2)$.

§ 4. СХЕМА ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА

В предложенном классе схем (16)—(18) для определения вихря скорости на новом временном слое необходимо решить эллиптическое уравнение. В вычислительной гидродинамике [1, 3, 5, 6] чаще всего применяются схемы переменных направлений для уравнения (1). С использованием коррекции типа (28) соответствующая схема имеет вид

$$\frac{\omega_h^{n+1/3}-\omega_h^n}{0{,}5\tau}+\left(A_x-\frac{1}{\mathrm{Re}}\Lambda_x\right)\omega_h^{n+1/3}+ \\ +\left(A_y-\frac{1}{\mathrm{Re}}\Lambda_y\right)\omega_h^n+A_2\psi_h^n=f_h^n, \tag{31}$$

$$\frac{\omega_h^{n+2/3}-\omega_h^{n+1/3}}{0{,}5\tau}+\left(A_x-\frac{1}{\mathrm{Re}}\Lambda_x\right)\omega_h^{n+1/3}+ \\ +\left(A_y-\frac{1}{\mathrm{Re}}\Lambda_y\right)\omega_h^{n+2/3}+A_2\psi_h^n=f_h^n, \tag{32}$$

$$\frac{\omega_h^{n+1}-\omega_h^{n+2/3}}{0{,}5\tau}+A_2(\psi_h^{n+1}-\psi_h^n)=0. \tag{33}$$

В схеме (31)—(33) использованы следующие обозначения: $\Lambda=\Lambda_x+\Lambda_y$, $\Lambda_x u=u_{\bar{x}x}$, $\Lambda\psi_h^{n+k/3}=-\omega_h^{n+k/3}$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Заметим, что, как и при рассмотрении схемы (27), (28), можно заключить, что (31), (32) соответствуют обычно применяемому методу переменных направлений. Отличие лишь в уравнении (33) для функции тока, которое имеет вид, аналогичный (28):

$$\Lambda\psi_h^{n+1}-0{,}5\tau A_2(\psi_h^{n+1}-\psi_h^n)=-\omega_h^{n+2/3}. \tag{34}$$

Для решения эллиптического уравнения (34) наиболее удобно использовать вариант одного из самых быстрых итерационных методов — попеременно-треугольного метода А. А. Самарского [13]. Не останавливаясь на детальном описании метода, укажем, что при решении задачи Дирихле для уравнения $\Delta u-c(x,y)u=-f(x,y)$, где $c(x,y)\geqslant 0$, в модифицированном попеременно-треугольном методе [10, 14] с оператором $B=(D+\omega_0 A_1)D^{-1}(D+\omega_0 A_2)$ необходимо взять $D=(1+c(x, y)/\delta)E$, где δ — минимальное собственное значение разностного оператора Лапласа. В работе [15] доказано, что при таком выборе B метод с чебышевским набором итерационных параметров или трехслойный метод сопряженных градиентов сходится со скоростью, которая не зависит от $c(x, y)$ и остается такой же, как и для уравнения Пуассона. Для числа итераций n_ε справедлива оценка

$$n_\varepsilon = O(\sqrt{M}) \lg \frac{1}{\varepsilon}, \quad M = N,$$

где ε — необходимая точность. Заметим, что при решении эволюционных задач (31) — (34) имеется хорошее начальное приближение для ψ_h^{n+1}, равное значению функции тока на предыдущем временном слое. Такой модифицированный попеременно-треугольный метод применялся ранее при решении стационарных задач вязкой несжимаемой жидкости в произвольной области в работе [16].

§ 5. ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА

В [7] в качестве модельного аналога системы уравнений Навье—Стокса рассматривалась следующая задача. На интервале $0<x<l$ функции $\psi(x, t)$ и $\omega(x, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \psi \frac{\partial\omega}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = Q(x, t), \tag{35}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\omega. \tag{36}$$

Уравнения (35), (36) дополняются краевыми и начальным условием

$$\psi(0, t) = 0, \quad \psi(l, t) = 0, \tag{37}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}(l, t) = 0, \tag{38}$$

$$\psi(x, 0) = 0. \tag{39}$$

Граничные условия (37), (38) моделируют условия (4) на твердой неподвижной стенке для течений вязкой несжимаемой жидкости. Поэтому следует ожидать те же трудности, что и для системы уравнений Навье—Стокса (1) — (4).

Использовалась схема с нелинейностями, взятыми с предыдущего временного шага. Во внутренних узлах сетки, аналогично (27), (28), запишем разностную задачу

$$\frac{\omega_h^{n+1/2} - \omega_h^n}{\tau} + \psi_h^n (\omega_h^{n+1/2})_{\overset{\circ}{x}} - \nu (\omega_h^{n+1/2})_{\bar{x}x} = Q_h^n \tag{40}$$

на сетке $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, M$, $Mh = l$ с учетом стандартных безындексных обозначений. Уравнение для аналога функции тока имеет вид

$$(\psi_h^{n+1})_{\bar{x}x} - \tau\rho_h^n (\psi_h^{n+1} - \psi_h^n) = -\omega_h^{n+1/2}. \tag{41}$$

Граничные условия (37), (38) дают

$$\psi_{h0}^{n+1} = 0, \quad \psi_{hM}^{n+1} = 0, \tag{42}$$

$$\omega_{h0}^{n+1/2} = -\frac{2}{h^2}\psi_{h1}^n, \quad \omega_{hM}^{n+1/2} = -\frac{2}{h^2}\psi_{h,M-1}^n. \tag{43}$$

В уравнении (41) сеточная функция ρ_h^n имеет вид

$$\rho_h^n = \begin{cases} 2\nu h^{-4} + 2h^{-2}\psi_{h1}^n, & i = 1, \\ 0, & i = 2, 3, \dots, M-2, \\ 2\nu h^{-4} - 2h^{-2}\psi_{h,M-1}^n, & i = M-1. \end{cases}$$

Результаты, полученные по схеме (40)—(43), сравнивались с данными по схеме без коррекции — аналог (29), (30). Это соответствует $\omega_h^{n+1/2} = \omega_h^{n+1}$ и $\rho_h^n = 0$ в (40)—(43). При решении задачи (35)—(39) при $Q(x, t) = 1$, $l = 1$, $\nu = 1$ схема (40)—(43) имеет следующее ограничение на временной шаг: $\tau \leqslant \tau_0 = 0{,}3$. С другой стороны, схема без коррекции дает более жесткое ограничение на максимальный временной шаг: $\tau \leqslant \tau_1 = 3{,}8 \times 10^{-3}$. В данном примере использование схемы с коррекцией позволяет увеличить максимальный шаг по времени почти в сто раз. Аналогичная ситуация наблюдается и при других значениях параметров модельной задачи (35)—(39).

§ 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА

Приведем некоторые примеры методических исследований предложенных разностных схем для уравнений Навье—Стокса (1)—(4). Наиболее полные результаты получены на тестовой задаче о течении вязкой несжимаемой жидкости в каверне квадратного сечения ($a=b=1$) с подвижной верхней границей. В этом случае в уравнении (1) $f=0$, а второе краевое условие (4) заменяется на неоднородное: $\frac{\partial\psi}{\partial n}(x, 1, t) = 1$ и $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$ на других участках границы. Сравнивались данные по предельному временному шагу для схемы с коррекцией (31)—(34) и обычной схемы переменных направлений. Для аппроксимации конвективных слагаемых в уравнении (1) использовались центральные разности с нелинейностью, взятой с предыдущего временного слоя. Это соответствует следующему выбору операторов A_x, A_y:

$$A_x\omega_h^{n+k/3} = ((\psi_h^n)_{\mathring{y}}\, \omega_h^{n+k/3})_{\mathring{x}}, \quad A_y\omega_h^{n+k/3} = -((\psi_h^n)_{\mathring{x}}\, \omega_h^{n+k/3})_{\mathring{y}}.$$

Обозначим, как и ранее, через τ_0 максимальный шаг по времени в схеме с коррекцией, а через τ_1 — в схеме с граничными условиями для вихря, взятыми с предыдущего временного шага. В табл. 1 приведены данные численного решения задачи о движении в каверне на сетке (21×21) для различных чисел Рейнольдса. Наблюдается значительный выигрыш в величине предельного шага по времени при использовании схемы с коррекцией, особенно в области небольших чисел Рейнольдса. Величина τ_1 до некоторого Re остается постоянной, а затем с ростом Re падает. Естественно предположить, что ступенька $\tau_1 = \text{const}$ обусловле-

Таблица 1

Зависимость τ_0 и τ_1 от числа Re на сетке (21×21)

Re	10	100	400	1000
τ_0	0,052	0,015	0,0086	0,0016
τ_1	0,0027	0,0026	0,0028	0,0010

Таблица 2

Зависимость τ_0 и τ_1 от числа узлов сетки

$M\times N$	15×15	20×20	30×30	40×40
τ_0	0,031	0,015	0,0077	0,0049
τ_1	0,0046	0,0026	0,0012	0,0006

на краевыми условиями для вихря, их ограничением на временной шаг.

Зависимость τ_0 и τ_1 от числа узлов прослеживается по данным расчетов, собранных в табл. 2. Наблюдается зависимость $\tau_{0,1} \approx O(h^2)$, где $h = h_x = h_y$ (расчеты выполнены при числе Рейнольдса $Re = 100$).

Аналогичная картина наблюдается при решении другой тестовой задачи (1)—(4), когда $f(x, y, t) = f_0 = \text{const}$. В свете полученных экспериментальных зависимостей для τ_0 и τ_1 можно прокоментировать данные, полученные другими авторами. Например, в работе [17] представлены результаты по задаче тепловой конвекции в прямоугольной области. Получена следующая зависимость для максимального шага по времени некоторых явных и неявных разностных схем от числа Грасгофа Gr (аналог $f(x, y, t)$ в задаче (1)—(4)): $\tau \leqslant K(\mathrm{Gr}) \dfrac{h^2}{2}$, где

$$K(\mathrm{Gr}) = \begin{cases} a_1, & 0 \leqslant \mathrm{Gr} \leqslant \overline{\mathrm{Gr}}, \\ a_1 \mathrm{Gr}^{-1/2}, & \overline{\mathrm{Gr}} \leqslant \mathrm{Gr}. \end{cases}$$

Наличие характерной площадки $\tau \leqslant a_1 \dfrac{h^2}{2}$ при малых числах Грасгофа имеет, по-видимому, то же происхождение, что и в задаче о каверне (см. табл. 1). Поэтому можно заключить, что наличие такого ограничения на временной шаг обусловлено способом реализации краевых условий. Поэтому использование схем с коррекцией могло бы снять их. Ограничения на шаг по времени при больших числах Грасгофа (Рейнольдса) определяется нелинейностью задачи.

Данные вычислительного эксперимента, проведенного для модельных одно- и двухмерных задач, показывают, что предложенные схемы с коррекцией по граничному условию позволяют в определенном диапазоне параметров течений вязкой несжимаемой жидкости более полно использовать преимущества неявных схем, дают возможность использовать большие шаги по времени по сравнению с традиционными схемами. Описанный общий подход может быть применен при конструировании схем с коррекцией, базирующихся на других схемах, известных в вычислительной гидродинамике.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Самарскому за постоянное внимание к данной работе и полезные обсуждения.

Литература

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.— М.: Мир, 1980.— 616 с.
2. Мюллер Т. Дж.— В кн.: Численные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1981, с. 80—151.
3. Браиловская И. Ю., Кускова Т. В., Чудов Л. А.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1968, вып. XI, с. 3—18.
4. Гостен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К. и др. Численные методы исследования течений вязкой жидкости.— М.: Мир, 1972.— 324 с.
5. Грязнов В. Л., Полежаев В. И. Исследование некоторых разностных схем и аппроксимаций граничных условий для численного решения уравнений тепловой конвекции.—М., 1974.—71 с. (Препринт / ИПМех АН СССР: № 40).
6. Герасимов Б. П. Один метод расчета задачи конвекции несжимаемой жидкости.— М., 1975.—34 с. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР: № 13).
7. Мажорова О. С., Попов Ю. П.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1980, т. 20, № 4, с. 1005—1020.
8. Вабищевич П. Н.— Докл. АН СССР, 1983, т. 273, № 1, с. 22—26.
9. Том А., Эйплт К. Числовые расчеты полей в технике и физике.— М.: Энергия, 1964.— 208 с.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М.: Наука, 1983.— 616 с.
11. Вабищевич П. Н., Вабищевич Т. Н. Прямые методы численного решения плоских стационарных задач вязкой несжимаемой жидкости.— М., 1982.— 18 с. (Препринт/ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР: № 111).
12. Кускова Т. В., Чудов Л. А. О приближенных граничных условиях для вихря при расчетах течений вязкой несжимаемой жидкости.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1968, вып. XI, с. 27—31.
13. Самарский А. А.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, т. 4, № 3, с. 580—585.

14. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 592 с.
15. Вабищевич П. Н. Численное решение задачи МГД равновесия в кожухе произвольной формы.— М., 1979.— 19 с. (Препринт/ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР: № 121).
16. Вабищевич П. Н., Вабищевич Т. Н.— Дифференц. уравнения, 1983, т. 19. № 5, с. 852—860.
17. Герасимов Б. П. Сравнение некоторых разностных методов решения задач тепловой гравитационной конвекции.— М., 1975.— 16 с. (Препринт/ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР: № 29).

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 24 февраля 1984 г.

УДК 517.944/947

В. ВАЙНЕЛЬТ, Р. Д. ЛАЗАРОВ, У. ШТРАЙТ

О ПОРЯДКЕ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В АНИЗОТРОПНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование скорости сходимости разностных методов в настоящее время проводится также для случая слабой разрешимости различных задач математической физики (см., например, [1—7]).

Если традиционный подход к исследованию скорости сходимости разностных схем приводит к завышенным требованиям на гладкость искомого решения, то в этих работах оценки точности доказаны при минимальных требованиях на гладкость — получены так называемые согласованные с гладкостью решения оценки (см. [2]).

В отличие от работ [3, 7], где рассматривались параболические уравнения с постоянными коэффициентами, в настоящей работе рассматриваются задачи с переменными коэффициентами и смешанными производными. Показано, что сходимость построенной разностной схемы в сеточной L_2-норме на решениях из $W_2^{1,1}(\Omega_T)$ есть $O(\tau+h)$. В случае уравнения без смешанных производных показано, что если решение из $W_2^{2,1}(\Omega_T)$, то схема сходится со скоростью $O(\tau+h^2)$.

Эти оценки являются в некотором смысле дискретными аналогами соответствующих оценок для проекционно-разностных схем (см., например, [14, 15]), но они получены при помощи усовершенствования традиционного аппарата теории разностных методов [9]. Отметим еще, что разностные схемы для параболических уравнений отличаются от стандартных проекционно-разностных схем тем, что они всегда имеют «концентрированную матрицу массы».

§ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Пусть $\Omega_T=\Omega\times(0,\ T]$, $\Omega=\{x=(x_1,\ x_2):0<x_i<l_i,\ i=1,\ 2\}$, $T>0$, а Γ есть граница прямоугольника Ω. Для функций, заданных на Ω_T, введем анизотропные классы Соболева $W_2^{k,l}(\Omega_T)$:

$$W_2^{k,l}(\Omega_T)=\{u\in L_2(\Omega_T):D_x^\alpha u\in L_2(\Omega_T),\ |\alpha|\leq k,\ D_t^m u\in L_2(\Omega_T),\ m\leq l\},$$

где $D_t^m=\dfrac{\partial^m}{\partial t^m}$, $D_x^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}}$, $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2)$, $\alpha_1,\ \alpha_2\geq 0$, целые, а норма в пространстве $L_2(\Omega_T)$ определяется следующим образом:

$$\|u\|_{L_2(\Omega_T)}=\Big(\int_{\Omega_T}|u|^2\,dx\,dt\Big)^{1/2}=\Big(\int_0^T\int_\Omega|u(x,\ t)|^2\,dx\,dt\Big)^{1/2}. \qquad (1)$$