Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

И. С. Кац, Линейные отношения, порождаемые каноническим дифференциальным уравнением фазовой размерности 2, и разложимость по собственным функциям, *Алгебра и анализ*, 2002, том 14, выпуск 3, 86–120

https://www.mathnet.ru/aa852

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.87
12 июля 2025 г., 13:57:38

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 3

ЛИНЕЙНЫЕ ОТНОШЕНИЯ, ПОРОЖДАЕМЫЕ КАНОНИЧЕСКИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ФАЗОВОЙ РАЗМЕРНОСТИ 2, И РАЗЛОЖИМОСТЬ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

© И. С. Кац

В работе дается эффективное описание множества вектор-функций, разложимых по решениям граничной задачи с каноническим дифференциальным уравнением фазовой размерности 2 и граничным условием на регулярном конце. Для этого выясняется, какое гильбертово пространство является зестественным« для построения в нем эрмитова оператора, соответствующего в некотором смысле этой граничной задаче, и строится этот оператор. Проблема решается путем применения к нему метода направляющих функционалов М. Г. Крейна [1] и существенно модифицированного автором метода, изложенного в примыкающей к [1] работе А. Я. Повзнера [2].

§0. Введение

1. Каноническое дифференциальное уравнение. На протяжении статьи $H(t) = (h_{ij}(t))$ — заданная на промежутке $I \subset \mathbb{R}$ локально суммируемая матрица-функция (сокращенно м.-ф.) размера 2×2 такая, что $H(t) = (H(t))^* \geqslant 0_2$ при $t \in I$. Допускается невещественность функций $h_{12}(t)$.

Рассматривается на I каноническое дифференциальное уравнение

$$\mathcal{J}\frac{dx}{dt} = \lambda H(t)x, \tag{0.1}$$

где $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а λ — комплексный параметр. Вектор-функцию (сокращенно в.-ф.) $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$[1] считаем решением уравнения (0.1), если она локально абсолютно непрерывна на I и $\mathcal{J}u'(t) = \lambda H(t)u(t)$ при п.в.[2] $t \in I$.

Ключевые слова: каноническое уравнение, граничная задача, линейное отношение, спектральная функция, квазиспектральная функция, неделимый промежуток.

[1]Впредь звектор-функция« — это определенная на I функция, значения которой — (2×1) матрицы с элементами из $\mathbb{C}$.

[2]зП. в.« означает в настоящей статье зпочти всех« или, изредка, зпочти всюду«.

Левый (правый) конец интервала I называем *регулярным*, если функция $H(t)$ суммируема в правой (левой) окрестности этого конца. В противном случае мы называем его *сингулярным*. Не нарушая общности, будем считать, что $\operatorname{tr} H(t) = 1$ при всех $t \in I$ (этого всегда можно достичь путем замены независимой переменной в (0.1)). Теперь левый (правый) конец интервала I регулярен в том и только в том случае, когда $a := \inf I > -\infty$ ($b := \sup I < +\infty$). Если левый (правый) конец интервала I регулярен и только в этом случае, считаем, что $a \in I$ ($b \in I$).

В настоящей работе рассматривается только тот случай, когда левый конец регулярен. Для удобства считаем $a = 0$. Итак, впредь либо $I = [0, b]$ с $b < +\infty$, либо $I = [0, b)$ с $b = \infty$.

2. Спектральные и квазиспектральные функции. Через $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ обозначим множество почти всюду конечных измеримых в.-ф. $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ таких, что

$$\|f\|_H^2 := \int\limits_I (f(t))^* H(t) f(t) dt < \infty. \tag{0.2}$$

Если в $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ ввести операции сложения и умножения на скаляр из $\mathbb{C}$ естественным образом, а скалярное произведение $(f, g)_H$ в нем определить равенством

$$(f, g)_H = \int\limits_H (g(t))^* H(t) f(t) dt,$$

то $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ станет (полным) квазигильбертовым пространством[3] (равенство $\|f\|_H = 0$ не влечет равенства $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при всех $t \in I$). Вектор-функцию $f \in \mathcal{L}_H^{(2)}$ будем относить к $\mathcal{L}'$, если $\{t \in I \mid f(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ — ограниченное множество. В частности, если $b \in I$, то $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$.

Пусть $u(t, \lambda) = \begin{pmatrix} u_1(t,\lambda) \\ u_2(t,\lambda) \end{pmatrix}$ — решение (единственное) граничной задачи с дифференциальным уравнением (0.1) и граничным условием

$$x(0) = \begin{pmatrix} \sin\gamma \\ -\cos\gamma \end{pmatrix}. \tag{0.3}$$

[3]Это вытекает из более общего факта, установленного в [3].

Нетрудно видеть, что $u_j(t,\lambda)$ при фиксированном $t \in I$ — целая функция переменной λ ($j = 1,2$). Так как функция $u(t,\lambda)$ при фиксированном λ непрерывна на I, то для $f \in \mathcal{L}'$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ определена функция

$$(Uf)(\lambda) := \int_I (u(t,\lambda))^* H(t) f(t) dt \tag{0.4}$$

— образ в.-ф. f при обобщенном преобразовании Фурье U. Очевидно, чем шире класс K в.-ф. $f \in \mathcal{L}'$, тем у́же множество неубывающих на $\mathbb{R}$ функций τ таких, что для каждой в.-ф. $f \in K$ справедливо „равенство Парсеваля“

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(Uf)(\lambda)|^2 d\tau(\lambda) = \int_I (f(t))^* H(t) f(t) dt. \tag{0.5}$$

Неубывающую на $\mathbb{R}$ функцию τ будем называть нормированной, если

$$\tau(\lambda) = \frac{1}{2}(\tau(\lambda - 0) + \tau(\lambda + 0)) \quad \text{при всех } \lambda \in \mathbb{R},\ \tau(0) = 0. \tag{0.6}$$

Определение 0.1. Нормированная неубывающая на $\mathbb{R}$ функция τ называется спектральной функцией (сокращенно СФ) граничной задачи (0.1), (0.3), если преобразование U изометрически переводит $\mathcal{L}'$ в $\mathcal{L}_\tau^{(2)}(\mathbb{R})$, т. е. если (0.5) справедливо для любой в.-ф. $f \in \mathcal{L}'$. СФ τ называется ортогональной, если $U\mathcal{L}'$ плотно в $\mathcal{L}_\tau^{(2)}(\mathbb{R})$.

В определении фигурирует множество $\mathcal{L}'$, плотное в пространстве $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$, и в правой части равенства (0.5) фигурирует норма в этом пространстве. Чем обусловлен выбор этого пространства? Суть в том, что его метрика фигурирует в „тождестве Лагранжа“ (1.3) для линейного отношения l (см. §1). В спектральной теории уравнения Штурма–Лиувилля, нагруженного уравнения Штурма–Лиувилля, в спектральной теории струны (см. [4]) именно аналогичный фактор играл роль в выборе пространства, фигурировавшего в определении СФ.

3. H-неделимые промежутки. В совместной с М. Г. Крейном работе [4] молчаливо предполагалось, что граничная задача (0.1), (0.3) с $\gamma = \frac{\pi}{2}$ имеет СФ, если выполняется условие (8.2). Это казалось очевидным, так как в случае, когда $\det H(t) \neq 0$ п.в. на I, доказательство легко получалось с помощью метода направляющих функционалов и, кроме того, имелся широкий класс примеров, когда заведомо известно, что СФ существует, хотя $\det H(t) = 0$ при

всех $t \in I$. Однако это оказалось ошибочным. Как выяснено здесь, особую роль в решении вопроса о существовании СФ задачи (0.1), (0.3) играют H-неделимые промежутки (сокращенно H-н.п.). Это такие промежутки $\Delta \subset I$, что $\operatorname{Im} h_{12}(t) = 0$ при п.в. $t \in \Delta$ и $\det \int_\Delta H(t)dt = 0$ (см. определение 2.1).

Анализ (§2) поведения $u(t, \lambda)$ на H-н.п. позволил эффективно выделить из $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ подпространство $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$ (см. определения 3.1, 2.3 и 3.2), которому принадлежат все в.-ф., разложимые в смысле сходимости в $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ по решениям граничной задачи (0.1), (0.3) (см. лемму 5.1). При наличии H-н.п. и только в этом случае $\hat{\mathcal{L}}_\gamma \neq \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$. Оказалось также, что при наличии H-н.п. в $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ существуют в.-ф., для которых равенство (0.5) не может выполняться ни для какой неубывающей на $\mathbb{R}$ функции τ, а это означает, что у такой задачи (0.1), (0.3) не существует СФ.

Основной теоремой (§6, 11) установлено, что существует хотя бы одна такая неубывающая на $\mathbb{R}$ нормированная функция τ (мы называем ее *квазиспектральной*; см. определение 6.1), что равенство Парсеваля (0.5) справедливо для любой в.-ф. $f \in (\hat{\mathcal{L}}_\gamma \cap \mathcal{L}')$ и, более того, $\hat{\mathcal{L}}_\gamma \cap \mathcal{L}'$ является максимальным (с точностью до эквивалентности в метрике пространства $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$) подмножеством множества $\mathcal{L}'$, обладающим этим свойством. Так как при отсутствии H-н.п. $\hat{\mathcal{L}}_\gamma = \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$, то основной теоремой установлено, что в этом случае существует хотя бы одна СФ граничной задачи (0.1), (0.3).

С помощью основной теоремы доказано (см. теорему 12.2), что по решениям $u(t, \lambda)$ граничной задачи (0.1), (0.3) разлагаются все в.-ф. из $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$.

4. Линейные отношения S_γ и $\hat{S}_\gamma$. Для доказательства основной теоремы сначала строится гильбертово пространство $\mathfrak{Y} := \mathcal{L}_H^{(2)}(I)/\theta$, где $\theta = \{f \in \mathcal{L}_H^{(2)}(I) \mid \|f\|_H = 0\}$. Элемент пространства $\mathfrak{Y}$ мы понимаем как множество в.-ф. из $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ и говорим, что они представляют этот элемент. Затем строится (§7) в $\mathfrak{Y}$ линейное отношение (сокращенно ЛО)[4] S_γ, которое в некотором весьма естественном смысле соответствует задаче (0.1), (0.3). Выясняется (см. теорему 9.2), что при отсутствии H-н.п. и только в этом случае S_γ оказывается оператором в $\mathfrak{Y}$. Область определения ЛО S_γ содержится в подпространстве $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ — множестве элементов пространства $\mathfrak{Y}$, представимых вектор-функциями из $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$.

В случае, когда S_γ — не оператор, S_γ сужается до действующего в $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ ЛО $\hat{S}_\gamma$ с той же областью определения $\mathfrak{D}(S_\gamma)$ (см. определение 10.1, теорему 10.2). Оказывается, $\hat{S}_\gamma$ — эрмитов оператор в $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma((\hat{S}_\gamma \mathfrak{f}, \mathfrak{g})_{\hat{\mathfrak{Y}}} = (\mathfrak{f}, \hat{S}_\gamma \mathfrak{g})_{\mathfrak{Y}}$ при $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{g} \in \mathfrak{D}(S_\gamma))$. Собственно замыкание оператора $\hat{S}_\gamma$, если оно является самосопряженным в $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$, а в противном случае его самосопряженное расширение

[4] Необходимые сведения о линейных отношениях приведены в порядке справки в §13.

следует считать тем оператором для задачи (0.1), (0.3), о котором так красочно говорится в [5] ([5], конец предисловия к гл. VI). Доказательство основной теоремы осуществлено путем применения именно к оператору $\hat{S}_\gamma$ метода направляющих функционалов М. Г. Крейна [1], несколько модифицированного (см. §11).

Г. Лангер и Б. Текстериус [6] обобщили метод направляющих функционалов на ЛО. С помощью этого они получили результат, который в нашем случае означает, что существует неубывающая функция τ такая, что равенство (0.5) справедливо для любой в.-ф. $f \in \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$, представляющей какой-нибудь элемент из $\overline{\mathfrak{D}(S_\gamma)}$. Однако, с одной стороны, они не дали явного описания множества таких в.-ф., и, с другой стороны, возможна ситуация, когда равенство (0.5) имеет место для в.-ф., которые не принадлежат этому множеству, как это следует из леммы 7.1, замечания к определению 7.3 и основной теоремы.

В семидесятые годы появился ряд работ [7–9], в которых для демонстрации возможности применения теории ЛО изучался вопрос о разложимости функций из $\mathcal{L}^{(2)}(a,b)$ по собственным функциям действующего в $\mathcal{L}^{(2)}(a,b)$ дифференциального оператора с неплотной в нем областью определения. Там эта неплотность создавалась искусственно: порождаемый дифференциальной операцией оператор с областью определения, плотной в $\mathcal{L}^{(2)}(a,b)$ (для той дифференциальной операции это пространство было „естественным“), „насильственно“ сужался на неплотную область. У нас же неплотность возникла сама собой.

Особо роль H-н.п. для канонического дифференциального уравнения (0.1) обнаружил, назвав их иначе, Л. де Бранж в одной из работ серии, посвященной гильбертовым пространствам целых функций [10]. Однако он рассматривал лишь случай, когда H — вещественная м.-ф., не разделял H-н.п. по типам, не усмотрел отмеченную выше максимальность множества $\mathcal{L}' \cap \hat{\mathcal{L}}_\gamma$ и не обнаружил того эффекта, который возникает, когда к точке $t = 0$ примыкает H-н.п., тип которого равен γ (см. леммы 2.2 и 5.1, §14). Вопрос о разложимости по собственным функциям им не изучался.

В настоящей работе рассматривается лишь случай, когда левый конец интервала I регулярен. Вопрос о разложимости по решениям канонического уравнения фазовой размерности 2 в случае, когда оба конца промежутка I сингулярны, был решен в [11] и кратко освещен в [12].

6. В заключение хочу отметить, что настоящая работа — это усовершенствованный вариант депонированной работы [13] автора. Хотя последняя малодоступна, на нее появились, особенно в последнее время, ссылки в ряде статей [14–17], в которых широко используются термины (H-н.п. и др.), введенные в [13], и формулируются результаты той работы. Однако ссылки

на неопубликованные работы не всегда убеждают читателя. Желание сделать результаты из [13] более доступными — это одна из причин, побудивших автора написать настоящую работу. Другая причина — желание упростить ссылки в моих последующих публикациях.

Работы [11–13] появились в связи с тем, что мой учитель, Марк Григорьевич Крейн, упорно настаивал на том, чтобы я занялся поиском пространства и действующего в нем оператора, ассоциированных с задачей (0.1), (0.3). Его светлой памяти я посвящаю настоящую работу.

§1. Линейное отношение l

Пусть M — линейное множество всех измеримых и почти всюду конечных на I вектор-функций $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ с естественным образом определенными на нем операциями сложения и умножения на скаляр из $\mathbb{C}$.

Определение 1.1. $\{f; g\} \in M^2$ относим к l в том и только том случае, когда функция f абсолютно непрерывна на I и

$$\mathcal{J} f'(t) = H(t)g(t) \quad \text{при п.в. } t \in I.^5 \tag{1.1}$$

Очевидно, l — линейное отношение в M. Его область определения обозначим через $\mathcal{D}$.

Определение 1.2. Вектор-функцию v будем называть *решением* уравнения

$$\mathcal{J}\frac{dx}{dt} = \lambda H(t)x + H(t)g(t), \tag{1.2}$$

где $g \in M$, в том и только том случае, когда $\{v; \lambda v + g\} \in l$.

Если $\{u; v\} \in l$ и $\{f; g\} \in l$, то, как легко убедиться, $(f^*(t)\mathcal{J}u(t))' = f^*(t)H(t)v(t) - g^*(t)H(t)u(t)$ при п.в. $t \in I$, и, следовательно, для t_1, $t_2 \in I$ справедливо „тождество Лагранжа“

$$\int_{t_1}^{t_2} f^*(t)H(t)v(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} g^*(t)H(t)u(t)dt = f^*(t)\mathcal{J}u(t)\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{1.3}$$

[5]Символ $\{\cdot\,;\,\cdot\}$ у нас применяется для обозначения упорядоченной пары элементов любой природы.

§2. H-неделимые промежутки

Впредь для $\varphi \in \mathbb{R}$ полагаем $\xi_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$.

Определение 2.1. Промежуток $\langle\alpha,\beta\rangle \subset I$ называется *неделимым промежутком* (кратко H-н.п.) типа φ, если[6]

$$H(t) = \xi_\varphi \xi_\varphi^* \quad \text{при п.в. } t \in \langle\alpha,\beta\rangle. \tag{2.1}$$

H-н.п. называется *максимальным*, если он не является правильной частью другого H-н.п.

Замечание. Любой максимальный H-н.п. замкнут слева, а если его правый конец отличен от ∞, то он замкнут и справа.

Лемма 2.1. *Если* $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ *и* $\langle\alpha,\beta\rangle$ *— H-н.п. типа* φ, *то*

$$\xi_\varphi^* f(t) = f_1(t)\cos\varphi + f_2(t)\sin\varphi = \text{const} \quad \textit{на } \langle\alpha,\beta\rangle. \tag{2.2}$$

Доказательство. Так как $f \in \mathcal{D}$, то для некоторой в.-ф. $g \in M$ справедливо соотношение (1.1) и, следовательно, почти всюду на $\langle\alpha,\beta\rangle$

$$(\xi_\varphi^* f(t))' = -\xi_\varphi^* \mathcal{J} H(t) g(t) = -\xi_\varphi^* \mathcal{J} \xi_\varphi \xi_\varphi^* g(t) = 0, \tag{2.3}$$

ибо $\mathcal{J}^2 = -I_2$ и $\eta^* \mathcal{J} \eta = 0$ при $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Теперь из абсолютной непрерывности в.-ф. $f \in \mathcal{D}$ на I вытекает (2.2). •

Следствие. *Если* $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ *— решение уравнения* (0.1) *и* $\langle\alpha,\beta\rangle$ *— H-н.п. типа* φ, *то*

$$\xi_\varphi^* u(t) = u_1(t)\cos\varphi + u_2(t)\sin\varphi = \text{const} \quad \textit{на } \langle\alpha,\beta\rangle.$$

Из следствия вытекает

Лемма 2.2. *Если имеется H-н.п.* Δ *типа* γ *с левым концом в точке* $t = 0$ *и* $u(t,\lambda)$ *— решение граничной задачи* (0.1), (0.3), *то*

$$\xi_\gamma^* u(t,\lambda) = \xi_\gamma^* u(0,\lambda) = 0 \quad \textit{при всех } t \in \Delta. \tag{2.4}$$

Определение 2.3. Если выполняется условие леммы 2.2, то будем говорить, что имеет место *первый исключительный случай*, а максимальный H-н.п. с левым концом в точке $t = 0$ будем называть *левым исключительным*; a_0 — это правый конец левого исключительного промежутка, а в случае его отсутствия $a_0 := 0$.

[6]Угловые скобки означают, что допускаются как замкнутые, так и открытые с соответствующей стороны промежутки.

§3. Пространства $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$, $\mathfrak{Y}$, $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$, $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$

Пространство $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$, множество $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ и пространство $\mathfrak{Y}$ были определены во Введении. Как мы уже отмечали, на элемент $\mathfrak{f} \in \mathfrak{Y}$ будем смотреть, как на множество в.-ф. $f \in \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$, для любых двух элементов которого норма их разности в метрике пространства $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ равна нулю.

Положим $\mathfrak{Y}' = \{\mathfrak{f} \in \mathfrak{Y} \mid \mathfrak{f} \cap \mathcal{L}' \neq \varnothing\}$. В случае, когда $b \neq \infty$, а значит, $b \in I$, имеем $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y}$ (ибо $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$). Если же $b = \infty$, то $\mathfrak{Y}' \neq \mathfrak{Y}$ и $\overline{\mathfrak{Y}'} = \mathfrak{Y}$.

В связи с леммами 2.1 и 2.2 важную роль будут играть множества $\hat{\mathfrak{Y}}$ и $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$, определенные ниже.

Определение 3.1. Вектор-функцию $f \in \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ будем относить к множеству $\hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(I)$ в том и только в том случае, когда для каждого максимального H-н.п. $[\alpha, \beta\rangle$ имеется константа $c = c_{f,[\alpha,\beta\rangle} \in \mathbb{C}$ такая, что $\xi_\varphi^* f(t) = c$ п.в. на (α, β), где φ — тип этого H-н.п., $\hat{\mathfrak{Y}} := \{\mathfrak{f} \in \mathfrak{Y} \mid \mathfrak{f} \cap \hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(I) \neq \varnothing\}$.

Определение 3.2. Если имеет место первый исключительный случай, то $\hat{\mathcal{L}}_\gamma := \{f \in \hat{\mathcal{L}}_H^2(I) \mid c_{f,[0,a_0)} = 0\}$, если же он не имеет места, то $\hat{\mathcal{L}}_\gamma := \hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(I)$. Далее, $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma := \{\mathfrak{f} \in \mathfrak{Y} \mid \mathfrak{f} \cap \hat{\mathfrak{L}}_\gamma \neq \varnothing\}$.

Замечание. Согласно определениям 3.1 и 3.2, при отсутствии H-н.п. $\hat{\mathcal{L}}_\gamma = \hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(I) = \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$.

Перейдем к изучению множеств, введенных определениями 3.1 и 3.2, в случае, когда имеются H-н.п. Рассмотрим сначала один максимальный H-н.п. $[\alpha, \beta\rangle$. Пусть φ — его тип. С промежутком (α, β) можно связать (как и с промежутком I): 1) квазигильбертово пространство $\mathcal{L}_H^{(2)}(\alpha, \beta) := \mathcal{L}_H^{(2)}([\alpha, \beta))$; 2) гильбертово пространство $\mathfrak{Y}_{(\alpha,\beta)}$, получающееся из $\mathcal{L}_H^{(2)}(\alpha, \beta)$ факторизацией по множеству в.-ф. из $\mathcal{L}_H^{(2)}(\alpha, \beta)$ с нулевой нормой; 3) множество $\hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(\alpha, \beta)$ в.-ф. из $\mathcal{L}_H^{(2)}(\alpha, \beta)$ таких, что $\xi_\varphi^* f(t) = c_f := c_{f,(\alpha,\beta)}$ при п.в. $t \in (\alpha, \beta)$; 4) множество $\hat{\mathfrak{Y}}_{(\alpha,\beta)}$ элементов $\mathfrak{f} \in \hat{\mathfrak{Y}}_{(\alpha,\beta)}$ таких, что $\mathfrak{f} \cap \hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(\alpha, \beta) \neq \varnothing$. Заметим, что для любых f, $g \in \mathcal{L}_H^{(2)}(\alpha, \beta)$ (см. определение 2.1)

$$\int_\alpha^\beta g^*(t) H(t) f(t) dt = \int_\alpha^\beta \overline{\xi_\varphi^* g(t)} \xi_\varphi^* f(t) dt. \tag{3.1}$$

Поэтому вектор-функции u, $v \in \mathcal{L}_H^{(2)}(\alpha, \beta)$ в том и только в том случае представляют один элемент из $\hat{\mathfrak{Y}}_{(\alpha,\beta)}$, когда $\xi_\varphi^* u(t) = \xi_\varphi^* v(t)$ п.в. на (α, β). Следовательно, $\mathfrak{Y}_{(\alpha,\beta)}$ — бесконечномерное пространство.

Для вектор-функций f, $g \in \hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(\alpha,\beta)$ имеем, согласно (3.1),

$$\int_\alpha^\beta g^*(t)H(t)f(t)dt = \overline{c_g}c_f(\beta-\alpha), \tag{3.2}$$

где $c_f = c_{f,(\alpha,\beta)}$, $c_g = c_{g,(\alpha,\beta)}$. Поэтому $\hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(\alpha,\beta)$ — квазигильбертово пространство (полное), а $\hat{\mathfrak{Y}}_{(\alpha,\beta)}$ — гильбертово пространство, которое одномерно или нульмерно в соответствии с тем, конечно или бесконечно число β. Из (3.1) вытекает также, что если $\beta < +\infty$, то в.-ф. $g \in \mathcal{L}_H^{(2)}(\alpha,\beta)$ ортогональна к $\hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(\alpha,\beta)$ в том и только в том случае, когда

$$\int_\alpha^\beta \xi_\varphi^* g(t)dt = 0. \tag{3.3}$$

Пусть на промежутке I имеются H-н.п. Различные максимальные H-н.п. не могут иметь общих внутренних точек. Следовательно, их множество не более чем счетно. Пусть это — промежутки $[\alpha_1,\beta_1\rangle, [\alpha_2,\beta_2\rangle, [\alpha_3,\beta_3\rangle\ldots$, занумерованные в каком-либо порядке. Положим $\mathcal{F}_H = I\setminus(\bigcup_j(\alpha_j,\beta_j))$. Квазигильбертово пространство $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ можно мыслить как ортогональную сумму квазигильбертовых пространств $\mathcal{L}_H^{(2)}(\mathcal{F}_H)$ и $\mathcal{L}_H^{(2)}(\alpha_j,\beta_j)$, $j = 1,2,3,\ldots$, множество $\hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(I)$ — как ортогональную сумму квазигильбертовых пространств $\mathcal{L}_H^{(2)}(\mathcal{F}_H)$ и $\hat{\mathcal{L}}_H(\alpha_j,\beta_j)$, $j = 1,2,3,\ldots$, а множество $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$ — как ортогональную сумму пространства $\mathcal{L}_H^{(2)}(\mathcal{F}_H)$ и пространств $\hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(\alpha_j,\beta_j)$, соответствующих максимальным H-н.п. $[\alpha_j,\beta_j\rangle$, отличным от левого исключительного, и в случае, когда он имеется, еще и пространства $\hat{\mathcal{L}}_\gamma(0,a_0)$ в.-ф. $f \in \hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(0,a_0)$ таких, что $c_{f,(0,a_0)} = 0$ и, значит, $\|f\|_{\mathfrak{L}_H^{(2)}(0,a_0)} = 0$. Поэтому справедлива

Лемма 3.1. 1) *$\hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(I)$ и $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$ — квазигильбертовы пространства (полные) и $\hat{\mathcal{L}}_\gamma \subset \hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(I) \subset \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$.*

2) *$\hat{\mathfrak{Y}}$ и $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ — гильбертовы пространства и $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma \subset \hat{\mathfrak{Y}} \subset \mathfrak{Y}$. Если существуют H-н.п., то пространство $\mathfrak{Y} \ominus \hat{\mathfrak{Y}}$ бесконечномерно, а пространство $\hat{\mathfrak{Y}} \ominus \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ одномерно или нульмерно; оно одномерно в том и только в том случае, когда имеет место первый исключительный случай и $a_0 < +\infty$.*

3) *В.-ф. $g \in \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ ортогональна к $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$ в том и только в том случае, когда $H(t)g(t) = 0$ при п.в. $t \in \mathcal{F}_H$ и для каждого максимального H-н.п. $[\alpha,\beta\rangle$, не являющегося левым исключительным, справедливо равенство* (3.3), *где φ — тип этого H-н.п.*

§4. H-неделимые промежутки и отсутствие спектральных функций

Пусть имеются H-н.п. Тогда, согласно лемме 3.1, существует в.-ф. $g \in \mathcal{L}'$ такая, что $g \perp \hat{\mathcal{L}}_\gamma$ и $\|g\|_H \neq 0$. Согласно (0.4) и лемме 3.1,

$$(Ug)(\lambda) = \sum_j \int_{\alpha_j}^{\beta_j} u^*(t,\lambda)H(t)g(t)dt, \tag{4.1}$$

где сумма распространяется на все максимальные H-н.п. $[\alpha_j, \beta_j\rangle$. Согласно определению 2.1 и следствию леммы 2.1,

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} u^*(t,\lambda)H(t)g(t)dt = (\xi^*_{\varphi_j} u(t,\lambda))^* \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \xi^*_{\varphi_j} g(t)dt, \tag{4.2}$$

где φ_j — тип H-н.п. $[\alpha_j, \beta_j\rangle$. Если промежуток $[\alpha_j, \beta_j\rangle$ является левым исключительным, то, согласно лемме 2.2, первый сомножитель в правой части равенства (4.2) равен нулю. Если же он не является таковым, то, согласно лемме 3.1, равен нулю второй сомножитель. Поэтому из (4.1) и (4.2) вытекает, что $(Ug)(\lambda) = 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Так как $\|g\|_H \neq 0$, то равенство (0.5) не может выполняться ни для какой неубывающей на $\mathbb{R}$ функции τ. Доказано следующее утверждение (см. определение 0.1).

Лемма 4.1. *Если имеются H-н.п., то граничная задача* (0.1), (0.3) *не имеет спектральных функций.*

§5. Разложимость по собственным функциям и H-неделимые промежутки

Приведем весьма общее и, как нам представляется, разумное определение разложимости по собственным функциям (решениям) граничной задачи (0.1), (0.3).

Определение 5.1. Будем говорить, что *вектор-функция $f \in \mathcal{L}^{(2)}_H(I)$ разлагается по собственным функциям $u(t,\lambda)$ граничной задачи* (0.1), (0.3), соответствующим $\lambda \in \mathcal{G}(\subset \mathbb{C})$, если можно так выбрать последовательность $\{\mathcal{G}_j\}_1^\infty$ подмножеств множества $\mathcal{G}$ и для каждого $j \in \mathbb{N}$ построить такую определенную на вполне аддитивном классе подмножеств множества $\mathcal{G}_j$ меру $\mu^{(j)} = \mu_f^{(j)}$, что

1) при любых фиксированных $j \in \mathbb{N}$ и $t \in I$ существует интеграл

$$\int_{\mathcal{G}_j} u(t,\lambda)d\mu^{(j)}(\lambda) := f_j(t), \tag{5.1}$$

причем $f_j \in \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$,

2) $\|f - f_j\|_H \to 0$ при $j \to \infty$.

Пусть функция $f \in \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ разложима в указанном здесь смысле по собственным функциям граничной задачи (0.1), (0.3). Пусть $[\alpha, \beta\rangle$ — максимальный H-н.п. и φ — его тип. Согласно (5.1),

$$\xi_\varphi^* f_j(t) = \int\limits_{\mathfrak{g}_j}^{*} \xi_{\varphi_j}^* u(t,\lambda) d\mu^{(j)}(\lambda). \tag{5.2}$$

Из следствия леммы 2.1 вытекает, что при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ $\xi_\varphi^* u(t,\lambda) = \mathrm{const}$ на $[\alpha, \beta\rangle$. Следовательно, $f_j(t) \in \hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(I)$. Если к тому же $[\alpha, \beta\rangle$ — левый исключительный промежуток, то на нем, согласно лемме 2.2, $\xi_\varphi^* f_j(t) = \xi_\gamma^* f_j(t) = 0$. Таким образом, $f_j \in \hat{\mathcal{L}}_\gamma$. Из замкнутости в $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ множества $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$ и п. 2) определения вытекает, что $f \in \hat{\mathcal{L}}_\gamma$. Установлено следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Для разложимости вектор-функции $f \in \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ по решениям граничной задачи* (0.1), (0.3) *необходимо, чтобы f принадлежала $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$.*

§6. Квазиспектральные функции. Формулировка основной теоремы

Определение 6.1. Неубывающая на $(-\infty, +\infty)$ нормированная функция τ называется *квазиспектральной функцией* (кратко КСФ) граничной задачи (0.1), (0.3), если для любой в.-ф. $f \in \hat{\mathcal{L}}'_\gamma$, где $\hat{\mathcal{L}}'_\gamma = \hat{\mathcal{L}}_\gamma \cap \hat{\mathcal{L}}'$, справедливо равенство (0.5). КСФ называется ортогональной, если $U\hat{\mathcal{L}}'_\gamma$ плотно в $\mathcal{L}_\tau^{(2)}(-\infty, +\infty)$.

Заметим, что при отсутствии H-н.п. КСФ — это СФ.

Основная теорема. *Граничная задача* (0.1), (0.3) *имеет хотя бы одну квазиспектральную функцию и, следовательно, когда отсутствуют H-неделимые промежутки и только в этом случае, хотя бы одну спектральную функцию.*

Опираясь на основную теорему, в §12 мы установим, что любая в.-ф. из $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$ разлагается по решениям граничной задачи (0.1), (0.3), соответствующим $\lambda \in \mathbb{R}$.

Заметим еще, что в случае, когда $b = +\infty$ и $\Delta = [b_0, +\infty)$ — мккксимальный H-н.п. и ψ — его тип, для любой в.-ф. $f \in \hat{\mathcal{L}}_\gamma$ п.в. на Δ имеет место равенство $\xi_\psi^* f(t) = 0$. Действительно, в противном случае $\xi_\varphi^* f(t) = c_{f,\Delta} \neq 0$ при п.в. $t \in \Delta$ и в соответствии с (0.2) и (3.2) $\|f\|_H = \infty$, что невозможно, т.к. $f \in \hat{\mathcal{L}}_\gamma \subset \hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(I)$. Поэтому „образ Фурье“ и норма в $\hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(I)$ такой в.-ф. совпадает с „образом Фурье“ и нормой в.-ф. $f(t)\chi_{[0,b_0]}(t)$, где $\chi_{[0,b_0]}(t)$

— характеристическая функция промежутка $[0, b_0]$, и, следовательно, множество квазиспектральных функций граничной задачи (0.1), (0.3) совпадает с множеством квазиспектральных функций „укороченной“ граничной задачи, полученной из упомянутой заменой промежутка I на промежуток $[0, b_0]$. В связи с этим *мы исключаем из рассмотрения случай, когда* $b = +\infty$ *и имеется* H*-н.п. с правым концом* $+\infty$. Поэтому *впредь все максимальные* H*-н.п. замкнуты.*

§7. Линейное отношение S_γ

Определение 7.1. Элемент $\{\mathfrak{f}; \mathfrak{g}\} \in \mathfrak{Y}^2$ будем относить к множеству S_γ с $\gamma \in \mathbb{R}$ в том и только в том случае, когда существует в.-ф. $f \in \mathfrak{f}$ такая, что

1) $\{f; g\} \in l$ для хотя бы одной (и, следовательно, любой) в.-ф. $g \in \mathfrak{g}$,

2) $\xi_\gamma^* f(0) = 0$,

3) $\exists t_f \in I : f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при всех $t \in (I \cap [t_f, +\infty))$ (в частности, когда $b \in I$, это условие равносильно тому, что $f(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Очевидно, S_γ — ЛО в $\mathfrak{Y}$ и даже в $\mathfrak{Y}'$ (см. начало §3). Из тождества (1.3) вытекает, что S_γ — симметричное ЛО в $\mathfrak{Y}$ (см. §13).

Определение 7.2. Будем говорить, что имеет место *второй исключительный случай*, если $b < +\infty$ и имеется H-н.п. с правым концом в точке b. Максимальный из таких H-н.п. будем называть правым исключительным, его левый конец будем обозначать через b_0, а тип — через ψ.

Определение 7.3. Если имеет место второй исключительный случай, то $\hat{\hat{\mathcal{L}}}_\gamma := \{f \in \hat{\mathcal{L}}_\gamma \mid \xi_\psi^* f(t) = 0$ при всех $t \in [b_0, b]\}$, если же он не имеет места, то $\hat{\hat{\mathcal{L}}}_\gamma := \hat{\mathcal{L}}_\gamma$. $\hat{\hat{\mathfrak{Y}}}_\gamma := \{\mathfrak{f} \in \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma \mid \mathfrak{f} \cap \hat{\hat{\mathcal{L}}}_\gamma \neq \varnothing\}$.

Замечание. Легко понять, что во втором исключительном случае и только в этом случае $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma \ominus \hat{\hat{\mathfrak{Y}}}_\gamma = \hat{\mathfrak{Y}}(b_0, b)$ — одномерное пространство. Если этот случай не имеет места, то $\hat{\hat{\mathfrak{Y}}}_\gamma = \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$.

Из леммы 2.1 и определений 7.1, 1.1, 7.3 вытекает

Лемма 7.1. $\mathfrak{D}(S_\gamma) \subset (\hat{\hat{\mathfrak{Y}}} \cap \mathfrak{Y}') \subset \hat{\mathfrak{Y}}'$, *где* $\hat{\mathfrak{Y}}' := \hat{\mathfrak{Y}} \cap \mathfrak{Y}'$.

Кроме того, $\overline{\mathfrak{D}(S_\gamma)} \subset \hat{\hat{\mathfrak{Y}}}_\gamma$.

Ниже будет доказано включение, обратное последнему.

§8. Линейное отношение S_γ^*

В соответствии с общепринятым определением (см. §13) упорядоченная пара $\{\mathfrak{f};\mathfrak{g}\} \in \mathfrak{Y}^2$ принадлежит S_γ^* в том и только в том случае, когда

$$(\mathfrak{f},\mathfrak{v})_{\mathfrak{Y}} = (\mathfrak{g},\mathfrak{u})_{\mathfrak{Y}}, \quad \{\mathfrak{u};\mathfrak{v}\} \in S_\gamma. \tag{8.1}$$

Как вытекает из (1.3), если $\{\mathfrak{f};\mathfrak{g}\} \in \mathfrak{Y}$ и существует в.-ф. $f \subset \mathfrak{f}$ такая, что выполняются требования 1) и 2) определения 7.1, то справедливо (8.1), т. е. $\{\mathfrak{f};\mathfrak{g}\} \in S_\gamma^*$.

Докажем обратное предложение.

Пусть $\{\mathfrak{f};\mathfrak{g}\} \in S_\gamma^*$. Докажем, что существует такая в.-ф. $f \in \mathfrak{f}$, что выполняются упомянутые требования. Сначала это сделаем в случае, когда для какого-то $b_1 \in I$, $b_< b$ имеем

$$\det \int_0^{b_1} H(t)dt \neq 0. \tag{8.2}$$

Обозначим через v_0 такую в.-ф. из $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$, что $v_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при всех $t \in (b_1, b)$, а ее сужение на $[0, b_1]$ ортогонально в метрике пространства $\mathcal{L}_H^{(2)}([0, b_1])$ множеству K всех постоянных на $[0, b_1]$ в.-ф., т. е.

$$\int_0^{b_1} H(t)v_0(t)dt = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

Пусть

$$u_0(t) := \mathcal{J} \int_t^{b_1} H(s)v_0(s)ds, \quad t \in I. \tag{8.4}$$

Из перечисленных свойств в.-ф. v_0 следует, что $u_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при $t = 0$ и при любом $t \in (I \cap [b_1, +\infty))$, а поэтому $u_0 \in \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$. Из (8.4) следует, что $\{u_0; v_0\} \in l$, и потому $\{\mathfrak{u}_0;\mathfrak{v}_0\} \in S_\gamma$, где $\mathfrak{u}_0$ и $\mathfrak{v}_0$ — элементы пространства $\mathfrak{Y}$, представимые вектор-функциями u_0 и v_0 соответственно. Пусть $\tilde{f}$ и g в.-ф. из $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$, представляющие $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ соответственно. Так как $\{\mathfrak{f};\mathfrak{g}\} \in S^*$ и $\{\mathfrak{u}_0;\mathfrak{v}_0\} \in S_\gamma$, то $(\mathfrak{f},\mathfrak{v}_0)_{\mathfrak{Y}} = (\mathfrak{g},\mathfrak{u}_0)_{\mathfrak{Y}}$ и, следовательно,

$$\int_0^{b_1} v_0^*(t)H(t)\tilde{f}(t)dt = \int_0^{b_1} u_0^*(t)H(t)g(t)dt. \tag{8.5}$$

Поэтому (см. (8.4))

$$\int_0^{b_1} v_0^*(t)H(t)\tilde{f}(t)dt = \int_0^{b_1} \Big(\mathcal{J}\int_t^{b_1} H(s)v_0(s)ds\Big)^* H(t)g(t)dt$$

$$= -\int_0^{b_1}\Big(\int_t^{b_1} v_0^*(s)H(s)ds\Big)\mathcal{J}H(t)g(t)dt = -\int_0^{b_1}\Big(v_0^*(s)H(s)\mathcal{J}\int_0^s H(t)g(t)dt\Big)ds$$

$$= -\int_0^{b_1}\Big(v_0^*(t)H(t)\mathcal{J}\int_0^t H(s)g(s)ds\Big)dt. \tag{8.6}$$

Так как (8.6) верно для любой в.-ф. $v_0(t)$, ортогональной в $\mathcal{L}_H^{(2)}([0,b_1])$ к множеству K, и это множество, как это следует из (8.2), замкнуто в $\mathcal{L}_H^{(2)}([0,b_1])$, то в.-ф. p, определенная равенством

$$p(t) = \tilde{f}(t) + \mathcal{J}\int_0^t H(s)g(s)ds, \quad t \in I, \tag{8.7}$$

после сужения на $[0,b_1]$ эквивалентна в $\mathcal{L}_H^{(2)}([0,b_1])$ постоянной в.-ф. Точнее говоря,

$$H(t)(p(t)-k) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \text{при п.в. } t \in [0,b_1] \tag{8.8}$$

для некоторого $k = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$, единственного в силу (8.2).

Выберем произвольно $b_2 \in (b_1, b)$. Так как $H(t) \geqslant 0_2$ при всех $t \in I$, то (8.2) остается справедливым при замене b_1 на b_2. Повторив приведенные выше рассуждения, получим, что существует вектор $\tilde{k} = \begin{pmatrix}\tilde{k}_1\\\tilde{k}_2\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ такой, что $H(t)(p(t)-\tilde{k}) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ при п.в. $t \in [0,b_2]$. Так как $b_2 > b_1$, то из (8.2) следует, что $\tilde{k} = k$. Так как $b_2 \in (b_1, b)$ выбрано произвольно, то

$$H(t)(p(t)-k) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \text{при п.в. } t \in I. \tag{8.9}$$

Следовательно, определенная на I в.-ф. $p(t)-k$ представляет нулевой элемент θ пространства $\mathfrak{Y}$. Поэтому в.-ф. $f(t) := \tilde{f}(t) - p(t) + k$ представляет элемент

$\mathfrak{f}$, а в соответствии с (8.7)

$$f(t) = -\mathcal{J}\int_0^t H(s)g(s)ds + k, \quad t \in I. \tag{8.10}$$

Отсюда вытекает, что $\{f, g\} \in l$.

Итак, для пары $\{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\} \in S_\gamma^*$ найдена такая в. ф. $f \in \mathfrak{f}$, что выполняется требование 1) определения 7.1. Докажем, что для найденной в.-ф. f выполняется и требование 2) этого определения.

Так как выполняется (8.2), то существует в.-ф. $v_+ \in \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ такая, что $v_+(t) = \binom{0}{0}$ при всех $t \in [b_1, b)$, и

$$\int_0^{b_1} H(t)v_+(t)dt = \xi_\gamma = \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix}. \tag{8.11}$$

Определим $u_+(t)$ равенством

$$u_+(t) = \mathcal{J}\int_t^{b_1} H(s)v_+(s)ds, \quad t \in I. \tag{8.12}$$

Тогда $u_+(t) = \binom{0}{0}$ при всех $t \in [b_1, b)$, $u_+(0) = \mathcal{J}\xi_\gamma$, $\{u_+; v_+\} \in l$ и $u_+ \in \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$. Следовательно, $\{\mathfrak{u}; \mathfrak{v}\} \in S_\gamma$, где $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ — элементы пространства $\mathfrak{Y}$, представляемые в.-ф. u_+ и v_+ соответственно. Поэтому справедливо равенство (напомним, $f \in \mathfrak{f}$, $g \in \mathfrak{g}$, $\{\mathfrak{f}; \mathfrak{g}\} \in S_\gamma^*$)

$$\int_0^{b_1} v_+^*(t)H(t)f(t)dt = \int_0^{b_1} u_+^*(t)H(t)g(t)dt, \tag{8.13}$$

и из тождества (1.3) вытекает, что $u_+^*(0)\mathcal{J}f(0) = 0$. Следовательно, $\xi_\gamma^* f(0) = 0$. Доказана

Лемма 8.1. *Если выполняется* (8.2), *то пара* $\{\mathfrak{f};\mathfrak{g}\}$ *из* $\mathfrak{Y}^2$ *в том и только в том случае принадлежит* S_γ^*, *когда существует в.-ф.* $f \in \mathfrak{f}$ *такая, что* 1) $\{f;g\} \in l$ *для хотя бы одной* (*и, следовательно, любой*) *в.-ф.* $g \in \mathfrak{g}$, 2) $\xi_\gamma^* f(0) = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда (8.2) не выполняется. Теперь

$$H(t) = \xi_{\varphi,\varepsilon}\xi_{\varphi,\varepsilon}^* \quad \text{при п.в. } t \in I, \tag{8.14}$$

где

$$\xi_{\varphi,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \varepsilon\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \cos\varphi\sin\varphi \neq 0, \ |\varepsilon| = 1, \ \bar{\varepsilon} \neq \varepsilon, \tag{8.15}$$

ибо I не является H-н.п., а $\operatorname{tr} H(t) = 1$ при $t \in I$. Выберем произвольно $b_1 \in (0,b)$. Повторив приведенные выше рассуждения, убеждаемся, что для $\{\mathfrak{f};\mathfrak{g}\} \in S_\gamma^*$ и $\tilde{f} \in \mathfrak{f}$, $g \in \mathfrak{g}$ существует вектор $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ такой, что для вектор-функции p, определенной равенством (8.7), справедливо (8.8). Согласно (8.14), k определяется лишь с точностью до слагаемого, ортогонального вектору $\xi_{\varphi,\varepsilon}$. Поэтому существует, причем только один, вектор k вида $q\xi_{\varphi,\varepsilon}$, где $q \in \mathbb{C}$. Итак, существует единственное число $q \in \mathbb{C}$ такое, что

$$H(t)(p(t) - q\xi_{\varphi,\varepsilon}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{при п.в. } t \in [0,b_1].$$

Теперь из аналогичного утверждения для любого промежутка $[0,b_2]$ с $b_2 \in (b_1,b)$ вытекает, что существует такое $q \in \mathbb{C}$, что

$$H(t)(p(t) - q\xi_{\varphi,\varepsilon}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{при п.в. } t \in I. \tag{8.16}$$

Этим, как и выше, устанавливается, что для принадлежности пары $\{\mathfrak{f};\mathfrak{g}\} \in \mathfrak{Y}^2$ к ЛО S_γ^* необходимо существование такой в.-ф. $f \in \mathfrak{f}$, что $\{f;g\} \in l$ при всех $g \in \mathfrak{g}$. В рассматриваемом случае это условие и достаточно. Докажем это. Пусть $\{\mathfrak{f};\mathfrak{g}\} \in \mathfrak{Y}^2$ и существует такая в.-ф. $f \in \mathfrak{f}$, что $\{f;g\} \in l$ для $g \in \mathfrak{g}$. Пусть $\{\mathfrak{u};\mathfrak{v}\}$ — какая-нибудь пара из S_γ. Достаточно доказать, что для каких-то $u \in \mathfrak{u}$ и $v \in \mathfrak{v}$

$$\int_I f^*(t)H(t)v(t)dt = \int_I g^*(t)H(t)u(t)dt. \tag{8.17}$$

Так как $\{\mathfrak{u};\mathfrak{v}\} \in S_\gamma$, то, согласно определению 7.1, существует такая в.-ф. $u \in \mathfrak{u}$, что 1) u абсолютно непрерывна на I и $u'(t) = -\mathcal{J}H(t)v(t)$ п.в. на I

для $v \in \mathfrak{v}$, 2) $\xi_\gamma^* u(0) = 0$, 3) существует такая точка $t_u \in I$, что $u(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при $t \in (I \cap [t_u, +\infty))$. Из условия 1) и (8.14) вытекает, что $\xi_{\varphi,\varepsilon}^T u'(t) = 0$ при п.в. $t \in I$, а теперь из 3) и абсолютной непрерывности в.-ф. u следует, что $\xi_{\varphi,\varepsilon}^T u(0) = 0$, а это совместимо с 2), лишь когда $u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Поэтому из 3) и тождества (1.3) вытекает справедливость равенства (8.17). Мы пришли к следующему утверждению.

Лемма 8.2. *Если условие* (8.2) *не выполняется, то пара* $\{\mathfrak{f}; \mathfrak{g}\}$ *из* $\mathfrak{Y}^2$ *в том и только в том случае принадлежит ЛО* S_γ^*, *когда существует такая в.-ф.* $f \in \mathfrak{f}$, *что* $\{f, g\} \in l$ *для хотя бы одной* (*и, следовательно, любой*) *в.-ф.* $g \in \mathfrak{g}$.

§9. Изучение множеств $S_\gamma(\theta)$ и $S_\gamma^*(\theta)$

Так как S_γ — симметрическое ЛО, то $S_\gamma(\theta) \subset S_\gamma^*(\theta)$, а так S_γ^* — замкнутое линейное отношение (в силу определения сопряженности), то S_γ^* замкнуто и $\overline{S_\gamma(\theta)} \subset S_\gamma^*(\theta)$.

Лемма 9.1. *Если имеется хотя бы один* H-*н.п.*, *то* $S_\gamma(\theta) \neq \{\theta\}$ *и, следовательно,* $S_\gamma^*(\theta) \neq \{\theta\}$, *а* S_γ *и* S_γ^* *не являются операторами.*

Доказательство. Пусть $[\alpha, \beta]$ — H-н.п., φ — его тип и $\beta < b$. Очевидно, в $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$ существует такая в.-ф. g, что $g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при $t \in (I \setminus [\alpha, \beta])$ выполняется (3.3), но $\xi_\varphi^* g(t) \neq 0$ на множестве точек $t \in [\alpha, \beta]$ положительной меры, а значит, $\|g\|_H \neq 0$. Пусть $g \in \mathfrak{g}$. Положим

$$f(t) = -\mathcal{J} \int_\alpha^t H(s) g(s) ds, \quad t \in I. \tag{9.1}$$

Очевидно, $\{f; g\} \in l$. Согласно формуле (9.1) и лемме 2.1, $0 = \xi_\varphi^* f(\alpha) = \xi_\varphi^* f(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$. Из (9.1) и (3.3) вытекает, что $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при $t \in (I \setminus (\alpha, \beta))$. Поэтому $f \in \theta$ и $\xi_\gamma^* f(0) = 0$. Следовательно, $\{\theta; \mathfrak{g}\} \in S_\gamma$, т. е. $\mathfrak{g} \in S_\gamma(\theta)$. Однако $\|\mathfrak{g}\|_{\mathfrak{Y}} = \|g\|_H \neq 0$. •

Для описания множества S_γ^* нам понадобится следующая теорема, играющая, пожалуй, ключевую роль в настоящей работе.

Теорема 9.1. *Пусть вектор-функция* $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ *обладает следующими свойствами*:

А) $f \in \mathcal{D}$, *т. е.* f *абсолютно непрерывна на* I *и для некоторой в.-ф.* g

$$\mathcal{J} f'(t) = H(t) g(t) \quad \text{при п.в. } t \in I, \tag{9.2}$$

B) $f \in \theta$, *т.е.*

$$H(t)f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{при п.в. } t \in I, \tag{9.3}$$

C) $\xi_\gamma^* f(0) = 0$. *Тогда*

a) *если* $(\alpha, \beta) \subset I$ *и* $f(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *при всех* $t \in (\alpha, \beta)$, *то* $[\alpha, \beta]$ — *H-н.п.*;

b) $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *при всех* $t \in (\mathcal{F}_H \setminus (\{0\} \cup \{b\})$ (*напомним, что* $\mathcal{F}_H$ — *дополнение в* I *множества внутренних точек максимальных H-н.п.*); *в частности,* $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *если* t — *отличный от нуля и в конец максимального H-н.п.*;

c) *если* $[0, \beta]$ — *H-н.п. и его тип* φ *отличен от* $\gamma \pmod{\pi}$, *то* $f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

d) $f'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *при п.в.* $t \in \mathcal{F}_H$;

e) *если в.-ф.* g, *фигурирующая в* (9.2), *принадлежит* $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$, *то для любой в.-ф.* $h \in \hat{\hat{\mathcal{L}}}_\gamma$ *имеем*

$$\int_I h^*(t)H(t)g(t)dt = 0; \tag{9.4}$$

f) *если* $g \in \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$, $b \in I$ *и* $f(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *то для любой в.-ф.* $h \in \hat{\mathcal{L}}_\gamma$ *справедливо* (9.4).

Для доказательства теоремы нам попадобится ряд вспомогательных предложений.

Лемма 9.2. *Если вектор-функция* $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ *обладает свойствами* A), B) *и* C), *то*

$$f^*(t)\mathcal{J}\frac{d}{dt}f(t) = 0 \quad \text{при п.в. } t \in I, \tag{9.5}$$

$$\overline{f_2(t)}f_1(t) - f_2(t)\overline{f_1(t)} = 0, \quad t \in I. \tag{9.6}$$

Доказательство. Из того что в.-ф. f обладает свойствами A) и B), получаем

$$\left(\frac{d}{dt}f^*(t)\right)\mathcal{J}f(t) = -g^*(t)H(t)f(t) = -g^*(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{при п.в. } t \in I, \tag{9.7}$$

$$f^*(t)\mathcal{J}\frac{d}{dt}f(t) = f^*(t)H(t)g(t) = (00)g(t) = 0 \quad \text{при п.в. } t \in I, \tag{9.8}$$

$$\frac{d}{dt}(f^*(t)\mathcal{J}f(t)) = 0 \quad \text{при п.в. } t \in I. \tag{9.9}$$

Согласно C), $\mathcal{J}f(0)\|\xi_\gamma$. Поэтому $f^*(0)\mathcal{J}f(0) = 0$ и из (9.9) и абсолютной непрерывности в.-ф. f вытекает, что

$$f^*(t)\mathcal{J}f(t) = 0, \quad t \in I, \tag{9.10}$$

что равносильно (9.6). Утверждение (9.5) доказано выше (см. (9.8)). •

Лемма 9.3. *Если вектор-функция* $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, *обладающая свойствами* A), B), C), *отлична от* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *во всех точках промежутка* $(\alpha, \beta) \subset I$, *то существует такое число* $\varphi \in \mathbb{R}$, *что*

$$f_1(t)\cos\varphi + f_2(t)\sin\varphi = 0, \quad t \in (\alpha, \beta), \tag{9.11}$$

и, следовательно, из того, что число $f_i(t)$ *отлично от нуля в одной точке промежутка* (α, β), *вытекает, что* $f_i(t)$ *отлично от нуля в любой точке этого промежутка*, $i = 1, 2$.

Доказательство. Возможно одно из двух: $f_1(t) = 0$ при всех $t \in (\alpha, \beta)$, $f_1(t) \neq 0$ хотя бы в одной точке $t \in (\alpha, \beta)$. В первом случае $f_2(t) \neq 0$ при всех $t \in (\alpha, \beta)$, и выполняются все утверждения леммы ($\varphi = 0$). Пусть имеет место второй случай. Тогда имеется промежуток $(\alpha_0, \beta_0) \subset (\alpha, \beta)$, на котором $f_1(t) \neq 0$. Будем считать, что (α_0, β_0) — нерасширимый промежуток, обладающий этим свойством. На нем $f_1(t) = |f_1(t)|e^{i\theta(t)}$, где $\theta(t) \in \mathbb{R}$ при каждом $t \in (\alpha_0, \beta_0)$. Согласно лемме 9.2,

$$\operatorname{Im}\frac{f_2(t)}{f_1(t)} = 0, \quad t \in (\alpha_0, \beta_0). \tag{9.12}$$

Поэтому при каждом $t \in (\alpha_0, \beta_0)$ справедливо одно из двух: либо $f_2(t) = |f_2(t)|e^{i\theta(t)}$, либо $f_2(t) = -|f_2(t)|e^{i\theta(t)}$. Следовательно, $\overline{f_j(t)} = f_j(t)e^{-2i\theta(t)}$, $j = 1, 2$ и $f^*(t) = f^T(t)e^{-2i\theta(t)}$ при каждом $t \in (\alpha_0, \beta_0)$. Теперь из равенства (9.5), справедливого в силу леммы 9.2, вытекает, что $f^T(t)\mathcal{J}\frac{d}{dt}f(t) = 0$ при п.в. $t \in (\alpha_0, \beta_0)$, т.е.

$$f_2(t)f_1'(t) - f_2'(t)f_1(t) = 0 \quad \text{при п.в. } t \in (\alpha_0, \beta_0). \tag{9.13}$$

Следовательно,

$$f_2(t) = kf_1(t), \quad t \in (\alpha_0, \beta_0), \tag{9.14}$$

где k — константа, причем $k \in \mathbb{R}$ (см. (9.12)). Утверждения леммы будут доказаны ($\varphi = -\operatorname{arcctg} k$), если мы покажем, что $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$. Допустим, что

$\alpha_0 > \alpha$. Так как (α_0, β_0) — максимальный промежуток, на котором $f_1(t) \neq 0$, то $f_1(\alpha_0) = 0$. Согласно (9.14), $f_2(\alpha_0) = 0$ и $f(\alpha_0) = \binom{0}{0}$, что противоречит условию леммы. Итак, $\alpha_0 = \alpha$, и по аналогичной причине $\beta_0 = \beta$. •

Доказательство утверждения a) теоремы 9.1. Пусть выполняются условия A), B), C) теоремы и $f(t) \neq \binom{0}{0}$ при всех $t \in (\alpha, \beta)$. Из (9.3) вытекает, что $\operatorname{rank} H(t) = 1$ при п.в. $t \in (\alpha, \beta)$, т.е.

$$H(t) = \xi(t)\xi^*(t) \quad \text{при п.в. } t \in (\alpha, \beta), \tag{9.15}$$

где $\xi = \binom{\xi_1}{\xi_2}$ — такая в.-ф., что $|\xi_1(t)|^2 + |\xi_2(t)|^2 = 1$ при п.в. $t \in (\alpha, \beta)$. Более того,

$$\overline{\xi_1(t)} f_1(t) + \overline{\xi_2(t)} f_2(t) = 0 \quad \text{при п.в. } t \in (\alpha, \beta). \tag{9.16}$$

Согласно лемме 9.3, выполняется (9.11) при некотором фиксированном $\varphi \in \mathbb{R}$. Так как $f(t) \neq \binom{0}{0}$ при любом $t \in (\alpha, \beta)$, то из (9.11) и (9.16) вытекает, что $\xi(t) = p(t)\xi_\varphi$, где $p(t) \in \mathbb{C}$, $|p(t)| = 1$, при тех же t, при которых выполняется (9.16). Согласно же (9.15), $H(t) = \xi_\varphi \xi_\varphi^*$ при п.в. $t \in (\alpha, \beta)$, т.е. (α, β) — H-н.п. типа φ. •

Доказательство утверждения b) теоремы 9.1. Пусть $t_0 \in \mathcal{F}_H$, $t_0 \neq 0$, $t_0 \neq b$. Допустим, что $f(t_0) \neq \binom{0}{0}$. Из непрерывности в.-ф. f следует, что существует содержащий точку t_0 интервал $(\alpha, \beta) \subset I$ такой, что $f(t) \neq \binom{0}{0}$ при всех $t \in (\alpha, \beta)$. Согласно утверждению a), (α, β) — H-н.п. и, следовательно, часть максимального H-н.п., а t_0 — внутренняя точка последнего, что противоречит определению множества $\mathcal{F}_H$. •

Доказательство утверждения c) теоремы 9.1. Пусть $(0, \beta)$ — H-н.п. типа φ, $\varphi \neq \gamma \pmod{\pi}$. Из (9.3) и определения 2.1 вытекает, что $\xi_\varphi^* f(t) = 0$ при п.в. $t \in [0, \beta]$. Из непрерывности в.-ф. $f(t)$ следует, что $\xi_\varphi^* f(0) = 0$, а так как, в соответствии с условием C), $\xi_\gamma^* f(0) = 0$, то $f(0) = \binom{0}{0}$, ибо $\varphi \not\equiv \gamma \pmod{\pi}$. •

Доказательство утверждения d) теоремы 9.1. Множество изолированных точек множества $\mathcal{F}_H$ не более, чем счетно. Пусть t_0 — предельная точка этого множества и существует $f'(t_0)$. Из утверждения b) вытекает, что $f'(t_0) = \binom{0}{0}$. Так как лебегова мера множества изолированных точек множества $\mathcal{F}_H$ равна нулю и, согласно условию A), $f'(t)$ существует в почти всех предельных точках этого множества, то этим доказано утверждение d). •

Доказательство утверждения e) теоремы 9.1. Пусть $h \in \hat{\hat{\mathcal{L}}}_\gamma$. Если $[\alpha, \beta]$ — максимальный H-н.п. типа φ, то из определения 3.1 множества $\hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(I)$ (напомним, $\hat{\hat{\mathcal{L}}}_\gamma \subset \hat{\mathcal{L}}_H^{(2)}(I)$)) получаем, что $\xi_\varphi^* h(t) = c_{h,[\alpha,\beta]} = \mathrm{const}$ при п.в. $t \in [\alpha, \beta]$. Как следует из определения 2.1,

$$\int_\alpha^\beta h^*(t)H(t)g(t)dt = \int_\alpha^\beta h^*(t)\xi_\varphi\xi_\varphi^* g(t)dt$$

$$= \overline{c_{h,[\alpha,\beta]}} \int_\alpha^\beta \xi_\varphi^* g(t)dt. \tag{9.17}$$

Если α и β — внутренние точки интервала I или $\alpha = 0$ и $\varphi \neq \gamma \pmod \pi$, а β — внутренняя точка этого интервала, то (см. утверждения b) и c)) $f(\alpha) = f(\beta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и, согласно (9.2),

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{J}f(\beta) - \mathcal{J}f(\alpha) = \int_\alpha^\beta H(t)g(t)dt = \xi_\varphi \int_\alpha^\beta \xi_\varphi^* g(t)dt. \tag{9.18}$$

Поэтому

$$\int_\alpha^\beta \xi_\varphi^* g(t)dt = 0 \tag{9.19}$$

и, согласно (9.17),

$$\int_\alpha^\beta h^*(t)H(t)g(t)dt = 0. \tag{9.20}$$

Если $\alpha = 0$ и $\varphi = \gamma \pmod \pi$ или $\beta = b$, то $c_{h,[\alpha,\beta]} = 0$ (см. определения 7.3 и 3.2). Поэтому из (9.17) вытекает (9.20). Итак, для любого максимального H-н.п. $[\alpha, \beta]$ справедливо равенство (9.20). Так как h, $g \in \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$, то функция $h^*(t)H(t)g(t)$ суммируема на I. Поэтому интеграл в равенстве (9.4) равен сумме интегралов этой функции по всем максимальным H-н.п. и интеграла

$$\int_{\mathcal{F}_H} h^*(t)H(t)g(t)dt. \tag{9.21}$$

Из (9.2) и утверждения d) вытекает равенство нулю интеграла (9.21). Этим доказано (9.4). •

Доказательство утверждения f) теоремы 9.1 получается путем повторения доказательсва утверждения e), но в случае, когда $[\alpha, \beta]$ — правый исключительный промежуток, (9.20) вытекает не из равенства $c_{h,[\alpha,\beta]} = 0$, а из (9.18) (теперь $f(\beta) = f(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) и (9.19). •

Теорема 9.2. *В случае, когда нет H-н.п. и только в этом случае, S_γ и S_γ^* — операторы и $\overline{\mathfrak{D}(S_\gamma)} = \overline{\mathfrak{D}(S_\gamma^*)} = \mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Как вытекает из леммы 9.1, при наличии H-н.п. S_γ и S_γ^* не являются операторами. Докажем противоположное утверждение.

Пусть $\mathfrak{g} \in S_\gamma^*(\theta)$. Тогда $\{\theta; \mathfrak{g}\} \in S_\gamma^*$ и, согласно леммам 8.1 и 8.2, существует в.-ф. f такая, что выполняются условия A) и B) теоремы 9.1, причем условие A) с $g \in \mathfrak{g}$. Рассмотрим сначала случай, когда выполняется условие (8.2). Тогда f удовлетворяет и условию C) теоремы 9.1. Если нет H-н.п., то по утверждению a) теоремы 9.1 $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при $t \in I$ и, согласно (9.2), $H(t)g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ п.в. на I. Следовательно, $g \in \theta$ и $\mathfrak{g} = \theta$.

Пусть теперь условие (8.2) не выполняется. Тогда справедливы (8.14) и (8.15) и, согласно условию A), $\xi_{\varphi,\varepsilon}^T f'(t) = -\xi_{\varphi,\varepsilon}^T \mathcal{J} \xi_{\varphi,\varepsilon} \xi_{\varphi,\varepsilon}^* g(t) = 0$ при п.в. $t \in I$, ибо $\xi_{\varphi,\varepsilon}^T \mathcal{J} \xi_{\varphi,\varepsilon} = 0$. Итак,

$$f_1'(t)\cos\varphi + f_2'(t)\varepsilon\sin\varphi = 0 \quad \text{при п.в. } t \in I. \tag{9.22}$$

Согласно же условию B), с учетом непрерывности в.-ф. f получаем $f_1(t)\cos\varphi + f_2(t)\bar{\varepsilon}\sin\varphi = 0$ при всех $t \in I$. Отсюда

$$f_1'(t)\cos\varphi + f_2'(t)\bar{\varepsilon}\sin\varphi = 0 \quad \text{при п.в. } t \in I. \tag{9.23}$$

Так как $\bar{\varepsilon} \neq \varepsilon$ и $\sin\varphi\cos\varphi \neq 0$, то, согласно (9.22) и (9.23), $f_i'(t) = f_2'(t) = 0$ п.в. на I, а в силу (9.2) $H(t)g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при п.в. $t \in I$, и поэтому $g \in \theta$, $\mathfrak{g} = \theta$.

Итак, когда нет H-н.п., $(\mathfrak{g} \in S_\gamma^*(\theta)) \implies (\mathfrak{g} = \theta)$, т.е. $S_\gamma^*(\theta) = \{\theta\}$. Как мы уже указывали (см. §7), S_γ — симметрическое ЛО, т.е. $S_\gamma \subset S_\gamma^*$. Поэтому $S_\gamma(\theta) \subset S_\gamma^*(\theta)$ и $S_\gamma(\theta) = \{\theta\}$.

Как вытекает из определения линейного отношения, сопряженного данному (§13),

$$\overline{\mathfrak{D}(S_\gamma)} \oplus S_\gamma^*(\theta) = \mathfrak{Y}. \tag{9.24}$$

Поэтому $\overline{\mathfrak{D}(S_\gamma)} = \mathfrak{Y}$ и $\overline{\mathfrak{D}(S_\gamma^*)} = \mathfrak{Y}$. •

Так как в случае отсутствия H-н.п. (см. замечания к определениям 7.3 и 3.2) $\hat{\hat{\mathfrak{Y}}}_\gamma = \mathfrak{Y}$, то обобщением теоремы 9.2 служит следующий факт.

Теорема 9.3. *Справедливы равенства* $S_\gamma^*(\theta) = \mathfrak{Y} \ominus \hat{\hat{\mathfrak{Y}}}_\gamma$, $\overline{\mathfrak{D}(S_\gamma)} = \hat{\hat{\mathfrak{Y}}}_\gamma$. *В частности, когда второй исключительный случай не имеет места,* $\overline{D(S_\gamma)} = \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$.

Доказательство. Второе утверждение теоремы вытекает из первого и (9.24). Докажем первое. Из леммы 7.1 и (9.24) следует, что

$$(\mathfrak{Y} \ominus \hat{\hat{\mathfrak{Y}}}) \subset S_\gamma^*(\theta). \tag{9.25}$$

Осталось доказать обратное включение, причем лишь в случае, когда имеются H-н.п., но I не является H-н.п. В этом случае выполняется условие (8.2). Пусть $\mathfrak{g} \in S_\gamma^*(\theta)$. Как и в доказательстве теоремы 9.2, существует в.-ф. f, обладающая свойствами A), B) и C) из условия теоремы 9.1, причем свойством A) с $g \in \mathfrak{g}$. Из утверждения e) теоремы 9.1 вытекает, что $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})_{\mathfrak{Y}} = 0$ при $\mathfrak{f} \in \hat{\hat{\mathfrak{Y}}}_\gamma$, т.е. $\mathfrak{g} \in (\mathfrak{Y} \ominus \hat{\hat{\mathfrak{Y}}})$. Следовательно, $S_\gamma^*(\theta) \subset (\mathfrak{Y} \ominus \hat{\hat{\mathfrak{Y}}})$. •

Лемма 9.4. $S_\gamma(\theta) \perp \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$.

Доказательство. Так как $S_\gamma(\theta) \subset S_\gamma^*(\theta)$, то, в силу теоремы 9.3 и замечания к определению 7.3, доказательство достаточно провести лишь, когда имеет место второй исключительный случай (см. определение 7.2) и, следовательно, $b \in I$. В этом случае для $\mathfrak{g} \in S_\gamma(\theta)$ существует (см. определение 7.1) в.-ф. f, обладающая свойствами A), B), C) из условия теоремы 9.1, причем свойством A) с $g \in \mathfrak{g}$, и такая, что $f(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Пусть $f \in \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$. Пусть h — в.-ф. из $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$, представляющая элемент $\mathfrak{f}$. Согласно утверждению f) теоремы 9.1, справедливо (9.4). Следовательно, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})_{\mathfrak{Y}} = 0$. Из произвола в выборе $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{f}$ следует утверждение леммы. •

§10. Линейное отношение $\hat{S}_\gamma$

Определение 10.1. Пару $\{\mathfrak{f}; \mathfrak{g}\} \in \mathfrak{Y}^2$ будем относить к множеству $\hat{S}_\gamma$, если $\{\mathfrak{f}; \mathfrak{g}\} \in S_\gamma$ и $\mathfrak{g} \in \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$.

Очевидно, $\hat{S}_\gamma$ — ЛО в $\mathfrak{Y}$. Более того, из леммы 7.1 и определений 10.1 и 7.1 вытекает, что $\mathfrak{D}(\hat{S}_\gamma) \subset \mathfrak{D}(S_\gamma) \subset \hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma$ и $\mathfrak{R}(\hat{S}_\gamma) \subset \hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma$.

Итак, $\hat{S}_\gamma$ — ЛО, вообще говоря, в неполном пространстве $\hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma$. Это симметрическое ЛО, ибо S_γ таково. При отсутствии H-н.п. $\hat{S}_\gamma = S_\gamma$, ибо $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma = \mathfrak{Y}$.

Теорема 10.1. *$\hat{S}_\gamma$ — эрмитов оператор в $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ и даже в $\hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma$.*

Доказательство. Осталось установить, что $\hat{S}_\gamma(\theta) = \{\theta\}$. Это вытекает из того, что $\hat{S}_\gamma(\theta) \subset S_\gamma(\theta)$, $\hat{S}_\gamma(\theta) \subset \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ (см. определение 10.1) и $S_\gamma(\theta) \perp \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ (см. лемму 9.4). •

Теорема 10.2. $\mathfrak{D}(\hat{S}_\gamma) = \mathfrak{D}(S_\gamma)$.

Доказательство. Если нет H-н.п., утверждение очевидно. Пусть имеются H-н.п. Согласно определению 10.1, $\mathfrak{D}(\hat{S}_\gamma) \subset \mathfrak{D}(S_\gamma)$. Осталось доказать обратное включение. Для этого достаточно для произвольного $\mathfrak{f} \in \mathfrak{D}(S_\gamma)$ найти $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ такие, что (i) $\tilde{g} \in \hat{\mathcal{L}}_\gamma$, (ii) $\{\tilde{f}, \tilde{g}\} \in l$, (iii) $\{\tilde{f} \in \mathfrak{f}$, (iv) $\xi_\gamma \tilde{f}(0) = 0$, (v) существует такая точка $t_{\tilde{f}} \in I$, что $\tilde{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при всех $t \in (I \cap [t_{\tilde{f}}, +\infty)$. Действительно, тогда $\{\mathfrak{f}; \tilde{\mathfrak{g}}\} \in \hat{S}_\gamma$, где $\tilde{\mathfrak{g}}$ — представимый вектор-функцией $\tilde{g}$ элемент из $\mathfrak{Y}$ (точнее, из $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$). Итак, пусть $\mathfrak{f} \in \mathfrak{D}(S_\gamma)$. Тогда существует такой элемент[7] $\mathfrak{g} \in \mathfrak{Y}$, что $\{\mathfrak{f}; \mathfrak{g}\} \in S_\gamma$, и существуют (см. определение 7.1) вектор-функции $f \in \mathfrak{f}$ и $g \in \mathfrak{g}$ такие, что $\{f; g\} \in l$, $\xi_\gamma^* f(0) = 0$, $f(t) = g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при $t \in (I \cap [t_f, +\infty))$, где $t_f \in I$. Можно считать, что t_f не является внутренней точкой H-н.п., т.е. $t_f \in \mathcal{F}_H$. Построим вектор-функцию $\tilde{g}$ следующим образом. В точках $t \in \mathcal{F}_H$ и, в частности, на концах максимальных H-н.п. полагаем $\tilde{g}(t) = g(t)$. Если имеется левый исключительный H-н.п. $[0, a_0]$, полагаем $g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при всех $t \in (0, a_0)$. Для прочих максимальных H-н.п. $[\alpha, \beta]$ полагаем при каждом $t \in (\alpha, \beta)$

$$\tilde{g}(t) := (\beta - \alpha)^{-1} \int_\alpha^\beta H(s) g(s) ds := \tilde{g}_{\alpha,\beta} \, (= \mathrm{const}). \tag{10.1}$$

Если φ — тип этого H-н.п., то на нем п.в. (см. определение 2.1)

$$H(t) = \xi_\varphi \xi_\varphi^*, \xi_\varphi^* H(t) = \xi_\varphi^*, \xi_\varphi \xi_\varphi^* H(t) = H(t), \quad H(t) H(t) = H(t). \tag{10.2}$$

Поэтому (см. (10.1), (10.2))

$$\int_\alpha^\beta H(t) \tilde{g}(t) dt = \left(\int_\alpha^\beta H(t) dt \right) \tilde{g}_{\alpha,\beta} = \xi_\varphi \xi_\varphi^* (\beta - \alpha) \tilde{g}_{\alpha\beta}$$

$$= \xi_\varphi \xi_\varphi^* \int_\alpha^\beta H(t) g(t) dt = \int_\alpha^\beta H(t) g(t) dt. \tag{10.3}$$

[7] Если действительно удастся найти такой элемент $\tilde{\mathfrak{g}} \in \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$, что $\{\mathfrak{f}; \tilde{\mathfrak{g}}\} \in S_\gamma$, то $\mathfrak{g} - \tilde{\mathfrak{g}} \in S_\gamma(\theta)$, $\mathfrak{g} - \tilde{\mathfrak{g}} \perp \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ (см. лемму 9.4) и, следовательно, $\tilde{\mathfrak{g}}$ — проекция вектора $\mathfrak{g}$ на $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$. Это подсказало ход приведенного ниже доказательства.

В соответствии с (10.1) и (10.2)

$$\tilde{g}(t) = \xi_\varphi k, \quad t \in (\alpha, \beta), \tag{10.4}$$

где

$$k = k_{g,[\alpha,\beta]} = (\beta - \alpha)^{-1} \int\limits_\alpha^\beta \xi_\varphi^* g(t)dt \in \mathbb{C}. \tag{10.5}$$

Поэтому (см. (10.2) и (10.4))

$$\int\limits_\alpha^\beta \tilde{g}^*(t)H(t)\tilde{g}(t)dt = |k|^2(\beta - \alpha). \tag{10.6}$$

Из (10.5), (10.2) и неравенства Буняковского–Шварца следует, что

$$\begin{aligned}(\beta - \alpha)^2|k|^2 &= \left|\int\limits_\alpha^\beta \xi_\varphi^* g(t)dt\right|^2 = \left|\int\limits_\alpha^\beta \xi_\varphi^* H(t)g(t)dt\right|^2 \\ &\leqslant \int\limits_\alpha^\beta \xi_\varphi^* H(t)\xi_\varphi dt \cdot \int\limits_\alpha^\beta g^*(t)H(t)g(t)dt \\ &= (\beta - \alpha)\int\limits_\alpha^\beta g^*(t)H(t)g(t)dt.\end{aligned} \tag{10.7}$$

Из (10.6) и (10.7) получаем

$$\int\limits_\alpha^\beta \tilde{g}^*(t)H(t)\tilde{g}(t)dt \leqslant \int\limits_\alpha^\beta g^*(t)H(t)g(t)dt. \tag{10.8}$$

Отсюда вытекает, что $\tilde{g} \in \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$, ибо $g \in \mathcal{L}_H^{(2)}(I)$, а из построения $\tilde{g}$ на максимальных H-н.п. следует еще, что $\tilde{g} \in \hat{\mathcal{L}}_\gamma$. Определим $\tilde{f}$ равенством

$$\tilde{f}(t) = f(a_0) - \mathcal{J}\int\limits_{a_0}^t H(s)\tilde{g}(s)ds, \quad t \in I. \tag{10.9}$$

Очевидно, $\{\tilde{f};\tilde{g}\} \in l$. Осталось доказать, что $\tilde{f}$ удовлетворяет требованиям (iii)–(v), приведенным в начале доказательства. Так как

$$f(t) = f(a_0) - \mathcal{J}\int_{a_0}^{t} H(s)g(s)ds, \quad t \in I, \tag{10.10}$$

то из построения функции $\tilde{g}$ и равенств (10.9) и (10.3) вытекает, что $\tilde{f}(t) = f(t)$ при $t \in \mathcal{F}_H$. Так как f, $\tilde{f} \in \mathcal{D}$ и хотя бы на одном конце любого максимального H-н.п. $\tilde{f}(t) = f(t)$, то (см. лемму 2.1) во всех внутренних точках этого H-н.п. имеем $\xi_\varphi^*\tilde{f}(t) = \xi_\varphi^* f(t)$, где φ — его тип. Поэтому $H(t)(\tilde{f}(t) - f(t)) = \binom{0}{0}$ всюду на I. Следовательно, $\|\tilde{f} - f\|_H = 0$, т.е. $\tilde{f} \in \mathfrak{f}$. Так как $\tilde{g}(t) = \binom{0}{0}$ при всех $t \in (0, a_0)$, то из (10.9) следует, что $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(a_0) = f(a_0)$, а так как $f \in \mathcal{D}$, то $\xi_\gamma^* f(a_0) = \xi_\gamma^* f(0) = 0$ и, следовательно, $\xi_\gamma^*\tilde{f}(0) = 0$, т.е. выполняется (iv). Так как $g(t) = \binom{0}{0}$ при каждом $t \in (I \cap [t_f, +\infty))$, то из построения в.-ф. $\tilde{g}$ следует, что $\tilde{g}(t) = \binom{0}{0}$ при тех же t. Так как $\tilde{f}(t_f) = f(t_f)$ и $f(t) = \binom{0}{0}$ при всех $t \in (I \cap [t_f, +\infty))$, то из (10.9) и (10.10) следует теперь, что выполняется (v). •

§11. Доказательство Основной теоремы

Рассмотрим функционал

$$\Phi(\mathfrak{f}, z) := \int_I (u(t, \bar{z}))^* H(t) f(t) dt, \quad f \in \mathfrak{f}, \tag{11.1}$$

определенный при любом $z \in \mathbb{C}$ на элементах $\mathfrak{f} \in \hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma$ (ясно, что величина интеграла в (11.1) не зависит от выбора $f \in \mathfrak{f}$). Очевидно, он обладает следующими свойствами.

1°. $\Phi(\mathfrak{f}, z)$ — функционал, линейный относительно $\mathfrak{f}$ при фиксированном $z \in \mathbb{C}$.

2°. $\Phi(\mathfrak{f}, z)$ при фиксированном $\mathfrak{f} \in \hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma$ является целой функцией от z.

3°. Существуют $z \in \mathbb{C}$ и $\mathfrak{f} \in \hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma$ такие, что $\Phi(\mathfrak{f}, z) \neq 0$.

Последнее вытекает, например, из того, что $u(t, 0) = \xi_{\gamma - \frac{\pi}{2}}$ при всех $t \in I$, а $\xi_\omega^* H(t) \xi_\omega > 0$ на множестве точек $t \in I$ положительной меры, ибо I не является H-неделимым промежутком.

4°. Если $\mathfrak{f}_0 \in \hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma$ и $z_0 \in \mathbb{R}$, то уравнение

$$\hat{S}_\gamma \mathfrak{y} - z_0 \mathfrak{y} = \mathfrak{f}_0 \tag{11.2}$$

имеет решение в том и только в том случае, когда $\Phi(\mathfrak{f}_0, z_0) = 0$. Докажем это. Пусть $f_0 \in \mathfrak{f}_0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\mathcal{J}y' = z_0 H(t)y + H(t)f_0(t). \tag{11.3}$$

Так как $\mathfrak{f}_0 \in \hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma \subset \mathfrak{Y}'$, то $f_0 \in \mathfrak{f}_0$ можно выбрать так, что $f_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при всех $t \in ([t_0 + \infty) \cap I)$ для некоторого $t_0 \in I$.

Существует единственное решение $v(t)$ уравнения (11.3) такое, что $v(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, $v(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при всех $t \in ([t_0, +\infty) \cap I)$ и $v \in (\hat{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L}')$ (см. определение 1.2 и лемму 2.1). Поэтому (см. определения 7.1 и 10.1) свойство 4° будет доказано, как только установим, что

$$(\xi_\gamma^* v(0) = 0) \iff (\Phi(\mathfrak{f}_0, z_0) = 0). \tag{11.4}$$

Заметим, что $\{v; z_0 v + f_0\} \in l$, $\{u(\cdot, z_0); z_0 u(\cdot, z_0)\} \in l$. Согласно (1.3) с $t_1 = 0$, $t_2 = t_0$,

$$\begin{aligned} \int\limits_I (u(t, z_0))^* H(t) f_0(t) dt &= \int\limits_0^{t_0} (u(t, z_0))^* H(t) f_0(t) dt \\ &= -u(0, z_0)^* \mathcal{J} v(0). \end{aligned} \tag{11.5}$$

Так как $u(0, z_0) = \begin{pmatrix} \sin\gamma \\ -\cos\gamma \end{pmatrix}$, то $(u(0, z_0))^* \mathcal{J} = -\xi_\gamma^*$, и из (11.1) и (11.5) вытекает (11.4). Свойство 4° доказано.

Так как функционал $\Phi(\mathfrak{f}, z)$ обладает свойствами 1°–4°, то он является направляющим функционалом [1] оператора $\hat{S}_\gamma$ в пространстве (вообще говоря, неполном) $\hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma$. Когда второй исключительный случай не имеет места, $\mathfrak{D}(\hat{S}_\gamma)$ плотно в $\hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma$ (см. теоремы 9.3 и 10.2) и, согласно теореме 1 из [1], существует неубывающая на $(-\infty, +\infty)$ нормированная функция τ такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\mathfrak{f}, \lambda)|^2 d\tau(\lambda) = \|\mathfrak{f}\|^2_{\hat{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{f} \in \hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma}.$$

Так как $(Uf)(\lambda)$ (см. Введение) для $f \in \mathfrak{f}$ и вещественных λ совпадает с $\Phi(\mathfrak{f}, \lambda)$, то этим в указанном случае установлено утверждение основной теоремы.

Пусть теперь имеет место второй исключительный случай, а правый исключительный промежуток (см. определение 7.2) $[b_0, b]$ имеет тип ψ. В этом

случае $\hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma = \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ — (полное) гильбертово пространство, но $\overline{\mathfrak{D}(\hat{S}_\gamma)} = \hat{\hat{\mathfrak{Y}}}_\gamma \neq \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$, причем $\hat{\hat{\mathfrak{Y}}}'_\gamma \oplus \overline{\mathfrak{D}(\hat{S}_\gamma)} = \hat{\mathfrak{Y}}([b_0, b])$ — одномерное пространство (см. теорему 9.3, замечание к определению 7.3). Анализ доказательства теоремы 1 из [1] показывает, что плотность в $\hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma$ множества $\mathfrak{D}(\hat{S}_\gamma)$ не является обязательной. Достаточно, чтобы существовал симметрический оператор с плотной в $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ областью определения, являющийся расширением оператора $\hat{S}_\gamma$. Построим его.

Выберем $\chi \in \mathbb{R}$ так, что $\chi \neq \psi \pmod{\pi}$. Элемент $\{\mathfrak{f}; \mathfrak{g}\} \in \hat{\mathfrak{Y}}^2_\gamma$ будем относить к $\tilde{S}$ в том и только в том случае, когда существует в.-ф. $f \in \mathfrak{f}$ такая, что 1) $\{f, g\} \in l$ хотя бы для одной в.-ф. $g \in \mathfrak{g}$, 2) $\xi^*_\gamma f(0) = 0$, 3) $\xi^*_\chi f(b) = 0$.

Из (1.3) вытекает, что $\tilde{S}$ — симметрическое в $\hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma$ ЛО. Так как промежуток I не является H-неделимым, то справедливо (8.2). Повторив рассуждения из доказательства леммы 8.1, убеждаемся, что существует такая абсолютно непрерывная в.-ф. $f \in \mathfrak{f} \in \mathfrak{D}(\tilde{S})$, что $f(b) = \begin{pmatrix} \sin\chi \\ -\cos\chi \end{pmatrix}$, и, следовательно, $\xi^*_\psi f(t) = \xi^*_\psi f(b) \neq 0$ при всех $t \in [b_0, b]$, ибо $\chi \neq \varphi \pmod{\pi}$. Поэтому одномерное подпространство $\hat{\mathfrak{Y}}([b_0, b])$ пространства $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ не ортогонально к $\mathfrak{D}(\tilde{S})$. Так как $\hat{S}_\gamma \subset \tilde{S}$, $\overline{\mathfrak{D}(\hat{S}_\gamma)} = \hat{\hat{\mathfrak{Y}}}_\gamma$ (см. теоремы 9.3 и 10.2) и $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma = \hat{\hat{\mathfrak{Y}}} \oplus \hat{\mathfrak{Y}}([b_0, b])$, то $\overline{\mathfrak{D}(\tilde{S})} = \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$. Теперь из того, что $\tilde{S}$ — симметрическое в $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ ЛО, вытекает, что $\tilde{S}(\theta) = \{\theta\}$, и потому $\tilde{S}$ — симметрический в $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ оператор (в действительности он даже самосопряженный). Этим завершено доказательство основной теоремы.

§12. Разложимость по собственным функциям

Как мы установили (см. лемму 5.1), вектор-функция $f \in \mathcal{L}^{(2)}_H(I)$, не принадлежащая $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$, не разлагается по решениям (собственным функциям) граничной задачи (0.1), (0.3). Здесь будет показано (см. теорему 12.2), что любая в.-ф. $f \in \hat{\mathcal{L}}_\gamma$ разлагается в смысле определения 5.1 по решениям этой задачи.

Мы воспользуемся методом, который, по-видимому, восходит к работе [2] А. Я. Повзнера. Однако из-за того, что мы не всегда можем гарантировать существование ортогональных квазиспектральных функций граничной задачи (0.1), (0.3), здесь возникают осложнения в использовании этого метода. Они возникают также из-за возможного наличия H-н.п.

Пусть τ — квазиспектральная функция граничной задачи (0.1), (0.3). Отображение U (см. Введение) в соответствии с определением 6.1 изометрически переводит $\hat{\mathcal{L}}'_\gamma$ в $\mathcal{L}^{(2)}_\tau(-\infty, +\infty)$. Обозначим через $\mathfrak{B}$ гильбертово пространство, получаемое из $\mathcal{L}^{(2)}_\tau(-\infty, +\infty)$ путем факторизации по множеству элементов из $\mathcal{L}^{(2)}_\tau(-\infty, +\infty)$, имеющих нулевую норму.[8] Отображение

[8] Его элементы будем обозначать полужирными прописными латинскими буквами.

$U : \hat{\mathcal{L}}'_\tau \mapsto \mathcal{L}^{(2)}_\tau(-\infty, +\infty)$ естественным образом порождает изометрическое отображение $\mathfrak{U} : \hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma \mapsto \mathfrak{B}$. Так как $\hat{\mathfrak{Y}}'_\gamma$ плотно в $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$, то $\mathfrak{U}$ может быть по непрерывности расширено на $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ до изометрического отображения $\mathfrak{U}_\tau$, переводящего $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ в $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{H}_\tau := \mathfrak{U}_\tau \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$. $\mathfrak{H}_\tau$ — (полное) подпространство пространства $\mathfrak{L}$. Пусть P — действующий в $\mathfrak{B}$ ортопроектор на $\mathfrak{H}_\tau$.

Теорема 12.1. *Пусть $\mathcal{G}$ — элемент пространства $\mathcal{L}^{(2)}_\tau(-\infty, +\infty)$, $\mathbf{G}$ — элемент пространства $\mathfrak{B}$, порождаемый элементом $\mathcal{G}$ (т.е. $\mathcal{G} \in \mathbf{G}$). Пусть $\mathfrak{f} = \mathfrak{U}_\tau^{-1} P\mathbf{G}$ и $f \in \mathfrak{f}$. Тогда*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(\lambda) u(t, \lambda) d\tau(\lambda) \tag{12.1}$$

в смысле сходимости в $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$, т.е. при любых μ, $\nu \in \mathbb{R}$, $\mu < \nu$ функция

$$\int_{[\mu,\nu]} \mathcal{G}(\lambda) u(t, \lambda) d\tau(\lambda)$$

эквивалентна в смысле метрики в $\mathcal{L}^{(2)}_H(I)$ некоторой функции из $\hat{\mathcal{L}}_\gamma$ и

$$\lim_{\substack{\mu \to -\infty \\ \nu \to +\infty}} \left\| f(t) - \int_{[\mu,\nu]} \mathcal{G}(\lambda) u(t, \lambda) d\tau(\lambda) \right\|_H = 0. \tag{12.2}$$

Доказательство. Отметим, что при фиксированных $t \in I$ и μ, $\nu \in \mathbb{R}$, $\mu < \nu$ интеграл

$$\int_{[\mu,\nu]} \mathcal{G}(\lambda) u(t, \lambda) d\tau(\lambda) := q_{\mu,\nu}(\lambda) \tag{12.3}$$

существует, так как $\mathcal{G} \in \mathcal{L}^{(2)}_\tau(-\infty, +\infty)$, а функция $u(t, \lambda)$ непрерывна по λ.

Из изометричности отображения $\mathfrak{U}_\tau$ вытекает, что для любых y, $z \in \hat{\mathcal{L}}_\gamma$

$$\int_I (z(t))^* H(t) y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\lambda) \overline{Z(\lambda)} d\tau(\lambda), \tag{12.4}$$

где $Y \in \mathfrak{U}_\tau \mathfrak{z}$, $Z \in \mathfrak{U}_\tau \mathfrak{y}$, а $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{y}$ — такие элементы пространства $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$, что $z \in \mathfrak{z}$, $y \in \mathfrak{y}$. Возьмем[9] $z(t) = \eta\chi_{[a_0,s]}(t)$ при $t \in I$, где $\eta = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $s \in \mathcal{F}_H$. Тогда, очевидно, $z \in \hat{\mathcal{L}}'_\gamma$, а $Z(\lambda)$ можно задать равенством

$$Z(\lambda) = (Uz)(\lambda) = \left(\int\limits_{a_0}^{s} (u(t,\lambda))^* H(t)dt\right)\eta. \tag{12.5}$$

Согласно (12.4), при любых $y \in \hat{\mathcal{L}}_\gamma$, $\eta = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $s \in \mathcal{F}_H$

$$\eta^* \int\limits_{a_0}^{s} H(t)y(t)dt = \eta^* \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (V(\lambda))^* Y(\lambda)d\tau(\lambda), \tag{12.6}$$

где $Y(\lambda)$ то же, что и выше, а

$$(V(\lambda))^* = \left(\int\limits_{a_0}^{s} (u(t,\lambda))^* H(t)dt\right)^* = \int\limits_{a_0}^{s} H(t)u(t,\lambda)dt. \tag{12.7}$$

Пусть, как в формулировке теоремы, $\mathcal{G} \in \mathcal{L}_\tau^{(2)}(-\infty,+\infty)$, а $\mathfrak{G}$ — представляемый ею элемент из $\mathfrak{L}$. Положим $\mathcal{G}_{\mu,\nu}(\lambda) = \mathcal{G}(\lambda)\chi_{[\mu,\nu]}(\lambda)$. Пусть $\mathfrak{G}_{\mu,\nu}$ — представляемый функцией $\mathcal{G}_{\mu,\nu}$ элемент из $\mathfrak{L}$. Очевидно, $\mathcal{G}_{\mu,\nu} \to \mathcal{G}$ в метрике пространства $\mathcal{L}_\tau^{(2)}(-\infty,+\infty)$, когда $\mu \to -\infty$, $\nu \to +\infty$, и, следовательно, $\mathfrak{G}_{\mu,\nu} \to \mathfrak{G}$ в метрике пространства $\mathfrak{L}$. Пусть $\mathcal{F} = P\mathfrak{G}$, $\mathcal{F}_{\mu,\nu} = P\mathfrak{G}_{\mu,\nu}$. Ясно, что $\mathcal{F}_{\mu,\nu} \to \mathcal{F}$ в $\mathfrak{L}$ при $\mu \to -\infty$ $\nu \to +\infty$. Так как $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_{\mu,\nu} \in \mathfrak{H}$, то существуют (единственные) $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_{\mu,\nu} \in \hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ такие, что $\mathfrak{U}_\tau\mathfrak{f} = \mathcal{F}\mathfrak{U}_\tau\mathfrak{f} = \mathcal{F}\mathfrak{U}_\tau\mathfrak{f}_{\mu,\nu} = \mathcal{F}_{\mu,\nu}$. В силу изометричности отображения $\mathfrak{U}_\tau$, $\mathfrak{f}_{\mu,\nu} \to \mathfrak{f}$ в $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$ при $\mu \to -\infty$, $\nu \to +\infty$. Пусть $f_{\mu,\nu} \in \hat{\mathcal{L}}_\gamma$ — какая-нибудь вектор-функция, представляющая элемент $\mathfrak{f}_{\mu,\nu} \in \hat{\mathfrak{Y}}$. Осталось доказать, что

$$\|f_{\mu,\nu} - q_{\mu,\nu}\|_H = 0, \quad \mu,\nu \in \mathbb{R}, \ \mu < \nu, \tag{12.8}$$

где $q_{\mu,\nu}$ — вектор-функция, определенная равенством (12.3).

[9]Здесь χ_B — характеристическая функция множества B.

Возьмем в (12.6) $y = f_{\mu,\nu}$. Тогда $Y = \mathcal{F}_{\mu,\nu} \in \mathcal{F}_{\mu,\nu} = \mathfrak{U}_\tau \mathfrak{f}_{\mu,\nu}$. Имеем при любых $\eta \in \mathbb{C}^2$ и $s \in \mathcal{F}_H$

$$\eta^* \int_{a_0}^{s} H(t) f_{\mu,\nu}(t) dt = \eta^* \int_{-\infty}^{+\infty} (V(\lambda))^* \mathcal{F}_{\mu,\nu}(\lambda) d\tau(\lambda). \tag{12.9}$$

Так как $V(\cdot)\eta$ — образ при отображении U некоторой в.-ф. $z \in \hat{\mathcal{L}}'_\gamma$, то $V(\cdot)\eta$ представляет некоторый элемент из $\mathfrak{L}_\tau$, а так как, кроме того, $\mathcal{F}_{\mu,\nu} - \mathcal{G}_{\mu,\nu} \in \mathfrak{F}_{\mu,\nu} - \mathfrak{G}_{\mu,\nu}$ и $\mathfrak{F}_{\mu,\nu} - \mathfrak{G}_{\mu,\nu} \perp \mathfrak{L}$ (ибо $\mathfrak{F}_{\mu,\nu} = P\mathfrak{G}_{\mu,\nu}$), то

$$\eta^* \int_{-\infty}^{+\infty} (V(\lambda))^* \mathcal{F}_{\mu,\nu}(\lambda) d\tau(\lambda) = \eta^* \int_{-\infty}^{+\infty} (V(\lambda))^* \mathcal{G}_{\mu,\nu}(\lambda) d\tau(\lambda)$$
$$= \eta^* \int_{[\mu,\nu]} (V(\lambda))^* \mathcal{G}(\lambda) d\tau(\lambda). \tag{12.10}$$

Согласно (12.9), (12.10) и (12.7), при любых $\eta \in \mathbb{C}^2$ и $s \in \mathcal{F}_H$

$$\eta^* \int_{a_0}^{s} H(t) f_{\mu,\nu}(t) dt = \eta^* \int_{[\mu,\nu]} \Big(\mathcal{G}(\lambda) \int_{a_0}^{s} H(t) u(t,\lambda) dt\Big) d\tau(\lambda). \tag{12.11}$$

Так как $\mathcal{G}(\cdot) \in \mathcal{L}_\tau^{(2)}$, а функция $\int_{a_0}^{s} |\eta^* H(t) u(t,\lambda)| dt$ непрерывна на $[\mu,\nu]$, то сходится интеграл

$$\int_{[\mu,\nu]} \Big(|\mathcal{G}(\lambda)| \int_{a_0}^{s} |\eta^* H(t) u(t,\lambda)|\Big) d\tau(\lambda).$$

Следовательно, можно изменить порядок интегрирования в правой части (12.11). Имеем при любых $\eta \in \mathbb{C}^2$ и $s \in \mathcal{F}_H$ (см. (12.3))

$$\eta^* \int_{a_0}^{s} H(t) f_{\mu,\nu}(t) dt = \eta^* \int_{a_0}^{s} H(t) q_{\mu,\nu}(t) dt. \tag{12.12}$$

В частности, (12.12) справедливо, когда s — конец максимального H-неделимого промежутка. Следовательно, для любого такого промежутка $[\alpha, \beta]$ и любого $\eta \in \mathbb{C}^2$

$$\eta^* \int_\alpha^\beta H(t) f_{\mu,\nu}(t) dt = \eta^* \int_\alpha^\beta H(t) q_{\mu,\nu}(t) dt. \tag{12.13}$$

Так как $f_{\mu,\nu} \in \hat{\mathcal{L}}_\gamma$, то $\xi_\varphi^* f_{\mu,\nu}(t) = c_{f_{\mu,\nu}} = \text{const}$ при п.в. $t \in [\alpha, \beta]$, где φ — тип этого H-н.п. Из (12.3) следует, что $\xi_\varphi^* q_{\mu,\nu}(t) = c_{q_{\mu,\nu}} = \text{const}$ п.в. на $[\alpha, \beta]$ (см. доказательство леммы 5.1). Так как $H(t) = \xi_\varphi \xi_\varphi^*$ при п.в. $t \in [\alpha, \beta]$, то, согласно (12.13), имеем $\eta^* \xi_\varphi c_{f_{\mu,\nu}} = \eta^* \xi_\varphi c_{q_{\mu,\nu}}$. Взяв $\eta = \xi_\varphi$, получаем, что $c_{f_{\mu,\nu}} = c_{q_{\mu,\nu}}$, и, следовательно, $H(t) f_{\mu,\nu}(t) = H(t) q_{\mu,\nu}(t)$ при п.в. $t \in [\alpha, \beta]$. Так как это верно для любого H-н.п. $[\alpha, \beta]$, а при s, принадлежащих $\mathcal{F}_H$, справедливо равенство (12.12), то оно справедливо при любом $s \in I$. Теперь из произвола в выборе $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ вытекает, что $H(t) f_{\mu,\nu}(t) = H(t) q_{\mu,\nu}(t)$ при п.в. $t \in I$. Этим установлено (12.8). Теорема доказана. •

Как частный случай из теоремы 12.1 получается

Теорема 12.2. *Если τ — квазиспектральная функция граничной задачи* (0.1), (0.3), $f \in \hat{\mathcal{L}}_\gamma$, $\mathcal{F} \in \mathfrak{U}_\tau \mathfrak{f}$, *где $\mathfrak{f}$ — элемент пространства $\hat{\mathfrak{Y}}_\gamma$, изображаемый вектор-функцией f, то*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\lambda) u(t, \lambda) d\tau(\lambda) \tag{12.14}$$

в смысле сходимости в $\mathcal{L}_H^{(2)}(I)$.

Для полноты картины отметим, что в случае, когда правый конец интервала I регулярен, функция $\mathcal{F}$ может быть определена равенством

$$\mathcal{F}(\lambda) = \int_0^b u^*(t, \lambda) H(t) f(t) dt$$

при каждом $\lambda \in \mathbb{R}$, а в случае сингулярности она определяется с точностью до слагаемого с нулевой нормой в $\mathcal{L}_\tau^{(2)}(\mathbb{R})$ из равенства

$$\lim_{s \uparrow b, s \in \mathcal{F}_H} \left\| \mathcal{F}(\lambda) - \int_0^s u^*(t, \lambda) H(t) f(t) dt \right\|_{\mathcal{L}_\tau^{(2)}}.$$

Это вытекает из построения отображения $\mathfrak{U}_\tau$.

§13. Некоторые сведения о линейных отношениях

Пусть $\mathfrak{M}$ — линейное пространство $\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Любое непустое линейное множество $T \subset \mathfrak{M}^2$ называется линейным отношением в $\mathfrak{M}$. Областью определения и множеством значений линейного отношения T называют соответственно

$$\mathfrak{D}(T) = \{\mathfrak{f} \in \mathfrak{M} \mid \{\mathfrak{f}; \mathfrak{g}\} \in T \text{ для некоторого } \mathfrak{g} \in \mathfrak{M}\},$$
$$\mathfrak{R}(T) = \{\mathfrak{g} \in \mathfrak{M} \mid \{\mathfrak{f}; \mathfrak{g}\} \in T \text{ для некоторого } \mathfrak{f} \in \mathfrak{M}\}.$$

Для $\mathfrak{f} \in \mathfrak{D}(T)$ $T(\mathfrak{f}) := \{\mathfrak{g} \in \mathfrak{M} \mid \{\mathfrak{f}; \mathfrak{g}\} \in T\}$.

Линейное отношение T называется оператором, если для любого $\mathfrak{f} \in \mathfrak{D}(T)$ множество $T(\mathfrak{f})$ состоит из одного элемента. Для того чтобы линейное отношение T было оператором, достаточно (и необходимо), чтобы $T(\theta) = \{\theta\}$, где θ — нулевой элемент пространства $\mathfrak{M}$. Если T — оператор, то $T\mathfrak{f} \in T(\mathfrak{f})$ при всех $\mathfrak{f} \in \mathfrak{D}(T)$.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и T — линейное отношение в $\mathfrak{M}$. Сопряженным к T называется

$$T^* := \{\{\mathfrak{f}; \mathfrak{g}\} \in \mathfrak{M}^2 \mid (\mathfrak{f}, \mathfrak{v}) = (\mathfrak{g}, \mathfrak{u}), \{\mathfrak{u}; \mathfrak{v}\} \in T\}.$$

Очевидно, T^* — линейное отношение в $\mathfrak{M}$, причем замкнутое (T^* — замкнутое линейное подпространство пространства $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$). Легко видеть, что $\overline{\mathfrak{D}(T)} \oplus T^*(\theta) = \mathfrak{M}$. Поэтому если $\overline{\mathfrak{D}(T)} = \mathfrak{M}$, то T^* — оператор.

Линейное отношение T называют самосопряженным, если $T^* = T$, его называют симметрическим, если $T \subset T^*$, т.е. если $(\mathfrak{f}, \mathfrak{v}) = (\mathfrak{g}, \mathfrak{u})$ для любых $\{\mathfrak{f}; \mathfrak{g}\}$, $\{\mathfrak{u}; \mathfrak{v}\} \in T$.

Пусть T — симметрическое линейное отношение в $\mathfrak{M}$ и $\hat{\mathfrak{M}} := \mathfrak{M} \ominus \overline{T(\theta)}$. Легко понять, что для $\mathfrak{f} \in \mathfrak{D}(T)$ существует не более одного такого элемента $\mathfrak{g} \in \hat{\mathfrak{M}}$, что $\{\mathfrak{f}; \mathfrak{g}\} \in T$. Если для каждого $\mathfrak{f} \in \mathfrak{D}(T)$ такой элемент $\mathfrak{g}$ существует, то говорят, что существует операторная часть $\hat{T}$ линейного отношения T:

$$\hat{T} := \{\{\mathfrak{f}; \mathfrak{g}\} \in T \mid \mathfrak{g} \in \hat{\mathfrak{M}}\}.$$

Согласно определению, $\mathfrak{D}(\hat{T}) = \mathfrak{D}(T)$. Так как $T(\theta) \subset T^*(\theta)$, то $\overline{\mathfrak{D}(T)} \subset \hat{\mathfrak{M}}$ и $\hat{T}$ — действующий в $\hat{\mathfrak{M}}$ оператор (симметрический). Если симметрическое линейное отношение T замкнуто, то у него существует операторная часть $\hat{T}$,[10] причем $\hat{T}$ является самосопряженным оператором в $\hat{\mathfrak{M}}$ в том и только в том случае, когда T — самосопряженное в $\mathfrak{M}$ линейное отношение.

[10]Симметрическое линейное отношение S_γ, введенное в §7, не является, вообще говоря, замкнутым. Этим объясняются сложности, возникшие при доказательстве теоремы 10.2.

Изложенные выше в этом параграфе положения теории линейных отношений — это повторение определений и предложений из работ [18] и [19], которые, возможно, являются основополагающими в этой теории. Однако они не вполне корректны, когда $\mathfrak{M}$ — абстрактное пространство. Они становятся корректными, когда для каждого элемента второго экземпляра пространства $\mathfrak{M}$ можно указать, какой элемент первого экземпляра является „тем же элементом". Это имеет место, когда $\mathfrak{M}$ — конкретное пространство. Именно такая ситуация имеет место в настоящей работе. Элемент первого и „тот же элемент" второго экземпляра пространства реализуется одной и той же функцией или одним и тем же семейством функций. Вопрос об указании „того же элемента" здесь не стоял. Нетрудно построить эквивалентную теорию линейных отношений без использования сдвоенных пространств.

Список литературы

[1] Крейн М. Г., *Про эрмітові оператори з напрямними функціоналами*, Збірник праць Інст. мат. АН УРСР №10 (1948), 83–105 (см., также, М. Г. Крейн. Избранные труды, кн. 2, Нац. АН Украины, Киев, 1996, сс. 172–203).

[2] Повзнер А. Я., *О методе направляющих функционалов М. Г. Крейна*, Зап. НИИ мат. и мех. и Харьк. мат. о-ва. Сер. 4 **20** (1950), 43–52. (Ученые зап. Харьк. гос. ун-та **28** (1950))

[3] Кац И. С., *О гильбертовых пространствах, порождаемых монотонными эрмитовыми матрицами-функциями*, Зап. мат. отд. физ.-мат. фак. и Харьк. мат. о-ва. Сер. 4 **22** (1950), 95–113. (Ученые зап. Харьк. гос. ун-та **34** (1950))

[4] Кац И. С., Крейн М. Г., *О спектральных функциях струны*, Доп. к кн.: Ф. Аткинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи, Мир, М., 1968, сс. 648–737.

[5] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения*, Наука, М., 1967.

[6] Langer H., Textorius B., *A generalization of M. G. Krein's method of directing functionals to linear relations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **81** (1978), 237–246.

[7] Coddington E. A., *Eigenfunction expansions for nondensely defined operators generated by symmetric ordinary differential expressions*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), 964–968.

[8] Coddington E. A., *Self-adjoint problems for nondensely defined ordinary differential operators and their eigenfunction expansions*, Adv. Math. **15** (1975), no. 1, 1–40.

[9] Dijksma A., de Snoo H. S. V., *Eigenfunction expansions for nondensely defined differential operators*, J. Differential Equations **17** (1975), 198–219.

[10] de Branges L., *Some Hilbert spaces of entire functions.* II, Trans. Amer. Math. Soc. **99** (1961), 118–152.

[11] Кац И. С., *Разложимость по собственным функциям канонического дифференциального уравнения на интервале с сингулярными концами и сопутствующие линейные отношения*, Одес. технол. ин-т пищ. пром-сти, Одесса, 1986. (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 09.09.86, №2111-Ук)

[12] Кац И. С., *Линейные отношения, порождаемые каноническими дифференциальными уравнениями*, Функц. анал. и его прил. **17** (1983) №4, 86–87.

[13] Кац И. С., *Линейные отношения, порождаемые каноническим дифференциальным уравнением на интервале с регулярным концом, и разложимость по собственным функциям*, Одес. технол. ин-т пищ. пром-сти, Одесса, 1984. (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 13.08.84, №1453 Ук-84 Деп.)

[14] Сахнович А. Л., *Спектральные функции канонической системы $2n$-го порядка*, Мат. сб. **181** (1990), №11, 1510–1524.

[15] Langer H., Winkler H., *Direct and inverse spectral problems for generalized strings*, Integral Equations Operator Theory **30** (1998), no. 4, 409–431.

[16] Hassi S., de Snoo H. S. V., Winkler H., *Boundary-value problems for two-dimensional canonical systems*, Integral Equations Operator Theory **36** (2000), no. 4, 445–479.

[17] Winkler H., *Small perturbations of canonical systems*, Integral Equations Operator Theory **38** (2000), 222–250.

[18] Arens R., *Operational calculus of linear relations*, Pacific J. Math. **11** (1961), 9–23.

[19] Coddington E. A., *Selfadjoint subspace extensions of nondensely defined symmetric operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), no. 4, 712–715.

Одесская государственная
академия пищевых технологий
65039, Одесса-39, Канатная, 112
Украина

Поступило 4 сентября 2001 г.