(4) будет равенство; с ростом μ от нулевого решения (I0) будут ответвляться (бифуркационные) решения уравнения Гахова (им будут отвечать совпадающие решения задачи $\mathfrak{C}(\mu)$) . Таким образом, $\varkappa(\mathfrak{C}) = k(\mathfrak{C}^+)=1$, $\varkappa[\mathfrak{C}(\mu)]=2(k[\mathfrak{C}^+(\mu)]=3)$ при $\mu>0$.

Литература

I. Салимов Р.Б. Некоторые основные задачи об изменении контуров теории аналитических функций и их приложения к механике жидкости. Казань, I970.

2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. 3-е изд. М.: Наука, I977.

3. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-е изд. М.: Наука, I966.

4. Аксентьев Л.А. Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // Изв. вузов. Матем. I984. № 2. С.3 - II.

5. Nehari Z. The Schwarzian derivative and schlicht functions // Bull. Amer. Math. Soc. I949. V.55. N 6. P.545 - 55I.

6. Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Киселев А.В. О единственности решения внешней обратной краевой задачи // Изв. вузов. Матем. I984. № I0. С.8 - I8.

Г.Д.Луговая, А.Н.Шерстнев

ОБ УПОРЯДОЧЕННЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМОЙ

Пространства с порядковой единицей - естественные обобщения вещественных упорядоченных векторных пространств, являющихся эрмитовыми частями C^*-алгебр с единицей. Этим обусловлен увеличивающийся интерес к указанным объектам, особенно в направлении, связанном с построением спектральной теории. В частности, ищутся условия на пространства с порядковой единицей, обеспечивающие наличие в них спектральной теоремы (в том или ином контексте (см., напр., [I] - [3]). Как правило, эти условия носят достаточный характер и соответствующие ограничения на пространства с порядковой единицей довольно сильны и приводят к тому, что множество всех крайних точек части положительного конуса, лежащей в единичном шаре пространства, состоит из так называемых $\mathfrak{F}$ –проекций [I] – [3].

В нашей статье предложена характеризация конечномерных пространств с порядковой единицей, в которых справедлива спектральная теорема. Показано, что данная характеризация требует более слабых ограничений на пространства с порядковой единицей по сравнению с известными конструкциями.

Под пространством с порядковой единицей (A, e) понимается упорядоченное векторное пространство A (над полем $\mathbb{R}$) с выделенным элементом $e \in A_+ \equiv \{x \in A \mid x \geqslant 0\}$ таким, что для любого $a \in A$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $-ne \leqslant a \leqslant ne$ и, кроме того, выполнено требование архимедовости: если $na \leqslant e$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $a \leqslant 0$.

Отметим некоторые хорошо известные свойства пространства с порядковой единицей (ппе). Конус A_+ является воспроизводящим: $A = A_+ - A_+$; более того, этот конус замкнут в топологии, определяемой порядковой нормой $\|a\| \equiv \inf\{\lambda > 0 \mid -\lambda e \leqslant a \leqslant \lambda e\}$, а соответствующий единичный шар $A_1 = \{a \in A \mid \|a\| \leqslant 1\}$ совпадает с отрезком $[-e, e]$. В дальнейшем $\mathcal{L} \equiv ext[0, e]$ – множество крайних точек отрезка $[0, e]$. Отображение $p^\perp \equiv e - p$ определяет в $\mathcal{L}$ структуру упорядоченного множества с ортодополнением, причем $p \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$ влечет $\|p\| = 1$.

Напомним, что абстрактное упорядоченное множество с ортодополнением (Q, $\leqslant$, $^\perp$) называется квантовой логикой, если $p \perp q$ (что по определению означает, что $p \leqslant q^\perp$) влечет $p \vee q \equiv \sup\{p, q\}$ существует, и $p \leqslant q$ влечет $q = p \vee r$ для некоторого $r \in Q$, $r \perp p$.

В произвольном ппе множество $\mathcal{L}$ не является квантовой логикой (нетрудно построить соответствующие примеры уже в конечномерных ситуациях). Между тем известные схемы построения спектральной теории таких пространств [I], [2] накладывают на ппе требования, обеспечивающие, в частности, квантово-логическую структуру в $\mathcal{L}$.

По аналогии с [I] примем следующее определение, мотивированное определением спектрального семейства для ограниченного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

I. <u>Определение</u>. Пусть (A, e) – ппе. Отображение $p(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathcal{L}$ назовем ограниченным разложением единицы, если

(I.I) $\quad p(\lambda) = \bigvee\limits_{\xi<\lambda}^{\mathcal{L}} p(\xi) \quad (\lambda\in\mathbb{R})$,

(I.2) существуют γ, $\lambda \in \mathbb{R}$ такие, что $p(\gamma)=0, p(\lambda|=e$.

Спектром разложения I $p(\cdot)$ называется множество

$$6(p(\cdot)) \equiv \left\{\lambda\in\mathbb{R} \mid \forall\varepsilon>0 \left(p(\lambda-\varepsilon)\neq p(\lambda+\varepsilon)\right)\right\}.$$

Это всегда непустое компактное множество. При этом конечную величину $|p(\cdot)| \equiv \sup\{|\lambda| : \lambda\in 6(p(\cdot))\}$ естественно назвать спектральным радиусом.

Нижеследующее определение может служить версией спектральной теоремы в терминах сходимости, определяемой порядковой нормой.

2. <u>Определение</u>. Будем говорить, что в ппе (A, e) имеет место спектральная теорема, если для любого элемента $a\in A$ существует и определено однозначно ограниченное разложение единицы $p(\cdot)$ такое, что

(2.I) если $-|p(\cdot)| = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{N-1} \leqslant |p(\cdot)| < \lambda_N$, то

для любого $6\subset\{1,\ldots,N\}$: $\sum\limits_{k\in 6}[p(\lambda_k)-p(\lambda_{k-1})]\in\mathcal{L}$,

(2.2) $\quad a = \int\limits_{-|p(\cdot)|}^{|p(\cdot)|} \lambda\, p(d\lambda)$.

В данном определении интеграл (2.2) понимается как интеграл Римана-Стилтьеса, т.е. как предел интегральных сумм вида

$\sum\limits_{k=1}^{N} \xi_k(p(\lambda_k)-p(\lambda_{k-1}))$, где $\xi_k\in[\lambda_{k-1},\lambda_k]$, а узлы λ_k подчинены условию (2.I) и $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant N}|\lambda_k-\lambda_{k-1}|\to 0\ (N\to\infty)$.

В качестве инструмента нам будет полезно следующее понятие [3].

3. <u>Определение</u>. Пусть (A, e) - ппе. Замкнутое подпространство $M\subset A$ называется абелевым, если M - решетка, $e\in M$ и

(3.I) $\quad \mathcal{L}_M \equiv ext_M([0,e]\cap M)\subset\mathcal{L}$,

т.е. каждая крайняя точка множества $[0,e]\cap M$ в M является крайней точкой отрезка $[0,e]$ в A.

Следующее предложение фактически характеризует конечномерные абелевы подпространства пространства с порядковой единицей.

4. <u>Предложение</u>. Пусть (A, e) – ппе и семейство $(p_k)_{k=1}^{n} \subset \mathcal{L} \setminus \{0\}$ таково, что

(4.1) $$\sum_{k=1}^{n} p_k = e ,$$

(4.2) $$\forall \sigma \subset \{1, \dots, n\} \left(\sum_{k \in \sigma} p_k \in \mathcal{L} \right).$$

Тогда $M \equiv \mathrm{lin}\,(p_k)_{k=1}^{n}$ – абелево подпространство A.

Обратно, если M – конечномерное абелево подпространство пространства A, то $\mathcal{L}_M$ – конечная булева алгебра и семейство $(p_k)_{k=1}^{n}$ всех атомов в $\mathcal{L}_M$ удовлетворяет условиям (4.1) и (4.2).

Доказательство. Пусть сначала выполнены условия (4.1) и (4.2). Отметим прежде, что $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda_k \geq 0$. Отсюда M – решетка. Например,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k \right) \wedge \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k p_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \min\{\lambda_k, \mu_k\} \cdot p_k .$$

Осталось показать, что $\mathcal{L}_M \subset \mathcal{L}$. Для этого заметим, что

$a = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k \in \mathcal{L}_M$ влечет $\lambda_k \in \{0,1\}$ $(1 \leq k \leq n)$.

Действительно, нетрудно видеть, что $\lambda_k \in [0,1]$. Если, напротив, $0 < \lambda_{k_0} < 1$ при некотором k_0, то найдутся $\lambda, \mu \in [0,1]$ $(\lambda \neq \mu)$ такие, что $\lambda_{k_0} = \frac{1}{2}(\mu + \lambda)$. Следовательно, $a = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$, где $b_1 = \mu p_{k_0} + \sum_{k \neq k_0} \lambda_k p_k$, $b_2 = \lambda p_{k_0} + \sum_{k \neq k_0} \lambda_k p_k$ – элементы из отрезка $[0, e]$, – противоречие. Положим теперь $\sigma = \{k \mid \lambda_k = 1\}$. Тогда $a = \sum_{k \in \sigma} p_k \in \mathcal{L}$ в силу (4.2).

Обратное утверждение очевидно.

Переходим к характеризации конечномерных ппе со спектральной теоремой. Сначала остановимся на хорошо известном абелевом случае.

5. <u>Предложение</u>. В конечномерном абелевом ппе (A, e) для любого $a \in A$ существует и определено однозначно ортосемейство $\{p_1, \dots, p_s\} \subset \mathcal{L}$ такое, что $a = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k p_k$ ($\lambda_k \in \mathbb{R}$ – попарно различны), причем $\sum_{k=1}^{s} p_k = e$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Не ограничивая общности, можно считать, что $a \in [0, e]$. Пусть $\{q, \ldots, q_N\}$ — все атомы булевой алгебры $\mathcal{L} = ext[0, e]$. Тогда, как нетрудно видеть, для любого $j (1 \leq j \leq N)$ найдутся числа $\mu_j \geq 0$ такие, что $a \wedge q_j = \mu_j \cdot q_j$ ($1 \leq j \leq N$). Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ — все ненулевые и попарно различные элементы множества $\{\mu_1, \ldots, \mu_N\}$. Положим $p_k = \sum_{j: \mu_j = \lambda_k} q_j$.

Тогда

$$a = a \wedge (q_1 + \ldots + q_N) = \sum_{j=1}^{N} a \wedge q_j = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j: \mu_j = \lambda_k} \mu_j q_j =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \lambda_k p_k .$$

Из конструкции (p_k) следует единственность указанного представления.

6. Теорема. В конечномерном ппэ (A, e) имеет место спектральная теорема тогда и только тогда, когда для любого $a \in A$ существует наименьшее абелево подпространство $M(a)$, содержащее a.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Достаточность. Пусть $M(a)$ — наименьшее абелево подпространство, содержащее a. В силу предложения 5

$$(6.\mathrm{I}) \quad a = \sum_{k=1}^{s} \eta_k p_k \; (\eta_k \in \mathbb{R}) \; , \quad \sum_{k=1}^{s} p_k = e .$$

Не ограничивая общности, будем считать, что в представлении (6.I) $\eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_s$. Таким образом, представление (6.I) имеет вид (2.2), где разложение I $p(\cdot)$ определено формулой

$$p(\lambda) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } \lambda \leq \eta_1 , \\ p_1 + \ldots + p_j & , \text{ если } \eta_j < \lambda \leq \eta_{j+1} \; (1 \leq j \leq s-1), \\ e & , \text{ если } \lambda > \eta_s . \end{cases}$$

При этом выполнено условие (2.I).

Пусть $\tilde{p}(\cdot)$ — еще одно разложение I, для которого выполнены условия (2.I) и (2.2). В силу конечномерности A интеграл (2.2) сводится к сумме вида

$$(6.2) \quad a = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \left[\tilde{p}(\lambda_{i+1}) - \tilde{p}(\lambda_i) \right] .$$

Полагая $q_i \equiv \tilde{p}(\lambda_{i+1}) - \tilde{p}(\lambda_i)\ (\in \mathcal{L})$, имеем с учетом предложения 4, что $\mathcal{N} \equiv \mathrm{lin}(q_i)$ – абелево подпространство A, содержащее a. Следовательно, $M(a) \subset \mathcal{N}$. При этом $\mathcal{L}_{M(a)} \subset \mathcal{L}_{\mathcal{N}}$. По предложению 5, примененному к ($\mathcal{N}$, e) и элементу $a \in \mathcal{N}$, находим, что представления (6.I) и (6.2) совпадают.

Необходимость. Обратно, если в (A, e) имеет место спектральная теорема, то в силу конечномерности A существует и определено однозначно семейство $(p_k)_{k=1}^{n} \subset \mathcal{L}$ такое, что $\sum_{k=1}^{n} p_k = e$,

$$\sum_{k\in\sigma} p_k \in \mathcal{L}\ (\sigma \subset \{1, \dots, n\}) \quad \text{и} \quad a = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k .$$

Тогда $M(a) \equiv \mathrm{lin}(p_k)_{k=1}^{n}$ – наименьшее абелево подпространство, содержащее a. Теорема доказана.

В известных подходах к некоммутативной спектральной теории (см., напр., [I] – [3]) обычно на ппе накладываются ограничения, позволяющие получить спектральную теорему в терминах так называемых $\mathcal{F}$-значных разложений I (т.е. $p(\cdot): \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{F}(A)$, где $\mathcal{F}(A) = \{ p \in \mathcal{L} \mid \vartheta(p) \cap [-e, e] = [-p, p] \}$, а через $\vartheta(p)$ обозначен порядковый идеал, порожденный элементом p [I]. Как показывает ниже – следующий пример, предложенный нами подход предполагает менее жесткие ограничения на ппе.

7. Пример. Рассмотрим ппе $A(K)$ всех вещественных аффинных функций, заданных на $K \equiv \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0 \} \subset \mathbb{R}^2$ с обычным (поточечным) отношением порядка. Как нетрудно видеть, в данном случае $\mathcal{L} = \{ 0, 1, p_\alpha, 1 - p_\alpha\ (0 \leqslant \alpha < \pi) \}$, где

$$p_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\cos\alpha}(\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y + \cos\alpha), & \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2, \\ \dfrac{1}{1-\cos\alpha}(\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y - \cos\alpha), & \text{если } \pi/2 < \alpha < \pi. \end{cases}$$

В данном случае $\mathcal{L}$ является квантовой логикой, причем элементы множества $\mathcal{L} \setminus \{0, 1\}$ попарно несравнимы. Как показывают элементарные вычисления, для любого элемента $a \in A(K)$ существует и однозначно определено представление вида $a = \lambda p_\alpha + \mu(1 - p_\alpha)\ (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ и по определению 2 в $A(K)$ имеет место спектральная теорема. В то же время $\mathcal{F}(A) = \{0, 1, p_0, p_{\pi/2}\} \not\subseteq \mathcal{L}$. Заметим, что в условиях наличия спектральной теоремы мы можем определить "квадрат" элемента $a=\int\lambda\, p(d\lambda)$ по формуле $a^{(2)}\equiv\int\lambda^2 p(d\lambda)$. В нашем примере произведение элементов a и b, задаваемое формулой $a\circ b\equiv\frac{1}{2}((a+b)^{(2)}-a^{(2)}-b^{(2)})$, однако не обладает свойством билинейности.

Литература

I. Abbati M., Manià A. A spectral theory for order unit spaces // Ann. Inst. H.Poincaré. 1981. V.35. No.4. P.259-285.

2. Alfsen E., Shultz F. Non commutative spectral theory for affine functions spaces on convex sets // Mem. Amer.Math. Soc. 1976. V.172.

3. Bonnet P. Une théorie spectrale dans certains espaces du type A(K) // C.R. Acad. Sci. Paris. 1976. T.282. Sér. A.P.207-210.

Ф.Ф.Султанбеков

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ НОРМ

§ I. Законы композиции в пространстве распределений

Пусть $\mathbb{B}$ - множество всех невозрастающих непрерывных слева функций $\xi:\mathbb{R}\to[0,1]$ таких, что $\xi(x)=1$ при $x\leqslant 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi(x)=0$ (такие функции называются вероятностными, так как $1-\xi$ есть функция распределения некоторой неотрицательной случайной величины). Относительно естественного порядка $\xi\leqslant\eta\Leftrightarrow\xi(x)\leqslant\eta(x)\,(x\in\mathbb{R})$ множество $\mathbb{B}$ имеет наименьший элемент Δ, $\Delta(x)=0$ $(x>0)$. В множестве $\mathbb{B}$ будем рассматривать топологию слабой сходимости, порожденную метрикой П.Леви

$$\ell(\xi,\eta)=\inf\left\{\varepsilon>0:\xi(x+\varepsilon)-\varepsilon\leqslant\eta(x)\leqslant\xi(x-\varepsilon)+\varepsilon\ (x\in\mathbb{R})\right\}.$$

Полезно привести еще одну формулу для метрики ℓ. Обозначим через $\bar{\xi}$ непрерывную кривую на плоскости, полученную из ξ после дополнения ее разрывов вертикальными отрезками. Пусть $P(\xi,a)$ - точка пересечения $\bar{\xi}$ с прямой $y=x+a$ $(a\in\mathbb{R})$. Тогда