Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Я. Прессман, Модель для расчета выпадения тяжелой неоднородной примеси из объемного источника при ветре, изменяющемся с высотой,
Докл. АН СССР, 1968, том 181, номер 5, 1115–1118

https://www.mathnet.ru/dan34056

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.90
22 января 2026 г., 22:17:42

Доклады Академии наук СССР
1968. Том 181, № 5

УДК 551.510.4 *ГЕОФИЗИКА*

А. Я. ПРЕССМАН

МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ВЫПАДЕНИЯ ТЯЖЕЛОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПРИМЕСИ ИЗ ОБЪЕМНОГО ИСТОЧНИКА ПРИ ВЕТРЕ, ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ С ВЫСОТОЙ

(Представлено академиком Е. К. Федоровым 9 X 1967)

Решение задачи о распространении в атмосфере примеси, частицы которой обладают установившейся скоростью падения, в поле ветра с переменной по высоте скоростью даже в случае мгновенного точечного источника представляет существенные вычислительные трудности. В данной заметке изложена расчетная модель, основанная на физических упрощениях, которые позволяют обойти ряд трудностей и получить решение задачи о выпадении на подстилающую поверхность тяжелой полидисперсной примеси из объемного источника при ветре, произвольным образом меняющемся с высотой. Естественно, применение такой модели ограничено допущением о неизменности скорости ветра во времени.

В работах ([1], [2]) было показано, что при рассеянии в атмосфере тяжелой примеси с достаточно широким набором скоростей падения частиц w существуют определенные пространственные и временные границы, в пределах которых рассеяние вещества примеси за счет вертикальной турбулентности атмосферы можно не учитывать по сравнению с рассеянием примеси по вертикали за счет разницы в скоростях падения различных фракций. Эти пределы оказываются достаточно широкими, чтобы описать поведение той части примеси, которая создает на подстилающей поверхности наибольшие концентрации. При этом предположении движение частиц по вертикали, очевидно, целиком определяется зависимостью

$$z = h - wt,$$

где h — высота, с которой частица начала падение, t — время, а z — вертикальная координата, описывающая мгновенное положение частицы. Время достижения частицей подстилающей поверхности ($z = 0$) равно h/w.

Важно отметить, что в упомянутых границах поведение отдельной весовой фракции примеси, все частицы которой падают с одной и той же скоростью w, формально можно описать уравнением полуэмпирической теории турбулентной диффузии (см. ([3])), в котором отсутствует коэффициент вертикальной турбулентной диффузии K_z вместе со второй производной по вертикальной координате. Такое кардинальное упрощение позволяет получить решение уравнения

$$dc/dt + u_x(z)\,dc/dx + u_y(z)\,dc/dy - w\,dc/dz = K(d^2c/dx^2 + d^2c/dy^2) \tag{1}$$

(где c — «объемная» концентрация частиц данной весовой фракции, K — коэффициент горизонтальной турбулентной диффузии) при составляющих горизонтального ветра $u_x(x)$ и $u_y(z)$, заданных как произвольные функции высоты z в интервале $0 \leqslant z \leqslant h$. Как показано в ([4]), коэффициент рассеяния тяжелой примеси можно рассматривать как величину, обратно пропорциональную скорости падения w, что в нашем случае означает пропорциональность длительности пребывания частиц в атмосфере $t = h/w$.

Как показано в ([5]), в случае мгновенного точечного источника единичной интенсивности

$$c|_{t=0} = \delta(x)\delta(y)\delta(t-h) \tag{2}$$

выражение для поверхностной концентрации отдельной весовой фракции, выпавшей на подстилающую поверхность $z = 0$, имеет вид

$$p_1(x, y; h, w) =$$

$$= \int_0^\infty wc|_{z=0}(x, y, t; h, w)\,dt = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{[x-U_x h/w]^2+[y-U_y h/w]^2}{2\sigma^2}\right\}, \tag{3}$$

где дисперсия σ^2 является функцией $t = h/w$ и связана с коэффициентом горизонтального турбулентного рассеяния K соотношением

$$\sigma^2(t) = 2\int_0^t K(\tau)\,d\tau.$$

В выражении (3) $U_x(h)$ и $U_y(h)$ — компоненты скорости среднего ветра, представляющего собой результирующий вектор горизонтального переноса частиц при их падении в слое $0 \leqslant z \leqslant h$. Как показано в ([5]),

$$U_x(h) = \frac{1}{h}\int_0^h u_x(z)\,dz, \quad U_y(h) = \frac{1}{h}\int_0^h u_y(z)\,dz. \tag{5}$$

Так же как в ([6]) будем считать, что

$$\sigma^2(h) = \alpha^2 V^2(h)(h/w)^2, \tag{6}$$

где

$$V^2(h) = U_x^2(h) + U_y^2(h). \tag{7}$$

Заметим, что, как следует из формулы (3), распределение на плоскости $z = 0$ поверхностной концентрации $p_1(x, y; h, w)$ обладает круговой симметрией относительно точки своего максимума

$$x_0 = U_x(h)h/w, \quad y_0 = U_y(h)h/w. \tag{8}$$

Из формул (3) и (8) следует, что все весовые фракции, начавшие падение с одной и той же высоты h, независимо от скорости падения w будут образовывать на плоскости $z = 0$ распределения $p_1(x, y; h, w)$, максимумы которых расположатся на луче

$$y = xU_y(h)/U_x(h). \tag{9}$$

Если неоднородность частиц примеси в источнике охарактеризовать плотностью распределения $N(h, w)$ (которая, вообще говоря, может быть различной для каждой высоты h), то поверхностная концентрация полидисперсной примеси, выпавшей из точечного источника, расположенного на высоте h, будет иметь вид интеграла по всему диапазону скоростей w

$$p_2(x, y; h) = \int_0^\infty N(h, w)\,p_1(x, y; h, w)\,dw. \tag{10}$$

Очевидно, функция $p_2(x, y; h)$ будет симметричной относительно луча (9), который является геометрическим местом ее максимумов. В ([6]) проанализировано выражение $p_2(x, y; h)$, когда $N(h, w)$ задана в виде двупараметрической функции

$$N(h, w) = \frac{a^{n+1}}{\Gamma(n+1)}w^n e^{-aw}, \tag{11}$$

где $a(h) > 0$, $n(h) > -1$, удобной для описания достаточно широкого класса реальных распределений. В этом случае удается получить простые

аналитические выражения, позволяющие легко рассчитать распределение поверхностной концентрации на плоскости $z = 0$.

Переходя от мгновенного точечного к мгновенному плоскому источнику, расположенному на той же высоте h, очевидно, следует проинтегрировать $p_2(x, y; h)$ вместе с начальным распределением примеси в источнике $L(\xi, \eta)$, где ξ и η — горизонтальные координаты на плоскости $z = h$. Наиболее простыми выражения окажутся в случае, когда примесь распределена в источнике в момент $t = 0$ по гауссовскому закону

$$L(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \exp\left[-\frac{\xi^2+\eta^2}{2\sigma_0^2}\right]. \quad (12)$$

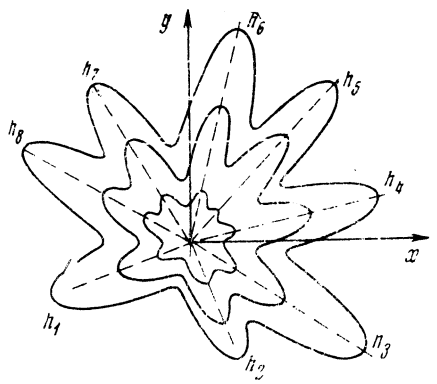

Рис. 1

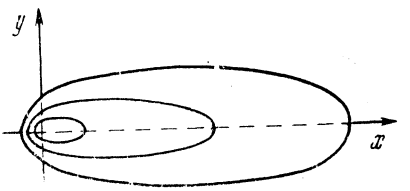

Рис. 2

Здесь начальная дисперсия σ_0^2, вообще говоря, является функцией высоты источника h. Проинтегрировав $p_2(x, y; h)$ вместе с $L(\xi, \eta)$ по плоскости $z = h$, получим выражение для поверхностной концентрации на плоскости $z = 0$

$$p_3(x, y; h) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} p_2(x-\xi, y-\eta; h)\, L(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{N(h, w)}{2\pi[\sigma_0^2(h)+\sigma^2(h)]} \exp\left\{-\frac{[x-U_x(h)h/w]^2+[y-U_y(h)h/w]^2}{2[\sigma_0^2(h)+\sigma^2(h)]}\right\} dw. \quad (13)$$

Теперь нетрудно перейти к распределению поверхностной концентрации при выпадении примеси из мгновенного объемного источника, проинтегрировав (13) с плотностью $M(h)$, характеризующей распределение примеси по высоте источника в слое $0 \leqslant h \leqslant H$:

$$p_4(x, y) =$$

$$= \int\limits_0^H \left[\int\limits_0^\infty \frac{M(h)\,N(h, w)}{2\pi[\sigma_0^2(h)+\sigma^2(h)]} \exp\left\{-\frac{[x-U_x(h)h/w]^2+[y-U_y(h)h/w]^2}{2[\sigma_0^2(h)+\sigma^2(h)]}\right\} dw\right] dh. \quad (14)$$

В качестве примера расчета по формуле (14) приведем качественные картины (рис. 1 и 2) распределения на плоскости $z = 0$ поверхностной концентрации примеси, выпавшей из объемного источника с равномерным распределением вещества в начальный момент по вертикали для двух гипотетических случаев: ветра, сильно поворачивающего с высотой, и ветра, скорость которого не изменяется по направлению в пределах слоя $0 \leqslant h \leqslant H$, занятого источником. Так как $\bar{u}_i$ (скорость ветра) обычно задана дискретно на m уровнях ($i = 1, 2, \ldots, m$), в схеме расчета распределение $M(h)$ задавалось дискретно на тех же уровнях. При расчетах полагалось, что $m = 8$. В первом случае (рис. 1) лучи h_k (см. формулу (9)) соответствуют направлениям средних ветров, скорости которых осреднялись по k равным слоям, начиная с поверхности земли

$$\bar{V}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \bar{u}_i \quad (k = 1, 2, \ldots, 8). \quad (15)$$

На рис. 2 изображена картина распределения изолиний поверхностной концентрации при ветре, постоянном по направлению ox во всем слое, занятом источником. В отличие от точечного источника, когда максимум поверхностной концентрации оказывается заметно смещенным в направлении среднего ветра, в данном случае максимум располагается практически в начале координат.

В обоих рассмотренных выше примерах для упрощения предполагалось, что в функции $N(h, w)$ параметр $n = 0$, а параметры a и σ_0 одинаковы для всех уровней.

Институт
прикладной геофизики

Поступило
6 IX 1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Прессман, Инж.-физ. журн., 2, № 11 (1959). [2] И. Л. Кароль, Ядерная метеорология, М., 1962. [3] А. С. Монин, Тр. Геофиз. инст. АН СССР, № 33, 160 (1956). [4] М. И. Юдин, ДАН, 49, № 8 (1945). [5] А. Я. Прессман, Инж.-физ. журн., 2, № 3 (1959). [6] В. Н. Петров, А. Я. Прессман, ДАН, 146, № 1 (1962).