S. V. Ivanov, Gromov–Hausdorff convergence and volumes of manifolds,
Algebra i Analiz, 1997, Volume 9, Issue 5, 65–83

Алгебра и анализ
Том 9 (1997), вып. 5

СХОДИМОСТЬ ПО ГРОМОВУ-ХАУСДОРФУ И ОБЪЕМЫ МНОГООБРАЗИЙ

© С. В. Иванов

Пусть $n \geqslant 2$, M и M_k $(k = 1, 2, \dots)$ — компактные n-мерные римановы многообразия (возможно, с краем), и M_k сходятся к M в метрике Громова–Хаусдорфа. Доказывается, что $\mathrm{Vol}(M) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(M_k)$ при выполнении любого из следующих условий:

(1) все многообразия M_k гомотопически эквивалентны многообразию M, а M замкнуто и допускает отображение ненулевой степени на тор T^n или отображение нечетной степени на $\mathbf{RP}^n$;

(2) $n = 2$, и эйлеровы характеристики многообразий M_k равномерно ограничены.

При $n \geqslant 3$ строятся примеры, когда M и все M_k диффеоморфны n-мерной сфере, но при этом $\mathrm{Vol}(M_k) \to 0$.

Введение

0.1. Пусть M, M_k $(k = 1, 2, \dots)$ — компактные связные римановы многообразия одинаковой размерности $n \geqslant 2$. Запись $M_k \to M$ будет обозначать сходимость последовательности $\{M_k\}$ к многообразию M относительно расстояния по Громову–Хаусдорфу (см. §1). В настоящей работе исследуется вопрос о том, для каких топологических типов многообразий M и M_k из того, что $M_k \to M$, следует неравенство

$$\mathrm{Vol}(M) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(M_k). \tag{$*$}$$

Мы не накладываем на метрики многообразий M_k никаких условий, кроме римановости (в частности, не предполагаем ограниченности кривизн). Под римановой метрикой мы понимаем внутреннюю метрику (функцию расстояния между точками), задаваемую непрерывным метрическим тензором.

Ключевые слова: метрика Громова–Хаусдорфа, римановы многообразия, объем, гомотопический тип.

Работа поддержана грантами РФФИ 96-01-00674 и CRDF RM1-169.

0.2. Приведем, в качестве мотивировки вопроса, следующие утверждения о полунепрерывности объемов:

(1) Если d и d_k ($k = 1, 2, \ldots$) — римановы метрики на фиксированном многообразии M и метрики d_k равномерно сходятся к d (как функции на $M \times M$), то $\mathrm{Vol}(M, d) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(M, d_k)$. Это верно даже, если d — финслерова метрика (см. [2]).

(2) Объем полунепрерывен снизу относительно классического хаусдорфова расстояния на множестве связных компактных n-мерных гладких подмногообразий пространства $\mathbf{R}^N$ с фиксированным непустым краем.

(Для доказательства утверждения (2) заметим, что для любого гладкого подмногообразия $S \subset \mathbf{R}^N$ имеются липшицевы окрестностные ретракции с константами Липшица, сколь угодно близкими к единице. Значит, подмногообразия рассматриваемого типа, содержащиеся в достаточно малой окрестности данного S, допускают отображения в S, тождественные на крае и почти не увеличивающие объемов. Эти отображения имеют степень 1 и, следовательно, сюръективны).

Отметим, что сходимость метрик в утверждении (1) является „топологически тривиальным" частным случаем сходимости по Громову–Хаусдорфу (см. 1.1 и 1.2). Из сходимости подмногообразий в утверждении (2) не следует сходимость по Громову–Хаусдорфу соответствующих римановых метрик, но эти два вида сходимости во многом аналогичны. Приведенный выше набросок доказательства утверждения (2) иллюстрирует некоторые идеи, используемые в настоящей работе. Как и утверждение (1), результаты настоящей работы сохраняют силу для сходимости римановых многообразий к финслеровым (см. п. 1.6), но для упрощения формулировок мы ограничиваемся чисто римановым случаем.

0.3. Вообще говоря, риманов объем не полунепрерывен относительно сходимости по Громову–Хаусдорфу. Имеются простые примеры сходимости замкнутых двумерных многообразий, для которых неравенство (∗) нарушается. Например, можно составить многообразия M_k из тонких трубок почти нулевой площади, которые хорошо приближают подходящие мелкие сети кривых в M (см. 3.4, 4.2). Однако род многообразий M_k, получаемых таким способом, неограниченно возрастает при $k \to \infty$.

Мы будем рассматривать вопрос о полунепрерывности объема при ограниченной или фиксированной топологии многообразий M_k. Например, обязательно ли неравенство (∗) выполняется в том случае, когда все многообразия M_k гомеоморфны M? (Сравните с утверждением (1) выше). Оказывается, что ответ на последний вопрос зависит от топологии многообразия M: вообще говоря, неравенство (∗) может нарушаться, но существуют топологические (и даже гомотопические) типы многообразий, в пределах которых объем полунепрерывен.

0.4. Будем говорить, что непрерывное отображение одного замкнутого многообразия в другое имеет *ненулевую степень*, если оно индуцирует нетривиальный гомоморфизм в старших гомологиях с коэффициентами в группе $\mathbf{Z}$ или $\mathbf{Z}_2$ (мы используем обозначение $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$). Если этот гомоморфизм нетривиален для группы $\mathbf{Z}_2$, будем говорить, что отображение имеет *нечетную степень*. (Такую же терминологию мы будем использовать в случае отображений незамкнутых многообразий, отображающих край в край). Имеет место следующая

Теорема 2.4. *Пусть M и M_k $(k = 1, 2, \dots)$ — гомотопически эквивалентные замкнутые n-мерные римановы многообразия, и пусть $M_k \to M$. Пусть M допускает отображение ненулевой степени на тор $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ или отображение нечетной степени на проективное пространство $\mathbf{RP}^n$. Тогда*

$$\mathrm{Vol}(M) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(M_k).$$

В противоположность этому, полунепрерывность объема может нарушаться для римановых многообразий, гомеоморфных трехмерной сфере (и, следовательно, для сфер любой размерности $n \geqslant 3$, произведений этих сфер с любыми многообразиями и т. д.):

Теорема 4.3. *Для любой римановой метрики d на S^3 существует последовательность $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ римановых метрик на S^3 такая, что $(S^3, d_k) \to (S^3, d)$ и $\mathrm{Vol}(S^3, d_k) \to 0$ при $k \to \infty$.*

Размерность 3 — минимальная возможная, в которой существуют такие примеры. В двумерном случае при условии, что род многообразий (поверхностей) M_k ограничен, можно дать полное описание структуры многообразия M_k, достаточно близкого к данному предельному многообразию M. Это описание содержится в теореме 3.2. Неформально, оно состоит в том, что M_k может быть получено из M комбинацией двух процедур: малого изменения метрики (как в утверждении (1) выше) и топологических перестроек в областях малого диаметра (т. е. приклеиванием нескольких маленьких ручек и пленок, а также добавлением маленьких дыр, если допускаются многообразия с краем). С помощью этой характеризации мы получаем

Следствие 3.3. *Пусть M и M_k $(k = 1, 2, \dots)$ — компактные двумерные римановы многообразия (возможно, с краем) и $\sup_k |\chi(M_k)| < \infty$, где χ обозначает эйлерову характеристику. Пусть $M_k \to M$. Тогда*

$$\mathrm{Vol}(M) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(M_k).$$

Другими словами, двумерный риманов объем (т. е. площадь) полунепрерывен снизу на любом классе двумерных многообразий, содержащем лишь конечное число различных топологических типов.

Замечания. 1. Условие гомотопической эквивалентности многообразий M и M_k в теореме 2.4 существенно. Его нельзя, например, заменить на требование того, чтобы M_k были гомотопически эквивалентны между собой и допускали отображения ненулевой степени на тор или $\mathbf{RP}^n$. Соответствующие контрпримеры легко построить по аналогии с доказательством теоремы 4.3.

2. В следствии 3.3, напротив, можно ослабить требования к топологии пространства M. Существенная для этого следствия часть рассуждений из §3 легко переносится на случай, когда M — произвольный клеточный комплекс. (На самом деле такой комплекс с необходимостью не более чем двумерен, см. замечание 3.4.2). Можно ослабить и условие римановости метрики — см. 1.6. Представляется правдоподобной гипотеза, что утверждение следствия 3.3 выполняется и без каких-либо топологических или метрических предположений относительно предельного пространства M (при каком-нибудь разумном обобщении площади на неримановы пространства).

Доказательства теоремы 2.4 и следствия 3.3 основаны на следующем факте (теорема 1.5): для выполнения неравенства $(*)$ достаточно, чтобы какие-нибудь „почти изометрические" отображения $\varphi_k\colon M_k \to M$ имели ненулевые степени (см. определения в §1). Этот факт позволяет также доказывать полунепрерывность объема при некоторых метрических ограничениях, см. замечание 1.3. В остальных частях доказательств (§2, 3) исследуются лишь топологические свойства почти изометрических отображений, что может представлять и самостоятельный интерес (см., например, замечание 3.4.3). При этом уже несущественно, что метрики многообразий M и M_k являются римановыми, но важно, что они *внутренние*, т. е. что расстояние между любыми двумя точками равно длине кратчайшей соединяющей их кривой.

0.5. Обозначения. В любом метрическом пространстве функция расстояния будет „по умолчанию" обозначаться через d. Через $U_\varepsilon(A)$ обозначается ε-окрестность множества A, через $\operatorname{dist}(A,B)$ — нижняя грань расстояний между точками множеств A и B.

Под *графом* будем понимать конечный одномерный клеточный комплекс и называть *вершинами* его нульмерные клетки, а *ребрами* — одномерные. Множество вершин графа Γ будет обозначаться через $V(\Gamma)$.

§1. Почти изометрии и объемы

Расстояние по Громову–Хаусдорфу между метрическими пространствами X и Y (мы будем обозначать его через $d_H(X,Y)$) определяется следующим образом (см. [7]): $d_H(X,Y) < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда существует метрическое пространство Z и множества $X', Y' \subset Z$ такие, что X' изометрично X, Y' изометрично Y и хаусдорфово расстояние в Z между X' и Y' меньше ε. (Последнее означает, что $X' \subset U_\varepsilon(Y')$ и $Y' \subset U_\varepsilon(X')$).

Расстояние d_H является метрикой на „пространстве" классов изометричности метрических компактов. Пусть $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность метрических пространств. По определению, $X_k \to X$, если $d_H(X_k, X) \to 0$. Ниже мы даем переформулировку на языке отображений между пространствами.

1.1. Определение. Пусть X и Y — метрические пространства, $\varphi\colon X \to Y$ — отображение (не обязательно непрерывное!) и $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что φ

является ε-*изометрией*, если выполнены два условия:

(1) $f(X)$ образует ε-сеть в Y;

(2) $|d(f(x), f(x')) - d(x, x')| < \varepsilon$ для любых $x, x' \in X$.

Нижняя грань тех ε, для которых φ является ε-изометрией, называется *погрешностью* отображения φ и обозначается через $E(\varphi)$.

Отметим, что для любых двух отображений $\varphi_1, \varphi_2 \colon X \to Y$ имеет место неравенство $|E(\varphi_1) - E(\varphi_2)| < 2d_{\sup}(\varphi_1, \varphi_2)$, где $d_{\sup}(\varphi_1, \varphi_2) := \sup_{x \in X} d(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$. Легко убедиться (см. [7]), что

(1) если $d_H(X, Y) < \varepsilon$, то существует 2ε-изометрия $\varphi \colon X \to Y$;

(2) если существует ε-изометрия $\varphi \colon X \to Y$, то $d_H(X, Y) < 2\varepsilon$.

Отсюда следует, что $X_k \to X$ тогда и только тогда, когда существует последовательность отображений $\varphi_k \colon X_k \to X$ с $E(\varphi_k) \to 0$. Такие последовательности будут называться *последовательностями почти изометрий*.

Если топология пространства X „достаточно хорошая", то с помощью стандартной техники центров масс почти изометрии можно сделать непрерывными:

1.2. Предложение. *Пусть $X_k \to X$, где X — метрический компакт, гомеоморфный окрестностному ретракту евклидова пространства. Тогда существует последовательность почти изометрий $\varphi_k \colon X_k \to X$, в которой все отображения φ_k непрерывны.*

Доказательство. Пусть $i \colon X \to \mathbf{R}^n$ — вложение, $U \subset \mathbf{R}^n$ — окрестность множества $i(X)$, $p \colon U \to i(X)$ — ретракция. Выберем какую-нибудь последовательность почти изометрий $f_k \colon X_k \to X$ и положим $\varepsilon_k = E(f_k)$. Для каждого k построим конечную ε_k-сеть $S_k \subset X_k$ и определим отображение $i_k \colon X_k \to \mathbf{R}^n$ формулой

$$i_k(x) = \frac{\sum_{y \in S_k} w_k(d(x, y)) \cdot i(f_k(y))}{\sum_{y \in S_k} w_k(d(x, y))},$$

где $w_k \colon [0, \infty) \to \mathbf{R}$ — любая непрерывная функция, положительная на $[0, 2\varepsilon_k)$ и равная нулю на $[2\varepsilon_k, \infty)$. Ясно, что отображение i_k всюду определено и непрерывно. Пусть x — любая точка пространства X_k. Для всех $y \in S_k$ таких, что $w_k(d(x, y)) > 0$, выполняется неравенство $d(f_k(x), f_k(y)) < 3\varepsilon_k$, поэтому

$$|i_k(x) - i(f_k(x))| \leqslant \sup\{|i(y') - i(f_k(x))| : y' \in U_{3\varepsilon_k}(f_k(x)) \subset X\}.$$

В силу равномерной непрерывности отображения i отсюда следует, что

$$\sup_{x \in X_k} |i_k(x) - i(f_k(x))| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

Поэтому для всех достаточно больших k определено (непрерывное) отображение $\varphi_k = i^{-1} \circ p \circ i_k \colon X_k \to X$, и расстояние между φ_k и $f_k = i^{-1} \circ p \circ (i \circ f_k)$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Значит, $E(\varphi_k) \to 0$. Для остальных значений k

(их конечное число) в качестве φ_k можно выбрать произвольные непрерывные отображения из X_k в X. •

1.3. Замечание. Вообще говоря, не существует аналогичной последовательности непрерывных отображений $\varphi'_k\colon X \to X_k$ с $E(\varphi'_k) \to 0$. Например, пусть X — стандартная двумерная сфера, а X_k гомеоморфно тору и получается из X „приклеиванием" ручки диаметра меньше $1/k$. Тогда $X_k \to X$, но любое непрерывное отображение $\varphi\colon X \to X_k$ имеет погрешность не меньше π, так как отображает какие-то две противоположные точки сферы в одну.

Существование „обратных" непрерывных почти изометрий можно обеспечить наложением некоторых метрических ограничений. Пусть X и X_k имеют ограниченные размерности и *равномерно локально стягиваемы*, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что в любом из этих пространств любой шар радиуса δ стягиваем в шаре радиуса ε. Тогда, как показано в [9], начиная с некоторого k, пространства X_k гомотопически эквивалентны X. На самом деле гомотопические эквивалентности реализуются парами отображений $\varphi_k\colon X \to X_k$ и $\varphi'_k\colon X_k \to X$, погрешности которых можно устремить к нулю.

Отсюда и из теоремы 1.5 следует, что объем полунепрерывен снизу относительно метрики Громова–Хаусдорфа на любом классе замкнутых римановых многообразий фиксированной размерности, удовлетворяющем условию равномерной локальной стягиваемости.

1.4. Далее мы ограничиваемся случаем, когда сходящиеся и предельное пространства являются компактными гладкими многообразиями (возможно, с краем). Все многообразия предполагаются связными и имеющими одинаковую размерность $n \geqslant 2$.

Пусть M и M' — два таких многообразия, $\varphi\colon M' \to M$ — непрерывное отображение, $U \subset M$ — открытое множество, $U \cap \partial M = \varnothing$. Будем говорить, что φ имеет ненулевую степень *над* U, если $\varphi(\partial M') \cap U = \varnothing$ и для любой точки $x \in U$ индуцированный гомоморфизм

$$\varphi_*\colon H_n(M', \partial M') \to H_n(M, M \setminus \{x\})$$

нетривиален для гомологий над какой-нибудь группой коэффициентов. (Имеет смысл брать группу $\mathbf{Z}$ для ориентируемых многообразий и $\mathbf{Z}_2$ — для неориентируемых).

Отображение $\varphi\colon M' \to M$ имеет ненулевую степень тогда и только тогда, когда оно имеет ненулевую степень над $M \setminus \partial M$ в определенном выше смысле. Понятие степени применимо и к многообразиям с сингулярным краем, в частности, к любым компактным подмножествам многообразий. (Мы воспользуемся этим в доказательстве теоремы 1.5).

1.5. Теорема. *Пусть M, M_k $(k = 1, 2, \dots)$ — компактные n-мерные римановы многообразия (возможно, с краем) такие, что $M_k \to M$, и пусть $U \subset M$ — открытое множество, $U \cap \partial M = \varnothing$. Предположим, что существует последовательность непрерывных почти изометрий $\varphi_k\colon M_k \to M$, которые, начиная с* *некоторого k, имеют ненулевую степень над U. Тогда*

$$\mathrm{Vol}(U) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(\varphi_k^{-1}(U)) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(M_k).$$

Доказательство. Пусть $\overline{U}$ обозначает замыкание множества U. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и предположим, что U *почти изометрично* маленькому кубу $(\delta I)^n = [0,\delta]^n \subset \mathbf{R}^n$ в следующем смысле: существует диффеоморфизм $f\colon \overline{U} \to (\delta I)^n$, такой что

$$(1+\varepsilon)^{-1} d(x,y) \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant d(x,y)$$

для любых $x, y \in \overline{U}$. Тогда $\mathrm{Vol}(U) \leqslant \delta^n(1+\varepsilon)^n$. Для оценки снизу объемов областей $\varphi_k^{-1}(U)$ будем пользоваться неравенством Безиковича [1] в следующей обобщенной формулировке (см. [6]):

Неравенство Безиковича. *Пусть V — компактное n-мерное риманово многообразие с краем (возможно, сингулярным), и пусть $f\colon V \to I^n$ — отображение ненулевой степени. Тогда*

$$\mathrm{Vol}(V) \geqslant \prod_{i=1}^{n} \mathrm{dist}(f^{-1}(F_i), f^{-1}(F_i')),$$

где F_i и F_i' обозначают i-ю пару противоположных граней куба I^n.

Для каждого k положим $U_k = \varphi_k^{-1}(U)$ и рассмотрим отображение $f_k = f \circ \varphi_k$ из $\overline{U}_k$ в $(\delta I)^n$. Оно имеет ненулевую степень и увеличивает все расстояния не более чем на $E(\varphi_k)$. В частности, для каждой пары противоположных граней куба $(\delta I)^n$ расстояния между их f_k-прообразами в $\overline{U}_k$ не меньше $\delta - E(\varphi_k)$. По неравенству Безиковича отсюда следует, что $\mathrm{Vol}(U_k) \geqslant (\delta - E(\varphi_k))^n$ при $E(\varphi_k) < \delta$, и значит,

$$\liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(U_k) \geqslant \delta^n \geqslant (1+\varepsilon)^{-n}\,\mathrm{Vol}(U).$$

Теперь пусть $U \subset M$ — произвольное открытое подмножество. Тогда U можно покрыть с точностью до сколь угодно малого объема набором непересекающихся подмножеств, почти изометричных кубам в указанном выше смысле. Складывая полученные выше неравенства для этих подмножеств, получаем

$$\mathrm{Vol}(U) \leqslant (1+\varepsilon)^n \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(\varphi_k^{-1}(U)).$$

Поскольку ε произвольно, теорема 1.5 доказана. •

1.6. Финслеровы пределы. Теорема 1.5, а с ней теорема 2.4 и следствие 3.3, сохраняются и в случае, когда предел M является финслеровым многообразием (при любом определении финслерова объема, обеспечивающем монотонную зависимость объема от метрики). Более того, если предельная финслерова метрика не является римановой, то неравенство из теоремы 1.5 — строгое. Это доказано в [2] для случая равномерной сходимости метрик на одном и том же многообразии. Доказательство в [2] основано на оценке объема через расстояния, похожей на неравенство Безиковича, и после небольших изменений оно годится и для общего случая.

Представляется интересным вопрос, выполняется ли теорема 1.5 для сходимости финслеровых многообразий (или хотя бы для равномерной сходимости финслеровых метрик). Ответ может зависеть от определения объема. Существует несколько естественных обобщений риманова объема на финслеровы многообразия, например, мера Хаусдорфа и проекция симплектического объема с единичного кокасательного расслоения. Для последнего вида объема доказательство или контрпример к теореме 1.5 может оказаться полезным для изучения финслеровых торов без сопряженных точек (см. [3, 2]).

§2. Поднятие кривых

2.1. Пусть $n \geqslant 2$, и пусть M, M_k $(k = 1, 2, \dots)$ — компактные n-мерные многообразия с внутренними метриками. Любые две точки такого многообразия можно соединить кривой, длина которой равна расстоянию между концами. Предположим, что $M_k \to M$, и пусть зафиксирована последовательность почти изометрий $\varphi_k \colon M_k \to M$. Мы будем игнорировать зависимость от φ_k в обозначениях и формулировках этого и следующего параграфов.

Будем говорить, что точка $\widetilde{p} \in M_k$ является *ε-поднятием* точки $p \in M$ (где $\varepsilon > 0$), если $d(\varphi_k(\widetilde{p}), p) < \varepsilon$. Отображение $\widetilde{f} \colon X \to M_k$ будем называть *ε-поднятием* отображения $f \colon X \to M$, если точка $\widetilde{f}(x)$ является ε-поднятием точки $f(x)$ для каждого $x \in X$. (Здесь X — произвольное множество). Под *ε-поднятием* множества $X \subset M$ будем понимать ε-поднятие включения $i_X \colon X \to M$. Ясно, что при $E(\varphi_k) < \varepsilon$ каждая точка пространства M допускает ε-поднятие в M_k. Отметим также, что из любого ε-поднятия в M_k можно малым шевелением получить ε-поднятие со значениями в $M_k \setminus \partial M_k$.

Следующая лемма позволяет строить поднятия одномерных подмножеств M. То, что M является многообразием, в этой лемме несущественно.

2.2. Лемма. 1. *Пусть $\gamma \colon [a,b] \to M$ — некоторая кривая, $\varepsilon > E(\varphi_k)$, $\widetilde{p}$ и $\widetilde{q}$ — ε-поднятия в M_k точек $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$. Тогда существует спрямляемая кривая $\widetilde{\gamma} \colon [a,b] \to M_k$, соединяющая $\widetilde{p}$ и $\widetilde{q}$ и являющаяся 7ε-поднятием кривой γ.*

2. *Пусть $\Gamma \subset M$ — вложенный граф. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $E(\varphi_k) < \delta$ любое δ-поднятие множества $V(\Gamma)$ в M_k можно продолжить до ε-поднятия графа Γ в M_k, которое является топологическим вложением.*

Доказательство. 1. Разобьем интервал $[a,b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ так, чтобы диаметры всех участков $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ были меньше ε. Положим

$\widetilde{\gamma}(t_0) = \widetilde{p}$, $\widetilde{\gamma}(t_n) = \widetilde{q}$, а для каждого $i = 1, \ldots, n-1$ выберем в качестве $\widetilde{\gamma}(t_i)$ любое ε-поднятие точки $\gamma(t_i)$. На каждом интервале $[t_i, t_{i+1}]$ определим $\widetilde{\gamma}$ как кратчайшую между $\widetilde{\gamma}(t_i)$ и $\widetilde{\gamma}(t_{i+1})$. Длина этой кратчайшей равна $d(\widetilde{\gamma}(t_i), \widetilde{\gamma}(t_{i+1})) < 4\varepsilon$. Значит, для любого $t \in [t_i, t_{i+1}]$ имеем $d(\widetilde{\gamma}(t), \widetilde{\gamma}(t_i)) < 4\varepsilon$, откуда

$$\begin{aligned} d(\varphi_k(\widetilde{\gamma}(t)), \gamma(t)) &\leqslant d(\varphi_k(\widetilde{\gamma}(t)), \varphi_k(\widetilde{\gamma}(t_i))) + d(\varphi_k(\widetilde{\gamma}(t_i)), \gamma(t)) \\ &< d(\widetilde{\gamma}(t), \widetilde{\gamma}(t_i)) + 2\varepsilon + d(\gamma(t_i), \gamma(t)) < 4\varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 7\varepsilon. \end{aligned}$$

2. Можно считать, что среди ребер графа Γ нет петель и что любые две вершины Γ соединены не более чем одним ребром. Обозначим через ε_0 наименьшее из расстояний между непересекающимися подграфами графа Γ. Для каждого $\delta > 0$ обозначим через $\theta(\delta)$ максимально возможный диаметр простой кривой, содержащейся в графе Γ, имеющей расстояние между концами не больше δ и проходящей не более чем через одну вершину графа Γ. Ясно, что $\theta(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Пусть $\delta > 0$ достаточно мало, $E(\varphi_k) < \delta$, и пусть $\psi\colon V(\Gamma) \to M_k$ — некоторое δ-поднятие. Построим сначала несамопересекающееся поднятие одного ребра графа Γ. Параметризуем это ребро посредством кривой $\gamma\colon [0,1] \to M$. По первой части леммы, γ допускает 7δ-поднятие $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to M_k$ с $\widetilde{\gamma}(0) = \psi(\gamma(0))$ и $\widetilde{\gamma}(1) = \psi(\gamma(1))$. Рассмотрим всевозможные кривые $s\colon [0,1] \to M_k$ такие, что для любого $t \in [0,1]$ выполняется по крайней мере одно из двух условий: или $s(t) = \widetilde{\gamma}(t)$, или имеется интервал $[a,b] \ni t$, на котором s постоянна и $s(t) = \widetilde{\gamma}(a) = \widetilde{\gamma}(b)$. Класс таких кривых замкнут в C^0-топологии поэтому в нем имеется кривая минимальной длины. Эта кривая, очевидно, соединяет $\widetilde{\gamma}(0)$ с $\widetilde{\gamma}(1)$, не имеет самопересечений и является ε_1-поднятием кривой γ, где $\varepsilon_1 = 7\delta + \theta(14\delta)$. Наличие у построенного поднятия постоянных участков можно устранить сколь угодно малым варьированием параметризации.

Применив эту конструкцию ко всем ребрам, получим ε_1-поднятие графа Γ, инъективное на каждом его ребре. Пусть $p \in V(\Gamma)$, $\widetilde{p} = \psi(p)$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ — все ребра графа Γ, выходящие из p, $\widetilde{\gamma}_1, \ldots, \widetilde{\gamma}_m$ — построенные ε_1-поднятия этих ребер. Тогда все попарные пересечения кривых $\widetilde{\gamma}_i$ содержатся в окрестности $U = U_{\varepsilon_2}(\widetilde{p})$ с $\varepsilon_2 = \theta(2\varepsilon_1) + 2\delta$. Можно считать, что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon_0/10$. Тогда поднятия других ребер и вершин графа не пересекают U. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ найдем точку $\widetilde{p}_i$, через которую кривая $\widetilde{\gamma}_i$ последний раз покидает U. Заменим начальные интервалы кривых $\widetilde{\gamma}_i$ от $\widetilde{p}$ до $\widetilde{p}_i$ простыми кривыми, лежащими в $U \cup \{\widetilde{p}_i\}$ и не имеющими общих внутренних точек. Это можно сделать, так как M_k — многообразие размерности $n \geqslant 2$, а множество U открыто и связно (как шар внутренней метрики). Изменение затрагивает участки, расстояния между концами которых равны ε_2, поэтому полученные кривые являются ε_3-поднятиями кривых γ_i с $\varepsilon_3 = \theta(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1) + \varepsilon_2 + 2\delta$. Проделав такое же построение для всех вершин графа, получим его ε_3-поднятие, являющееся вложением. Для завершения доказательства заметим, что $\varepsilon_3 \to 0$ при $\delta \to 0$. •

2.3. Следствие. *Если отображения φ_k непрерывны, то, начиная с некоторого k, они индуцируют сюръективные гомоморфизмы фундаментальных групп.*

Доказательство. Поскольку M компактно и локально односвязно, существует такое $\varepsilon > 0$, что любые две ε-близкие кривые в M с общими концами гомотопны. Пусть k столь велико, что $E(\varphi_k) < \varepsilon/7$. Пусть $\widetilde{p} \in M_k$, $p = \varphi_k(\widetilde{p})$. По лемме 2.2, любая петля в M с началом и концом в p допускает ε-поднятие в M_k с началом и концом в $\widetilde{p}$. Образ этого поднятия гомотопен исходной петле. •

Следствие 2.3 позволяет сделать вывод о полунепрерывности объема в тех случаях, когда эпиморфизмы фундаментальных групп могут индуцироваться только отображениями ненулевой степени. Следующая теорема — пример утверждения, получаемого таким способом.

2.4. Теорема. *Пусть M и M_k ($k = 1, 2, \dots$) — гомотопически эквивалентные замкнутые n-мерные римановы многообразия, и пусть $M_k \to M$. Пусть M допускает отображение ненулевой степени на тор $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ или отображение нечетной степени на проективное пространство $\mathbf{RP}^n$. Тогда*

$$\mathrm{Vol}(M) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Vol}(M_k).$$

Доказательство. В силу теоремы 1.5, предложения 1.2 и следствия 2.3, достаточно доказать следующее утверждение: если многообразие M удовлетворяет условиям теоремы, многообразие M' ему гомотопически эквивалентно, и $\varphi\colon M' \to M$ — непрерывное отображение, индуцирующее эпиморфизм фундаментальных групп, то φ имеет ненулевую степень.

1. Пусть $f\colon M' \to T^n$ — отображение ненулевой степени (условие существования такого отображения гомотопически инвариантно). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_1(M';\mathbf{Z}) \arrow[d, "\varphi_*"] & \pi_1(M') \arrow[l, "h'"'] \arrow[r, "f_\#"] \arrow[d, "\varphi_\#"] & \pi_1(T^n) \\
H_1(M;\mathbf{Z}) & \pi_1(M) \arrow[l, "h"']
\end{tikzcd}$$

(здесь h и h' — гомоморфизмы Гуревича). Поскольку h и $\varphi_\#$ — эпиморфизмы, то φ_* — тоже эпиморфизм. Но $H_1(M';\mathbf{Z})$ и $H_1(M;\mathbf{Z})$ — изоморфные конечно порожденные абелевы группы, поэтому любой эпиморфизм одной из них в другую является изоморфизмом. Следовательно,

$$\ker\varphi_\# \subset \ker(\varphi_* \circ h') = \ker h' = [\pi_1(M'), \pi_1(M')].$$

С другой стороны, $\ker f_\# \supset [\pi_1(M'), \pi_1(M')]$ в силу коммутативности группы $\pi_1(T^n)$. Значит, существует гомоморфизм $g\colon \pi_1(M) \to \pi_1(T^n)$ такой, что

$g \circ \varphi_\# = f_\#$. Так как T^n — асферическое пространство, то g индуцируется некоторым непрерывным отображением $\bar{f}\colon M \to T^n$, причем $\bar{f} \circ \varphi \sim f$. Поскольку f индуцирует нетривиальный гомоморфизм в n-мерных гомологиях, то это верно и для φ.

2. Пусть $f_1 : M' \to \mathbf{RP}^n$ — отображение нечетной степени. Положим $f = i \circ f_1$, где $i\colon \mathbf{RP}^n \hookrightarrow \mathbf{RP}^\infty$ — стандартное вложение. Тогда индуцированный гомоморфизм $f_*\colon H_n(M'; \mathbf{Z}_2) \to H_n(\mathbf{RP}^\infty; \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2$ нетривиален. Остаток доказательства получается из первой части заменой T^n на $\mathbf{RP}^\infty$. •

2.5. Замечание. В приведенном доказательстве теоремы 2.4 используется лишь то, что M допускает отображение f в какое-нибудь асферическое пространство X с абелевой фундаментальной группой, индуциирующее нетривиальный гомоморфизм $f_* : H_n(M) \to H_n(X)$. Как было указано Н. Ю. Нецветаевым, утверждение теоремы можно также доказать для любого многообразия M, у которого имеется $n = \dim M$ одномерных когомологических классов с ненулевым $\smile$-произведением.

2.6. Вопрос. Верно ли, что утверждение теоремы 2.4 выполняется для любого асферического многообразия M? Если да, верно ли оно для любого существенного многообразия M (см. [6])?

§3. Сходимость двумерных многообразий

В этом параграфе все многообразия предполагаются двумерными и, возможно, имеющими край. Пусть $g(M)$ обозначает род поверхности M, $|\partial M|$ — число компонент края, $\chi(M)$ — эйлерову характеристику.

3.1. Определение. Пусть M и M' — двумерные многообразия. Будем называть непрерывное отображение $\varphi\colon M' \to M$ *почти гомеоморфизмом*, если существует конечное множество точек $P \subset M \setminus \partial M$ такое, что

(1) φ гомеоморфно отображает $\varphi^{-1}(M \setminus P)$ на $M \setminus P$;

(2) прообраз $\varphi^{-1}(p)$ каждой точки $p \in P$ представляет собой либо компоненту края многообразия M', либо двумерное подмногообразие, ограниченное (в M') простой замкнутой кривой.

Отметим, что любой почти гомеоморфизм между замкнутыми многообразиями имеет степень ± 1.

3.2. Теорема. *Пусть M и M_k ($k = 1, 2, \dots$) — компактные двумерные многообразия с внутренними метриками, такие, что $\sup_k g(M_k) < \infty$, и пусть $M_k \to M$. Тогда существует последовательность почти изометрий $\varphi_k\colon M_k \to M$, которые, начиная с некоторого k, являются почти гомеоморфизмами.*

Доказательство теоремы содержится в п. 3.5 и 3.7–3.10. На самом деле будет показано, что для любой последовательности почти изометрий существует близкая к ней последовательность почти гомеоморфизмов. В п. 3.6 описывается план доказательства и его основные идеи.

3.3. Следствие. *Пусть M и M_k ($k = 1, 2, \dots$) — компактные двумерные римановы многообразия (возможно, с краем), такие, что $\sup_k |\chi(M_k)| < \infty$, и пусть $M_k \to M$. Тогда*

$$\operatorname{Vol}(M) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \operatorname{Vol}(M_k).$$

Доказательство. Предположим противное. Можно считать, что существует предел $\lim_{k\to\infty} \operatorname{Vol}(M_k) < \operatorname{Vol}(M)$. Условие $\sup_k |\chi(M_k)| < \infty$ эквивалентно равномерной ограниченности чисел $g(M_k)$ и $|\partial M_k|$. Пусть $\varphi_k \colon M_k \to M$ ($k = 1, 2, \dots$) — почти изометрии из теоремы 3.2. Для каждого k положим

$$Q_k = \{p \in M \setminus \partial M : \varphi_k^{-1}(p) \text{ содержит компоненту края } M_k\}.$$

Каждое множество Q_k содержит не более N точек, где $N = \sup_k |\partial M_k|$. Переходом к подпоследовательности добьемся того, чтобы множество $Q = \bigcup_k Q_k$ имело не более N предельных точек, в частности, его замыкание $\overline{Q}$ было счетно. Каждый почти гомеоморфизм φ_k имеет ненулевую степень над $M \setminus (\partial M \cup \overline{Q})$, поэтому по теореме 1.5

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{Vol} M_k \geqslant \operatorname{Vol}(M \setminus (\partial M \cup \overline{Q})) = \operatorname{Vol} M.$$

Противоречие. •

3.4. Замечания. 1. Условия равномерной ограниченности рода и числа компонент края в следствии 3.3 являются существенными (более того, минимально возможными). Действительно, любое риманово многообразие M можно сколь угодно хорошо приблизить вложенными в него графами (см. лемму 4.2). Вложив эти графы в $\mathbf{R}^3$ и взяв в качестве M_k сглаженные границы их трубчатых окрестностей, получим пример сходимости с $\operatorname{Vol}(M_k) \to 0$. При отсутствии ограничения на $|\partial M_k|$ можно взять в качестве M_k окрестности тех же графов в M.

2. Точно так же, при $g(M_k) \to \infty$ на многообразиях M_k можно ввести римановы метрики так, чтобы они сходились к произвольному компакту с внутренней метрикой, в частности, к пространству любой размерности. Напротив, при $\sup g(M_k) < \infty$ топологическая размерность предела последовательности $\{M_k\}$ не может быть больше двух. Действительно, предельное пространство не может содержать полных графов с очень большим числом вершин, иначе по лемме 2.2 эти графы вкладывались бы и в M_k.

3. Пусть заданы топологические типы многообразий M и M_k. Как определить, возможна ли сходимость $M_k \to M$? По теореме 3.2 при $\sup g(M_k) < \infty$ необходимо существование, начиная с некоторого k, почти гомеоморфизмов из M_k в M. Это условие, очевидно, является и достаточным. Оно эквивалентно следующему: $|\partial M_k| \geqslant |\partial M|$, и либо $g(M_k) \geqslant g(M)$ при одинаковой ориентируемости M и M_k, либо M ориентируемо, M_k неориентируемо и $g(M_k) \geqslant 2g(M)+1$. В частности, ориентируемые многообразия не могут сходиться к неориентируемому, а замкнутые многообразия не могут сходиться к многообразию с непустым краем.

3.5. Пусть M и M_k ($k = 1, 2, \dots$) удовлетворяют условиям теоремы 3.2. Положим $g = \sup_k g(M_k) + 1$. Для доказательства теоремы достаточно проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших k существуют ε-изометрии $\varphi'_k \colon M_k \to M$, являющиеся почти гомеоморфизмами. Зафиксируем любую последовательность непрерывных почти изометрий $\varphi_k \colon M_k \to M$.

Далее все рассматриваемые кривые в M и M_k предполагаются несамопересекающимися. Мы свободно отождествляем такие кривые с соответствующими подмножествами в M и M_k. Будем называть *правильно вложенной* замкнутую кривую, имеющую связное (возможно, пустое) пересечение с краем многообразия. *Разбивающими* кривыми будем называть правильно вложенные кривые, имеющие несвязные дополнения.

3.6. Доказательство теоремы 3.2 содержит много технических деталей, поэтому сначала мы приведем упрощенное рассуждение, лежащее в основе доказательства и демонстрирующее, как используется ограниченность рода многообразий M_k и то, что их метрики являются внутренними.

Зафиксируем в M достаточно большое количество (по крайней мере g) попарно непересекающихся дисков, и для достаточно большого k построим в M_k „поднятия“ границ этих дисков (в смысле пп. 2.1 и 2.2). Получим замкнутые непересекающиеся кривые в M_k. Так как их количество больше рода, какой-то набор этих кривых разбивает M_k на две области. Поскольку метрика на M_k — внутренняя, то точки из разных областей, далекие от разбивающих кривых, должны быть далеки и друг от друга. Это условие сохраняется и для φ_k-образов этих областей, так как φ_k — почти изометрия. Отсюда легко выводится, что одна из областей отображается в малую окрестность одного из дисков в M, а другая — в малую окрестность дополнения этого диска, и, в частности, что разбивающий набор состоит лишь из одной кривой (детали см. в лемме 3.7). Это означает, что отображение φ_k имеет ненулевую степень над некоторой областью внутри диска, откуда, в случае замкнутых многообразий, следует, что оно имеет ненулевую степень над M. (Заметим, что этого уже достаточно для доказательства полунепрерывности объема).

С помощью простых комбинаторных соображений, дополняющих это рассуждение, можно построить и почти гомеоморфизм, близкий к φ_k. Это построение приведено в п. 3.10. При наличии края у M оно опирается еще и на тот факт (содержащийся в лемме 3.9), что каждая компонента края допускает „поднятие“, представляющее собой компоненту края в M_k. Отметим нетривиальность этого факта: из него, в частности, следует что замкнутые многообразия (двумерные, ограниченного рода и с внутренними метриками) не могут сходиться к многообразию с краем.

3.7. Лемма. *Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ — попарно непересекающиеся разбивающие кривые в M. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, обладающее следующим свойством: если $E(\varphi_k) < \delta$ и правильно вложенные в M_k кривые $\widetilde{\gamma}_1, \dots, \widetilde{\gamma}_m$ являются δ-поднятиями кривых $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, то*

(1) *если кривые $\{\widetilde{\gamma}_i\}$ в совокупности разбивают M_k, то хотя бы одна из них является разбивающей;*

(2) *если* $m \geqslant g$, *то хотя бы одна из кривых* $\widetilde{\gamma}_i$ *является разбивающей*;
(3) *если* γ_i *разбивает* M *на области* V *и* W, *а* $\widetilde{\gamma}_i$ *разбивает* M_k *на области* $\widetilde{V}$ *и* $\widetilde{W}$, *то либо* $\varphi_k(\widetilde{V}) \subset U_\varepsilon(V)$ *и* $\varphi_k(\widetilde{W}) \subset U_\varepsilon(W)$, *либо* $\varphi_k(\widetilde{V}) \subset U_\varepsilon(W)$ *и* $\varphi_k(\widetilde{W}) \subset U_\varepsilon(V)$.

Доказательство. Можно считать, что все попарные расстояния между кривыми γ_i больше 3ε. Тогда при $\delta < \varepsilon$ кривые $\widetilde{\gamma}_i$ попарно не пересекаются. Для каждой кривой γ_i построим в ее ε-окрестности две кривые γ_i' и γ_i'', лежащие по разные стороны от γ_i и отделяющие γ_i от $M \setminus U_\varepsilon(\gamma_i)$ (если $\gamma \cap \partial M \neq \varnothing$, то одна из кривых γ_i' и γ_i'' незамкнута и соединяет две точки края). Проверим, что утверждения (1)–(3) выполняются при $\delta < \min_i \operatorname{dist}(\gamma_i, \gamma_i' \cup \gamma_i''))/5$.

Заметим, что (2) следует из (1), поскольку $g(M_k) < g$. Доказывая (1), можно считать, что $\{\widetilde{\gamma}_1, \dots, \widetilde{\gamma}_m\}$ — минимальный разбивающий M_k набор кривых. Тогда эти кривые разбивают M_k на две области $\widetilde{V}$ и $\widetilde{W}$, и $\partial\widetilde{V} = \partial\widetilde{W} = \widetilde{\gamma}_1 \cup \dots \cup \widetilde{\gamma}_m$. Пусть $V' = U_\delta(\varphi_k(\widetilde{V}))$, $W' = U_\delta(\varphi_k(\widetilde{W}))$. Имеем $V' \cup W' = M$ и $\gamma_i \subset V' \cap W'$ для $i = 1, \dots, m$.

Кривые γ_1' и γ_1'' разбивают M на три области X, Y и Z, такие, что $\partial X = \gamma_1'$, $\partial Y = \gamma_1''$, $U_{5\delta}(\gamma_1) \subset Z \subset U_\varepsilon(\gamma_1)$. Докажем, что либо $V' \subset X \cup Z$ и $W' \subset Y \cup Z$, либо $V' \subset Y \cup Z$ и $W' \subset X \cup Z$.

Пусть, например, $V' \cap X \neq \varnothing$ и $W' \cap X \neq \varnothing$. Тогда в силу связности областей V' и W' имеем $V' \cap \gamma_1' \neq \varnothing$ и $W' \cap \gamma_1' \neq \varnothing$, откуда $V' \cap W' \cap \gamma_1' \neq \varnothing$. Значит, существуют точки $p \in \widetilde{V}$ и $q \in \widetilde{W}$ такие, что $d(\varphi_k(p), x) < \delta$ и $d(\varphi_k(q), x) < \delta$ для некоторой точки x на кривой γ_1', откуда $d(p,q) < 3\delta$. С другой стороны, поскольку метрика на M_k — внутренняя и $\varphi_k(\partial\widetilde{V}) \subset U_\delta(\bigcup \gamma_i)$, то

$$d(p,q) \geqslant \operatorname{dist}(p, \partial\widetilde{V}) + \operatorname{dist}(q, \partial\widetilde{W}) > 2\operatorname{dist}(\gamma_1', \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_m) - 6\delta \geqslant 4\delta.$$

Противоречие. Таким образом, можно считать, что $V' \subset X \cup Z$ и $W' \subset Y \cup Z$. Подставляя $m = 1$, получаем утверждение (3). Если $m > 1$, то аналогичная пара включений должна иметь место и для разбиения многообразия M кривыми γ_2' и γ_2'', что невозможно. Этим доказано утверждение (1). •

3.8. Следствие. *Пусть* $\varepsilon > 0$, γ *— разбивающая кривая в* M. *Тогда для любого достаточно большого* k *существует разбивающее* ε*-поднятие кривой* γ *в* $M_k \setminus \partial M_k$.

Доказательство. Построим g попарно непересекающихся разбивающих кривых, $\varepsilon/2$-близких к γ. По лемме 2.2, п. (2), при больших k эти кривые допускают правильно вложенные $(\varepsilon/2)$-поднятия в $M_k \setminus \partial M_k$, а по лемме 3.7, п. (2), одно из этих поднятий является разбивающим. •

3.9. Лемма. *Пусть* $\varepsilon > 0$. *Тогда для любого достаточно большого* k *существует* ε*-поднятие множества* ∂M *в* M_k, *гомеоморфно отображающее* ∂M *на объединение нескольких компонент края в* M_k.

Доказательство. Пусть γ — одна из компонент края ∂M. Зафиксируем какую-нибудь ретракцию $\pi\colon V_0 \to \gamma$, где V_0 — окрестность кривой γ в M. Пусть

$U \subset V_0$ — произвольная окрестность кривой γ. Докажем, что для любого достаточно большого k найдется компонента края $\widetilde{\gamma} \subset \partial M_k$ такая, что $\varphi_k(\widetilde{\gamma}) \subset U$ и отображение $\pi \circ \varphi_k|_{\widetilde{\gamma}} \colon \widetilde{\gamma} \to \gamma$ имеет ненулевую степень. Построим разбивающую кривую $\gamma_0 \subset U$ такую, что отображение $\pi|_{\gamma_0} \colon \gamma_0 \to \gamma$ имеет степень ± 1. Пусть $\widetilde{\gamma}_0 \subset M_k \setminus \partial M_k$ — разбивающее σ-поднятие кривой γ_0 (см. 3.8) для столь малого σ, что петля $\varphi_k \circ \widetilde{\gamma}_0$ гомотопна γ_0 и п. (3) леммы 3.7 обеспечивает включение $\varphi_k(\widetilde{U}) \subset U$, где $\widetilde{U}$ — замыкание одной из компонент множества $M_k \setminus \widetilde{\gamma}_0$. Рассмотрим отображение $\pi \circ \varphi_k \colon \widetilde{U} \to \gamma \simeq S^1$. Степень его сужения на $\widetilde{\gamma}_0$ равна ± 1, а значит, эта степень не равна нулю и для одной из компонент множества $\partial M_k \cap \widetilde{U} = \partial \widetilde{U} \setminus \widetilde{\gamma}_0$. Эта компонента и есть искомая $\widetilde{\gamma}$.

Зафиксируем ориентацию на γ и выберем циклически упорядоченный набор точек $x_1, \dots, x_N \in \gamma$ так, что $N > 100g$ и точки $\{x_i\}$ разбивают γ на участки с диаметрами меньше $\varepsilon/10g$. Пусть $\delta > 0$ таково, что все ненулевые попарные расстояния между этими участками больше 10δ. Построим δ-близкую к γ разбивающую кривую $\gamma_1 \subset M \setminus \partial M$. Выберем такое $\sigma > 0$, что $U_\sigma(\gamma) \subset V_0$ и $d(\pi(x), x) < \operatorname{dist}(\gamma, \gamma_1)/10$ для всех $x \in U_\sigma(\gamma)$. Пусть k достаточно велико, пусть $\widetilde{\gamma}_1 \subset M_k \setminus \partial M_k$ — разбивающее σ-поднятие кривой γ_1 (см. 3.8), и пусть $\widetilde{\gamma}$ — компонента ∂M_k, для которой $\varphi_k(\widetilde{\gamma}) \subset U_\sigma(\gamma)$ и композиция $\varphi := \pi \circ \varphi_k|_{\widetilde{\gamma}} \colon \widetilde{\gamma} \to \gamma$ имеет ненулевую степень (см. выше). Пусть $\widetilde{V}$ — компонента множества $M_k \setminus \widetilde{\gamma}_1$, содержащая $\widetilde{\gamma}$.

Выберем ориентацию на $\widetilde{\gamma}$ так, чтобы степень отображения φ была положительной. Тогда можно найти циклически упорядоченный набор точек $y_1, \dots, y_N \in \widetilde{\gamma}$ такой, что $\varphi(y_i) = x_i$ для всех i. Для двух точек p и q на кривой γ или $\widetilde{\gamma}$ будем обозначать через $[p, q]$ участок кривой, проходимый от p к q в соответствии с ориентацией. Докажем, что каждая точка интервала $[y_i, y_{i+1}]$ является ε-поднятием любой точки интервала $[x_i, x_{i+1}]$ (здесь индексы берутся по модулю N). Для этого достаточно проверить, что $\varphi([y_i, y_{i+1}])$ содержит менее $10g$ из точек $\{x_j\}$.

Предположим противное: пусть, например, $\varphi([y_{N-1}, y_N])$ содержит точки $x_1, \dots, x_m$, где $m = 4g$. Для каждого $i = 1, \dots, m$ выберем точку $y_i' \in [y_{N-1}, y_N]$ так, что $\varphi(y_i') = x_i$. Можно считать, что $E(\varphi_k) < \sigma$. Тогда

$$d(y_i, y_i') < \sigma < \operatorname{dist}(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}_1) \leqslant \operatorname{dist}(\{y_i\} \cup \{y_i'\}, \widetilde{\gamma}_1) < \delta + 2\sigma < 2\delta.$$

Поэтому можно построить кривые $r_i, s_i, s_i' \subset U_{2\delta}(\{y_i\} \cup \{y_i'\})$ и точки $z_i, z_i' \in \widetilde{\gamma}_1$ ($z_i \neq z_i'$) так, что r_i соединяет y_i и y_i', s_i соединяет y_i и z_i, s_i' соединяет y_i' и z_i', и при этом r_i, s_i и s_i' не имеют общих внутренних точек друг с другом, с $\widetilde{\gamma}_1$ и с ∂M_k. В силу близости этих кривых к точкам y_i и y_i' они не пересекаются с аналогичными кривыми, построенными для других значений i.

Пусть Γ — граф, образованный кривыми $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\gamma}_1$, r_i, s_i и s_i' ($1 \leqslant i \leqslant m$). Этот граф вложен в $\widetilde{V}$, причем его циклы $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\gamma}_1$ содержатся в $\partial \widetilde{V}$. Докажем, что наличие такого графа противоречит неравенству $g(\widetilde{V}) < g$. Можно считать, что $\partial \widetilde{V}$ состоит лишь из двух компонент: $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\gamma}_1$. Граф Γ состоит из $4m$ вершин (это точки $y_i, y_i' \in \widetilde{\gamma}$ и $z_i, z_i' \in \widetilde{\gamma}_1$, $1 \leqslant i \leqslant m$) и $7m$ ребер, из которых $4m$ содержатся в $\partial \widetilde{V}$. При этом имеется не более двух циклов длины 2 или 3 (каждый такой цикл должен содержать y_1 или y_m). Отсюда следует, что число областей, на которые Γ разбивает $\widetilde{V}$, не превосходит $(2\cdot 7m - 4m + 4)/4 = \frac{5}{2}m + 1$. Значит,

$$\chi(\widetilde{V}) \leqslant 4m - 7m + \tfrac{5}{2}m + 1 = 1 - m/2 = 1 - 2g.$$

С другой стороны, $\chi(\widetilde{V}) \geqslant 2 - 2g$ при $g(\widetilde{V}) < g$ и $|\partial\widetilde{V}| = 2$.

Таким образом, подходящая параметризация кривой $\widetilde{\gamma}$ является ε-поднятием кривой γ. Для доказательства леммы осталось построить такие поднятия для всех компонент кривой ∂M. •

3.10. Доказательство теоремы 3.2. Зафиксировав $\varepsilon_0 > 0$, построим достаточно мелкую триангуляцию многообразия M (требования к мелкости триангуляции будут ясны из дальнейшего). Край каждого треугольника должен быть правильно вложенной кривой (см. 3.5). Обозначим одномерный остов триангуляции через Γ. Будем называть *многоугольником* область в M, гомеоморфную диску и ограниченную правильно вложенной кривой, составленной из ребер графа Γ. Найдем такое положительное $\varepsilon < \varepsilon_0$, что $U_{10\varepsilon}(M \setminus T) \neq M$ для любого треугольника T. Выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, с которым утверждения леммы 3.7 выполняются для любых кривых γ_i, составленных из ребер графа Γ. Для достаточно большого k леммы 3.9 и 2.2 позволяют построить δ-поднятие $\psi_k\colon \Gamma \to M_k$ такое, что $\psi_k(\partial M) \subset \partial M_k$ $\psi_k(\Gamma \setminus \partial M) \subset M_k \setminus \partial M_k$ и ψ_k — вложение.

Будем называть треугольник T *удачным*, если $\psi_k(\partial T)$ разбивает M_k. В этом случае по лемме 3.7, п. (3), одна из компонент $M_k \setminus \psi_k(\partial T)$ отображается при φ_k в $U_\varepsilon(T)$. Будем называть эту компоненту *поднятием* треугольника T и обозначать через $\widetilde{T}$. Найдем максимальный набор попарно непересекающихся неудачных треугольников. По лемме 3.7, п. (2), этих треугольников не больше $g - 1$. Если триангуляция достаточно мелкая, то эти треугольники, где бы они ни находились, можно вместе с окрестностями заключить в объединение непересекающихся многоугольников $P_1, \ldots, P_m$ $(m < g)$, диаметры которых не превосходят ε_0. Заметим, что все треугольники в $M \setminus \bigcup P_i$ — удачные, и их диаметры тоже не превосходят ε_0. Исключим из числа удачных все треугольники, содержащиеся в $\bigcup P_i$. Если $\psi_k(\partial P_i)$ является разбивающей кривой, будем называть многоугольник P_i *удачным* и определим его поднятие $\widetilde{P}_i$ так же, как для треугольников.

Пусть M' — замыкание объединения всех удачных треугольников и многоугольников, M'_k — замыкание объединения их поднятий. По выбору числа ε, поднятия различных удачных треугольников и многоугольников не могут содержаться одно в другом. Поэтому эти поднятия попарно не пересекаются, и $\partial M'_k \setminus \partial M_k = \psi_k(\partial M' \setminus \partial M)$. Отсюда следует, что $M' = M$ и $M'_k = M_k$. Действительно, в противном случае имеем $\partial M'_k \setminus \partial M_k \neq \varnothing$, поэтому ψ_k-образы границ неудачных многоугольников в совокупности разбивают M_k, а это противоречит лемме 3.7, п. (1).

Построим теперь почти гомеоморфизм $\varphi'_k\colon M_k \to M$, близкий к φ. Положим $\varphi'_k|_{\psi_k(\Gamma)} = \psi_k^{-1}$. На поднятии каждого треугольника $T \subset M \setminus \bigcup P_i$ определим φ'_k как почти гомеоморфизм между $\widetilde{T}$ и T, непрерывно продолжающий $\psi_k^{-1}|_{\partial\widetilde{T}}$

(например, стянем в точку все, кроме узкой полосы вдоль $\partial\widetilde{T}$). То же самое проделаем для многоугольников P_i. Полученное отображение φ'_k является почти гомеоморфизмом и отличается от φ_k не более чем на $\varepsilon_0 + \varepsilon$. Поскольку ε_0 произвольно, теорема доказана. •

§4. Примеры

В этом параграфе строятся примеры сходимости трехмерных сфер, для которых нарушается полунепрерывность объема. Построения легко переносятся на сферы S^n любой размерности $n \geqslant 3$, кроме того, из примеров для $n = 3$ можно получить примеры для $n > 3$ взятием сферической надстройки и сглаживанием. Основная идея конструкции содержится в лемме 4.1.

Под *диском с дырами* мы понимаем трехмерный диск D^3, из которого удалено несколько (возможно, нуль) внутренностей меньших дисков, отделенных друг от друга и от ∂D^3.

4.1. Лемма. *Пусть M — диск с дырами, d — риманова метрика на M. Тогда существует последовательность римановых метрик $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ на S^3 такая, что $(S^3, d_k) \to (M, d)$ и $\operatorname{Vol}(S^3, d_k) < 2\operatorname{Vol}(M, d)$ для всех k.*

Доказательство. Пусть M имеет m компонент края. Обозначим эти компоненты через $F_1, \dots, F_m$. Выберем $\varepsilon > 0$ и построим гладкие попарно непересекающиеся кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_m \subset M$ так, что

(1) при $i \neq m$ кривая γ_i соединяет F_i с F_{i+1}, а кривая γ_m начинается на F_m и заканчивается во внутренней точке многообразия M;
(2) кривые γ_i не имеют общих точек с ∂M кроме концов;
(3) кривая γ_m образует ε-сеть в (M, d).

Для достаточно малого $\delta > 0$ рассмотрим множество $M_\delta = M \setminus U_\delta(\bigcup \gamma_i)$ и обозначим через d_δ его индуцированную внутреннюю метрику. При $\delta \to 0$ метрики d_δ равномерно сходятся к индуцированной внутренней метрике множества $\bigcup_{\delta>0} M_\delta = M \setminus \bigcup \gamma_i$, которая, в силу трехмерности многообразия M, совпадает с сужением метрики d. Поэтому пространства (M_δ, d_δ) сходятся к (M, d) при $\delta \to 0$. Кроме того, M_δ гомеоморфно D^3 при малых δ.

Пусть δ таково, что $d_H(M_\delta, M) < \varepsilon$ и $M_\delta \simeq D^3$. Рассмотрим удвоение многообразия M_δ, т. е. пространство $S_\delta = M_\delta \cup M'_\delta$, где M'_δ — изометричная копия M_δ, склеенная с M_δ по естественной изометрии между краями. (Расстояние в S_δ между точками $x \in M_\delta$ и $x' \in M'_\delta$ определяется как $\inf_{y \in \partial M_\delta}\{\operatorname{dist}(x, y) + \operatorname{dist}(x', y)\}$). Пространство S_δ гомеоморфно S^3, а его метрику можно превратить в риманову сглаживанием вблизи ∂M_δ (со сколь угодно малым изменением расстояний и объема). Кроме того, $\operatorname{Vol}(S_\delta) = 2\operatorname{Vol}(M_\delta) < 2\operatorname{Vol}(M)$.

По построению, ∂M_δ является ε-сетью в M'_δ, поэтому $d_H(S_\delta, M_\delta) \leqslant \varepsilon$, откуда $d_H(S_\delta, M) < 2\varepsilon$. Поскольку ε произвольно, лемма доказана. •

Нам понадобится следующий технический факт:

4.2. Лемма. *Для любого компакта X с внутренней метрикой и любого $\varepsilon > 0$ существует граф $\Gamma \subset X$ такой, что включение $\Gamma \hookrightarrow X$ является ε-изометрией относительно внутренней метрики, индуцированной на Γ.*

Доказательство. Выберем конечную $\varepsilon/4$-сеть S в X. Соединим каждую пару точек сети S кратчайшей, обозначим объединение этих кратчайших через Γ_0. Пусть $S' \subset \Gamma_0$ — конечная $\varepsilon/4$-сеть относительно внутренней метрики, индуцированной на Γ_0. Для каждой пары точек $x \in S$, $y \in S'$ с $d(x,y) < \varepsilon$ проведем кратчайшую (в X), соединяющую x и y. Пусть Γ — объединение множества Γ_0 и всех этих кратчайших, d_Γ — индуцированная внутренняя метрика на Γ. Тогда включение (Γ, d_Γ) в (X,d) является ε-изометрией. Действительно, рассмотрим любые две точки $x, y \in \Gamma$. Пусть x_1 — точка сети S', ближайшая к x в метрике d_Γ, x_2 — точка сети S, ближайшая к x_1 в метрике d, и пусть точки $y_1 \in S'$ и $y_2 \in S$ аналогичным образом строятся по y. Тогда расстояния $d_\Gamma(x,x_1)$, $d_\Gamma(x_1,x_2)$, $d_\Gamma(y,y_1)$ и $d_\Gamma(y_1,y_2)$ не превосходят $\varepsilon/4$, и $d'(x_2,y_2) = d(x_2,y_2)$. Отсюда $d'(x,y) \leqslant d(x,y) + \varepsilon$, что и требовалось.

Легко доказать, что кратчайшие в этой конструкции можно проводить так, чтобы пересечение любых двух из них было либо одной точкой, либо интервалом. Тогда полученное множество Γ является графом. •

4.3. Теорема. *Для любой римановой метрики d на S^3 существует последовательность $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ римановых метрик на S^3 такая, что $(S^3, d_k) \to (S^3, d)$ и $\mathrm{Vol}(S^3, d_k) \to 0$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Вырезая из (S^3, d) подходящие окрестности произвольной точки, можно приблизить это пространство подмножествами, диффеоморфными D^3. Поэтому для доказательства теоремы достаточно приблизить сферами сколь угодно малого объема любую наперед заданную риманову метрику на стандартном трехмерном шаре $B \subset \mathbf{R}^3$. Лемма 4.1 позволяет строить приближающие метрики не на сферах, а на шарах с дырами.

Пусть d — риманова метрика на B и $\varepsilon > 0$. Разобьем B на мелкие ячейки плоскостями, параллельными координатным плоскостям, так, что длина (в метрике d) любого прямолинейного отрезка внутри одной ячейки не превосходит ε. Затем по лемме 4.2 построим граф $\Gamma \subset B$, включение которого в (B,d) является ε-изометрией относительно его внутренней метрики. Можно считать, что каждая ячейка содержит хотя бы одну вершину графа Γ, а ребра графа Γ составлены из прямолинейных отрезков. Проведем через каждый из этих отрезков какое-нибудь плоское сечение шара. Пусть X — объединение всех этих сечений и граней всех ячеек, снабженное индуцированной внутренней метрикой. Легко видеть, что Γ является 10ε-сетью в X, поэтому X хорошо приближает (B,d).

Построенное множество $X \subset B$ представляет собой объединение плоских дисков, разбивающее B на выпуклые области. Подходящая малая окрестность множества X, снабженная индуцированной внутренней метрикой, дает искомый пример шара с дырами, хорошо приближающего (B,d) и имеющего произвольно малый объем. •

4.4. Замечания. Конструкции из леммы 4.1 и теоремы 4.3 можно рассматривать как способ построения метрики на данном многообразии (трехмерной сфере) так, чтобы некоторое наперед заданное отображение (проекция сферы на диск) оказалось почти изометрией относительно этой метрики. Эти конструкции легко переносятся на другие многообразия при наличии отображений с достаточно простыми особенностями (например, в добавление к структуре проекции можно допустить ветвление над множествами коразмерности 2).

Было бы интересно выяснить, какие гомотопические типы отображений могут быть реализованы последовательностями почти изометрий. Для двумерных многообразий ответ дается теоремой 3.2. Для старших размерностей неясно, существуют ли вообще какие-нибудь ограничения кроме следствия 2.3.

Другой вопрос: если задан пример сходимости, реализуемой почти изометриями нулевой степени, всегда ли можно изменить метрики так, чтобы сходимость и предел сохранились, а объемы многообразий стремились к нулю? Конструкция из теоремы 4.3 обладает большой свободой, и, возможно, некоторый ее вариант подходит и для этого общего случая. Если это так, то вопрос о полунепрерывности объема при известной топологии полностью сводится (посредством теоремы 1.5) к изучению степеней почти изометрий.

Список литературы

[1] Besicovitch A. S., *On two problems of Loewner*, J. London Math. Soc. **27** (1952), 141–144.

[2] Burago D., Ivanov S., *On asymptotic volume of tori*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 800–808.

[3] Croke Ch., Kleiner B., *On tori without conjugate points*, Invent. Math. **120** (1995), 241–257.

[4] Derrick W., *A weighted volume-diameter inequality for N-cubes*, J. Math. Mech. **18** (1968), 453–472.

[5] Derrick W., *A volume-diameter inequality for n-cubes*, J. Analyse Math. **22** (1969), 1–36.

[6] Gromov M., *Filling Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **18** (1983), 1–147.

[7] Gromov M., *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, CEDIC, Paris, 1981.

[8] Grove K., Petersen P., Wu J.-Y., *Geometric finiteness theorems via controlled topology*, Invent. Math. **99** (1990), 205–213; *Erratum*, Invent. Math. **104** (1991), 221–222.

[9] Petersen P., *A finiteness theorem for metric spaces*, J. Differential Geom. **31** (1990), 387–395.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: svivanov@pdmi.ras.ru

Поступило 28 августа 1996 г.