В. В. Васин, Итерационные процессы фейеровского типа в некорректных задачах с априорной информацией,
Изв. вузов. Матем., 2009, номер 2, 3–24

https://www.mathnet.ru/ivm1257

Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2009, №2, с. 3–24 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

Посвящается 50-летию журнала.

В.В. ВАСИН

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ФЕЙЕРОВСКОГО ТИПА В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ С АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Аннотация. В последние тридцать лет в теории некорректных задач сформировалось направление исследований, связанное с решением некорректно поставленных задач с априорной информацией. Это класс задач, для которых наряду с базовым уравнением известна дополнительная информация об искомом решении, заданная в форме некоторых соотношений и ограничений, содержащих важные сведения об изучаемом объекте. Учет этой информации в алгоритме, как правило, играет решающую роль для повышения точности решения некорректной (неустойчивой) задачи. Особенно это важно при решении прикладных задач в случае неединственности, поскольку позволяет выделить решение, отвечающее реальности. В данной работе представлен обзор методов решения таких задач. Хотя автор касается всех известных ему подходов в этой проблематике, все же основное внимание уделяется методологии, развиваемой автором и основанной на привлечении итеративных процессов фейеровского типа, которые допускают гибкую и эффективную реализацию для широкого класса априорных ограничений.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача, априорная информация, итеративный процесс, псевдосжимающий оператор, регуляризующий алгоритм.

УДК: 517.983.54; 517.988.68

Abstract. In the latter thirty years, the solution of ill-posed problems with a priori information formed a separate field of research in the theory of ill-posed problems. We mean the class of problems, where along with the basic equation one has some additional data on the desired solution. Namely, one states some relations and constraints which contain important information on the object under consideration. As a rule, taking into account these data in a solution algorithm, one can essentially increase its accuracy for solving ill-posed (unstable) problems. It is especially important in the solution of applied problems in the case when a solution is not unique, because this approach allows one to choose a solution that meets the reality. In this paper we survey the methods for solving such problems. We briefly describe all relevant approaches (known to us), but we pay the main attention to the method proposed by us. This technique is based on the application of iterative processes of the Fejér type which admit a flexible and effective realization for a wide class of a priori constraints.

Keywords: ill-posed problem, Fejér mapping, a priori information, iterative process, pseudocontractive operator, regularizing algorithm.

Поступила 23.06.2008

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00166).

Введение

В качестве абстрактной математической модели некорректно поставленной задачи рассмотрим (не)линейное операторное уравнение первого рода

$$Au = f \tag{0.1}$$

на паре гильбертовых пространств U, F с разрывным, возможно многозначным, отображением A^{-1} и множеством решений $M \neq \emptyset$. Отсутствие непрерывной зависимости решения от исходных данных не позволяет надежно аппроксимировать решение уравнения (0.1) на основе традиционных вычислительных алгоритмов в рамках привычной концепции приближенного решения как решения уравнения (0.1) с приближенными данными.

В пионерских работах М.М. Лаврентьева [1], [2], В.К. Иванова [3], [4], А.Н. Тихонова [5]–[7] был сделан принципиальный прорыв в решении этой проблемы, связанный с введением регуляризованного семейства приближенных решений и регуляризующего алгоритма, что открыло путь к построению регулярных (устойчивых к возмущениям) методов решения некорректных задач при наличии известного уровня погрешности исходных данных. Им же принадлежит вывод о том, что любой метод решения некорректной задачи может иметь сколь угодно медленную сходимость относительно управляющих параметров и только при наличии априорной информации о принадлежности решения множеству корректности позволяет получить приближенное решение с гарантированной точностью.

На первоначальном этапе развития теории некорректных задач основной подход к решению проблемы восстановления устойчивости решения заключался в сужении допустимого множества решений, на котором оператор A задачи (0.1) имеет непрерывный обратный. Для этой цели А.Н. Тихонов [7] привлек топологическую лемму Хаусдорфа о геоморфизме непрерывного взаимно однозначного отображения на компакте и привел примеры таких множеств для обратных задач геофизики.

Однако оставалась проблема, связанная с наличием возмущений правой части уравнения (0.1), которые выводят решение из компакта. Следовательно, в этой ситуации уже нельзя гарантировать устойчивость приближенного решения.

Эта проблема была решена в работах [1]–[4]. А именно, М.М. Лаврентьевым [1], [2] был предложен метод регуляризации сдвигом

$$ABv + \alpha v = f_\delta, \tag{0.2}$$

который порождает сильную аппроксимацию решения $u_0 = Bv_0$, принадлежащего компакту $M = \{u : u = Bv,\ \|v\| \leqslant r\}$, последовательностью приближенных решений $u^\alpha = Bv^\alpha$ уравнения (0.2) при $\alpha(\delta) \to 0$, $\delta/\alpha(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$, здесь AB — положительный оператор, B — линейный вполне непрерывный оператор, u — решение уравнения (0.1) для некоторой правой части $f \in AM$, однако условие о принадлежности $f_\delta \in AM$ уже не требуется. Заметим, что в этом подходе существование решения уравнения (0.1) на компакте M предполагается. Это связано с тем, что не существует эффективных критериев разрешимости операторного уравнения (0.1) при заданной правой части.

Чтобы преодолеть эту трудность, В.К. Иванов [3], [4] обобщил понятие решения с помощью введенного им квазирешения как элемента u, реализующего минимум невязки

$$\min\{\|Au - f\| : u \in Q\} = \|A\widehat{u} - f\| \tag{0.3}$$

на компактном множестве Q. Таким образом, в случае неразрешимости уравнения (0.1) можно оперировать с естественным его обобщением — квазирешением, которое для линейного взаимно однозначного непрерывного оператора A удовлетворяет классическим условиям корректности Адамара и, следовательно, допускает использование эффективных методов его нахождения. Иначе говоря, переход к квазирешению позволяет решить как проблему существования решения, так и проблему построения устойчивого приближенного решения.

Завершение формирования методологии решения некорректно поставленных задач было дано в работах А.Н. Тихонова [5], [6], в которых были сформулированы понятия регуляризованного семейства приближенных решений и регуляризующего алгоритма (РА) (см. (0.6)), а также предложен вариационный метод регуляризации некорректных задач, который носит теперь его имя

$$\min\{\|Au - f\|^2 + \alpha\Omega(u) : u \in U\}; \tag{0.4}$$

здесь лебеговы множества $\Omega_C = \{u : \Omega(u) \leqslant C\}$ стабилизирующего функционала Ω компактны в некоторой топологии. Это означает, что в методе Тихонова используется некоторая априорная качественная информация о решении, поскольку компактность множеств Ω_C предполагает наличие дополнительной гладкости решения по сравнению с элементами (функциями) пространства U.

Если сравнить два вариационных метода (0.3) и (0.4), то с точки зрения численной реализации использование метода Тихонова (0.4) предпочтительней, поскольку мы имеем дело с задачей безусловной минимизации, что позволяет для линейного оператора и квадратичного функционала $\Omega(u)$ свести задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений.

В методе квазирешений мы вынуждены решать задачу на условный экстремум, что, конечно, является более трудной проблемой. Однако существенным достоинством этого метода является возможность использования более детальной информации о решении посредством задания соответствующего априорного множества ограничений Q. Хотя во всех методах решения некорректных задач используется та или иная информация об исходных данных и решении, термины “задачи с априорной информацией” [8], [9], “дескриптивная регуляризация” [10] были введены, чтобы выделить и описать ситуацию, когда известна дополнительная структурная информация о решении, например, знакоопределенность, монотонность, выпуклость, наличие δ-образных форм, изломов, разрывов, а также различных соотношений в виде равенств и неравенств.

Важно также подчеркнуть, что метод Тихонова (0.4) предоставляет широкий выбор для стабилизирующего функционала Ω, в частности, в форме нормы Соболева

$$\Omega(u) = \int_D (|u(x)|^2 + |u^{(n)}(x)|^2)dx, \tag{0.5}$$

что соответствует регуляризации n-го порядка. В содержательном обзоре А.Н. Тихонова, Ф.П. Васильева [11] описаны многие другие возможности задания стабилизатора Ω ([11], с. 319), например, в форме негладкой нормы Липшица или

$$\Omega(u) = \|u\|_{L_1} + V(u),$$

где $V(u)$ — вариация функции на отрезке $[a, b]$. Поэтому на наш взгляд совершенно неоправданно называть вариационный метод (0.4) при выборе $\Omega(u)$ в виде L_1-нормы и обобщенной вариации функции не методом Тихонова, а “bounded variation penalty method” или “regularization by total bounded control”, как это делают авторы работ [12], [13], [14], почему-то считая, что тихоновская регуляризация охватывает лишь случай квадратичного функционала (0.5).

Чтобы завершить введение, касающееся основ теории некорректно поставленных задач, обсудим еще одну важную проблему — проблему регуляризуемости. Существование по крайней мере одного регуляризующего семейства линейных операторов $\{R_\delta\}$ означает возможность устойчивой аппроксимации решений исходной задачи (0.1), т. е.

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{\|Au-f\|\leqslant\delta}\|R_\delta f-u\|=0. \tag{0.6}$$

В этом случае говорят о линейной регуляризуемости по Тихонову задачи (0.1). В противном случае задачу называют нерегуляризуемой.

На первый взгляд кажется, что нерегуляризуемые задачи практически не встречаются и являются своего рода “экзотикой”. Однако оказалось, что существуют вполне обычные нерегуляризуемые некорректные задачи ([17], [18]). Например, в работе [18] установлен следующий интересный факт для интегрального уравнения Фредгольма

$$Au\equiv\int_0^1 K(t,s)u(s)ds=f(t) \tag{0.7}$$

с гладким ядром $K(t,s)$, где $A:C[0,1]\to L_2[0,1]$. Если обратимый оператор A имеет непрерывное продолжение $\overline{A}$ из $C[0,1]$ на $L_2[0,1]$ с ядром $\mathrm{Ker}(\overline{A})$, которое конечномерно (в частности, $\mathrm{Ker}(\overline{A})=\{0\}$), то уравнение (0.7) регуляризуемо. Если же $\dim\mathrm{Ker}(\overline{A})=\infty$, то как показывают примеры, уравнение может быть нерегуляризуемым.

1. Постановка задачи с априорной информацией

Исходным уравнением, которое будем называть базовым, является линейное уравнение (0.1) с ограниченным оператором A, действующим на паре гильбертовых пространств U,F, для которого обратный оператор A^{-1} разрывный и в общем случае многозначный. Дополнительную априорную информацию о решении учитываем с помощью выпуклого замкнутого множества Q, которому принадлежит искомое решение.

Таким образом, приходим к следующей задаче: найти решение системы

$$Au=f,\quad u\in Q. \tag{1.1}$$

Для простоты предполагаем, что только правая часть известна с ошибкой $\|f-f_\delta\|\leqslant\delta$. Общий случай, когда оператор A задан приближенно, не вносит принципиальных затруднений в построение методов.

В прикладных задачах учет априорной информации вызван необходимостью более полного математического описания модели с целью получения более качественного решения, описывающего искомый объект (явление). Дополнительные ограничения могут описывать некоторые важные характеристики решения, связанные с формой описываемого объекта, более детальными свойствами гладкости, различными особенностями и тонкой структурой, вытекающей из физической сущности задачи. Привлечение априорных ограничений особенно важно при исследовании моделей с неединственным решением базового уравнения, так как среди множества решений позволяет выделить (аппроксимировать) решение, удовлетворяющее конкретным физическим требованиям.

Один из возможных подходов к построению устойчивых приближенных решений в задаче с априорной информацией, который широко использовался на первых этапах исследования этой проблемы ([8], [10]), был основан на идее двухэтапного алгоритма. На первом этапе исходная постановка (1.1) с линейным оператором A сводится либо к задаче минимизации (метод квазирешений)

$$\min\{\|Au-f_\delta\|^2:u\in Q\} \tag{1.2}$$

с компактным множеством Q, либо к минимизации функционала Тихонова с ограничениями

$$\min\{\|Au-f_\delta\|^2+\alpha\Omega(u):u\in Q\}, \tag{1.3}$$

где Q — выпуклое замкнутое, не обязательно компактное множество. На втором этапе для решения корректно поставленных экстремальных задач применяются или традиционные методы типа условного, приведенного градиента, метод проекций градиента, метод линеаризации, или специально ориентированные на определенный класс априорных ограничений алгоритмы.

Однако эти методы могут быть обоснованы и эффективно реализованы лишь для узкого класса априорных ограничений, фактически для множеств, определяемых системой линейных неравенств. Здесь уместно упомянуть монографию [8], в которой очень подробно исследовалась задача (1.2) на множествах знакоопределенных, монотонных и выпуклых (вогнутых) функций (в различных сочетаниях) и описаны экономичные численные алгоритмы.

Другой подход, основанный на идее итеративной регуляризации [19], состоит в замене (1.1) задачей решения вариационного неравенства

$$\langle Au - f_\delta, u - v\rangle \leqslant 0 \quad \forall v \in Q, \tag{1.4}$$

здесь A — в общем случае нелинейный монотонный оператор. Для решения вариационного неравенства (1.4) используется итерационный процесс вида

$$u^{k+1} = P_Q[u^k - \gamma_k(Au^k + \alpha_k u^k - f_\delta)], \tag{1.5}$$

для которого при определенном выборе последовательностей $\{\gamma_k\}$, $\{\alpha_k\}$ и правила останова имеет место сходимость итераций (1.5), т. е. процесс порождает РА. Заметим, что наличие в (1.5) оператора проектирования P_Q существенно осложняет численную реализацию итерационного метода, поскольку на каждом шаге необходимо дополнительно решать задачу квадратичного или выпуклого программирования в случае, если Q задано системой линейных или выпуклых неравенств.

В следующем разделе излагается подход к решению задач с априорной информацией, предложенный автором в работах [15], [20] и изложенный в монографиях [9], [16]. Этот подход основан на привлечении аппарата фейеровских отображений [21]–[23] для учета априорных ограничений в форме выпуклых неравенств. Отображения, обладающие свойством фейеровости, позволяют строить итерационные процессы с учетом априорных ограничений достаточно общего вида и, в отличие от метрической проекции, допускают эффективную реализацию. Основная идея заключается в том, что оператор шага в этих итерационных методах конструируется в виде суперпозиции оператора шага некоторой классической итерационной схемы для решения уравнения (0.1) и фейеровского отображения, отвечающего за априорные ограничения. Это отображение на каждом шаге осуществляет сдвиг в направлении множества Q, в результате чего обеспечивается сходимость итераций к решению системы (1.1), т. е. решению уравнения (0.1), удовлетворяющему априорным ограничениям в форме $x \in Q$.

2. Основные классы отображений фейеровского типа и их свойства

Прежде чем перейти к определению классов нерастягивающих отображений, заметим, что в области функционального анализа [9], [24]–[26] и области математического программирования [21]–[23] сформировалась различная терминология при определении одних и тех же классов нелинейных отображений. Поэтому в определениях, представляемых ниже для обозначения различных типов квазисжимаемаемости операторов, приводим названия из обеих упомянутых областей, а в тексте отдаем предпочтение то одной, то другой терминологии в зависимости от предмета обсуждения.

Примем обозначения $\mathrm{Fix}(T) = \{u : u \in U,\ u = T(u)\}$ для множества неподвижных точек оператора (отображения) T; используем запись $T : U \to U$ даже в случае, когда T определен лишь на $D(T) \subseteq U$.

Определение 2.1. Отображение $T : U \to U$ называется M-квазинерастягивающим или слабо M-фейеровским, если $M = \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ и

$$\|T(u) - z\| \leqslant \|u - z\| \quad \forall u \in X, \quad \forall z \in M;$$

обозначим класс $\mathcal{K}_M$.

Определение 2.2. Отображение $T : U \to U$ называется строго M-квазирастягивающим или M-фейеровским, если $M = \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ и $\|T(u) - z\| < \|u - z\|$ для любых $z \in M$ и $u \in U$, $u \notin M$; обозначим класс $\mathcal{F}_M$.

Определения 2.1, 2.2 имеют смысл для произвольного нормированного пространства. В дальнейшем, если не оговорено особо, U — гильбертово пространство.

Определение 2.3. Отображение $T : U \to U$ называется M-псевдосжимающим или сильно M-фейеровским, если $M = \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ и существует константа $\nu > 0$ такая, что

$$\|T(u) - z\|^2 \leqslant \|u - z\|^2 - \nu\|u - T(x)\|^2$$

для любых $u \in H$ и $z \in M$; обозначим класс $\mathcal{P}_M^\nu$.

Непосредственно из определения следуют включения $\mathcal{P}_M^\nu \subset \mathcal{F}_M \subset \mathcal{K}_M$ и, как показывают примеры, эти включения строгие.

В следующей лемме устанавливаются полезные для приложений связи между определенными выше классами [9], [15], [16].

Лемма 2.1. *Пусть $T : U \to U$, $T \in \mathcal{P}_M^\nu$. Тогда $T = \frac{1}{1+\nu}V + \frac{\nu}{1+\nu}I$, где $V \in \mathcal{K}_M$. Обратно, если $V \in \mathcal{K}_M$, то при $\lambda \in (0,1)$ отображение $T = \lambda V + (1-\lambda)I$ принадлежит классу $\mathcal{P}_M^\nu$ при $\nu = (1-\lambda)/\lambda$.*

Определение 2.4. Отображение $T : U \to U$ называется нерастягивающим (нерасширяющим), если

$$\|T(u) - T(v)\| \leqslant \|u - v\| \quad \forall v \in X;$$

обозначим класс через $\mathcal{K}$.

Определение 2.5. Оператор $T : U \to U$ называется псевдосжимающим, если существует константа $\nu > 0$ такая, что выполнено неравенство

$$\|T(u) - T(v)\|^2 \leqslant \|u - v\|^2 - \nu\|u - T(u) - (v - T(v))\|^2$$

для любых $u, v \in H$; обозначим класс $\mathcal{P}^\nu$.

Очевидно, что если $M = \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$, то $\mathcal{K}_M \subset \mathcal{K}$, $\mathcal{P}_M^\nu \subset \mathcal{P}^\nu$; более того, справедлива лемма 2.1 при замене класса $\mathcal{P}_M^\nu$ на $\mathcal{P}^\nu$, а $\mathcal{K}_M$ на $\mathcal{K}$, т. е. при $T \in \mathcal{P}^\nu$ имеет место представление

$$T = \frac{1}{1+\nu}V + \frac{\nu}{1+\nu}I,$$

где $V \in \mathcal{K}$, а если $V \in \mathcal{K}$, то

$$T = \lambda V + (1-\lambda)I \subset \mathcal{P}^\nu, \quad \nu = (1-\lambda)/\lambda.$$

Последнее свойство широко используется в итерационных процессах. Это обусловлено тем, что $\mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(V)$ и оператор $T \in \mathcal{P}^{\nu}_M \subset \mathcal{P}^{\nu}$, обладая более сильным условием сжимаемости, порождает сходящийся процесс (см. теорему 3.1)

$$u^{k+1} = T(u^k) \equiv \lambda V(u^k) + (1-\lambda)u^k, \quad T \in \mathcal{P}^{(1-\lambda)/\lambda}, \tag{2.1}$$

к некоторому элементу $\widehat{u} \in \mathrm{Fix}(V) = \mathrm{Fix}(T)$, тогда как итерационный процесс

$$u^{k+1} = V(u^k) \tag{2.2}$$

с оператором шага $V \in \mathcal{K}_M$ не обязан сходиться.

Класс $\mathcal{P}^1$, т. е. $\mathcal{P}^{\nu}$ при $\nu = 1$ был введен в работе [25] и там же сформулирована теорема о слабой сходимости. Изучение свойств отображений из более широкого класса $\mathcal{P}^{\nu}$ было продолжено в работах автора [15], [27].

Заметим, что в определениях 2.1–2.3 классов нелинейных отображений мы используем двойную терминологию, истоки которой восходят, с одной стороны, к работам из области численного функционального анализа [9], [24]–[26], а с другой — из области математического программирования, где распространенным является термин “фейеровское отображение”.

Прежде чем переходить к изучению свойств операторов из классов, определенных выше, кратко остановимся на истории возникновения термина “фейеровское отображение”, которое было введено в работах И.И. Еремина [16], [21], [23] в честь известного венгерского математика Л. Фейера (1880–1959). Основанием этому термину послужила работа Л. Фейера [28], в которой были введены следующие понятия и определения.

Определение 2.6. Пусть E_n — евклидово пространство, M — подмножество и p, p_1 — две точки из E_n. Если

$$\|p - a\| > \|p_1 - a\| \quad \forall a \in M,$$

то будем говорить, что p_1 ближе к M, чем p. Если точка p такова, что не существует точек p_1, которые ближе ко множеству M, чем p, то точка p называется ближайшей к M.

Введя это понятие, Л. Фейер охарактеризовал множество ближайших точек к M (оно совпадает с выпуклой оболочкой M).

Далее в работе [29] авторами (со ссылкой на [28]) было дано определение монотонной фейеровской последовательности как $\{q_i\}$, удовлетворяющей условиям

$$\|q_i - a\| \geqslant \|q_{i+1} - a\| \quad \forall a \in M, \tag{2.3}$$

где $q_i \neq q_{i+1}$.

Наконец, как было упомянуто выше, в работах [21]–[23] были введены понятия фейеровского отображения (см. определение 2.2), фейеровского метода, фейеровской последовательности как $\{q_i\}$, для которой в (2.3) выполнено строгое неравенство. Автору данной статьи представляется более естественным, когда фейеровость оператора (последовательности) определяется строгим неравенством.

С точки зрения сходимости итерационных процессов наибольший интерес представляют операторы из классов $\mathcal{P}_M$, $\mathcal{F}_M$, для которых будем использовать общий термин “фейеровский оператор (отображение)” или “оператор фейеровского типа”, а для соответствующих процессов с фейеровскими операторами шага — “фейеровские процессы (методы)”.

Классы обладают замечательным свойством, а именно, свойством замкнутости относительно операций суперпозиции и выпуклой суммы [9], [15], [16].

Теорема 2.1. *Пусть* $T_i : H \to H$, H *— гильбертово пространство,* $T_i \in \mathcal{P}^{\nu_i}_{M_i}$, $M = \bigcap_{i=1}^{m} M_i \neq \emptyset$. *Тогда*

1) $T = T_m T_{m-1} \ldots T_1 \in \mathcal{P}_M^{\nu}$, *где* $\nu = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \{\nu_i\}/2^{m-1}$;

2) $T = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i T_i \in \mathcal{P}_M^{\nu}$, *где* $\alpha_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, $\nu = \min\{\nu_i\}$.

Теорема 2.2. *Пусть* $T_i : X \to X$, $T_i \in \mathcal{F}_{M_i}$, $M = \bigcap\limits_{i=1}^{m} M_i \neq \emptyset$. *Тогда каждое из отображений* T, *определяемых формулами*

$$T = T_m T_{m-1} \ldots T_1, \quad T = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i T_i \quad \Big(\alpha_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1\Big),$$

принадлежит классу $\mathcal{F}_M$ M*-фейеровских отображений.*

Замечание 2.1. Утверждения теорем сохраняют силу при любом порядке индексов в суперпозиции $T = T_{i_1} T_{i_2} \ldots T_{i_m}$.

Следствие 2.1. Если $T_i \in \mathcal{P}_M^{\nu_i}$ $(T_i \in \mathcal{F}_M)$, то операторы вида

$$T = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i T_{i_1}^{n_{i_1}} T_{i_2}^{n_{i_2}} \ldots T_{i_m}^{n_{i_m}}$$

также принадлежат классу $\mathcal{P}_M^{\nu}$ (соответственно $\mathcal{F}_M$); здесь $\alpha_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, n_{i_k} — целые числа, $(i_1, i_2, \ldots i_m)$ — произвольная перестановка индексов $(1, 2, \ldots, m)$.

Замечание 2.2. При решении задачи, в том числе некорректно поставленной, методом последовательных приближений (МПП)

$$u^{k+1} = T(u^k), \tag{2.4}$$

$$u^{k+1} = \lambda T(u^k) + (1 - \lambda) u^k \tag{2.5}$$

исходная постановка предварительно сводится к эквивалентной задаче нахождения неподвижной точки некоторого отображения T, т. е. решению уравнения

$$u = T(u). \tag{2.6}$$

Например, решение линейного уравнения

$$Au = f$$

эквивалентно нахождению неподвижной точки оператора

$$T(u) = u - \beta[A^* A u - A^* f] \quad (\beta > 0)$$

или

$$T(u) = (A^* A + \alpha I)^{-1} (\alpha u + A^* f) \quad (\alpha > 0),$$

которые являются операторами шага для метода простой итерации и итерированного варианта метода Тихонова, соответственно.

Задача минимизации выпуклого (суб)дифференцируемого функционала на выпуклом замкнутом множестве Q

$$\min\{f(u) : u \in Q\}$$

сводится к решению вариационного неравенства

$$\langle \nabla f(u), u - v \rangle \leqslant 0 \ \ \forall v \in Q,$$

которое эквивалентно решению уравнения

$$u = P_Q[u - \beta\nabla f(u)] \equiv T(u) \quad (\beta > 0),$$

т. е. нахождению неподвижной точки оператора T.

Утверждения, приведенные выше, открывают широкие возможности, с одной стороны, для конструирования все новых и новых операторов шага в МПП для аппроксимации $u \in \mathrm{Fix}(T)$, т. е. решения уравнения (2.6) (следствие 2.1). С другой стороны, из теорем 2.1, 2.2 следует, что если задача (2.6) может быть представлена в форме системы

$$u = T_i(u), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $T_i \in \mathcal{P}^{\nu_i}_{M_i}$ (или $T_i \in \mathcal{F}_{M_i}$), $\bigcap\limits_{i=1}^{m} M_i = M = \mathrm{Fix}(T)$, то операторные конструкции в виде суперпозиции T_i и их выпуклой комбинации, содержащиеся в этих теоремах, дают широкий простор для построения алгоритмов распараллеливания разрешающего оператора T в МПП (конкретные схемы можно найти в [16]).

В качестве простого, но содержательного примера рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\langle a_i, x\rangle - q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Определим $T_i(u) = P_{M_i}(u)$, где P_{M_i} — оператор метрического проектирования на гиперплоскость $L_i = \{u : \langle a_i, x\rangle - q_i = 0\}$, который определяется явной формулой

$$P_{M_i}(u) = u - (\langle a_i, x\rangle - q_i)a_i/\|a_i\|^2.$$

Тогда итерационные процессы

$$u^{k+1} = T_1(T_2 \dots (T_m(u^k))), \quad u^{k+1} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i T_i(u^k), \quad 0 < \lambda_i < 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,$$

задают алгоритмы Качмажа решения СЛАУ [30].

Фактически те же процессы пригодны для решения систем линейных неравенств (см. раздел 4).

3. Теоремы сходимости МПП для псевдосжимающих операторов

В теоремах, приводимых ниже, устанавливается, что для операторов T из класса $\mathcal{P}^{\nu}_{M}$ в общем случае можно гарантировать лишь слабую сходимость МПП (2.4) (символ “$\rightharpoonup$” примем для обозначения слабой сходимости).

Теорема 3.1. *Пусть оператор* $T : U \to U$, $T \in \mathcal{P}^{\nu}_{M}$ ($T \in \mathcal{K}_M$) *и удовлетворяет условию*

$$u^k \rightharpoonup u, \quad T(u^k) - u^k \to 0 \Rightarrow u \in \mathrm{Fix}(T). \tag{3.1}$$

Тогда для итераций (2.4), (2.5) *справедливы следующие свойства*:

1) $u^k \rightharpoonup \widehat{u} \in \mathrm{Fix}(T)$;

2) $\inf\limits_{z}\{\lim\limits_{k\to\infty} \|u^k - z\| : z \in \mathrm{Fix}(T)\} = \lim\limits_{k\to\infty} \|u^k - \widehat{u}\|$;

3) *либо* $\|u^{k+1} - \widehat{u}\| < \|u^k - \widehat{u}\|$ *для любого* k, *либо* $\{u^k\}$ *стационарна, начиная с некоторого номера* k_0;

4) *справедлива оценка*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|u^{k+1} - u^k\|^2 \leqslant \|u^0 - z\|^2/\nu \quad \forall z \in \mathrm{Fix}(T).$$

Доказательство различных вариантов теоремы можно найти в [9], [15], [25].

Следствие 3.1. Утверждение теоремы остается справедливым, если вместо $T : U \to U$ задан оператор $T : D \to D$, где D — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства U.

Следствие 3.2. Пусть $P_Q^\lambda = I - \lambda(I - P_Q)$, где P_Q — метрическая проекция на выпуклое замкнутое подмножество Q гильбертова пространства, $0 < \lambda < 2$. Тогда $\mathrm{Fix}(P_Q^\lambda) = Q, P_Q^\lambda \in \mathcal{P}_Q^{(2-\lambda)/\lambda}$, выполнено условие (3.1) и, следовательно, для $T = P_Q^\lambda$ справедливо заключение теоремы 3.1, что гарантирует слабую сходимость итераций. Кроме того, если Q — компактное множество, то имеет место сильная сходимость.

Заметим, что включение $P_Q^\lambda \in \mathcal{P}_Q^{(2-\lambda)/\lambda}$ установлено в ([16], гл. 1, лемма 3.2). Условие (3.1) для P_Q^λ вытекает из свойств проекции P_Q, для которой это свойство следует из известного факта для нерастягивающих отображений (напр., [9], гл. 1, лемма 2.1).

Следствие 3.3. Пусть область определения $D(T)$ оператора T выпукла и замкнута, тогда теорема 3.1 сохраняет силу, если вместо условия (3.1) имеет место слабая замкнутость оператора $T : x_k \rightharpoonup x$, $x_k \in D(T)$, $T(x_k) \rightharpoonup y \Rightarrow x \in D(T)$, $T(x) = y$.

Замечание 3.1. В условиях теоремы 3.1 в общем случае нельзя доказать сильную сходимость итераций. Это следует из работы [31], в которой построен соответствующий пример выпуклого замкнутого ограниченного множества $D \subset l_2$, отображения $T : D \to D$ из класса $\mathcal{P}_M^\nu$, для которого последовательность сходится слабо, но не сходится сильно.

Предположим, что итерации в процессе (2.4) вычисляются с погрешностью, т. е.

$$z^{k+1} = T(z^k) + \xi_k, \quad \|\xi_k\| \leqslant \varepsilon_k.$$

Теорема 3.2. *Пусть для оператора T выполнены предположения теоремы 3.1 и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$. Тогда для последовательности $\{z^k\}$ справедливы свойства*: 1) $z^k \rightharpoonup \widehat{z} \in M = \mathrm{Fix}(T)$; 2) $\lim\limits_{k\to\infty} \|z^{k+1} - z^k\| = 0$.

Доказательство этого утверждения при различных условиях содержится в [20], [27], [32].

Определение 3.1. Оператор $T : U \to F$, в общем случае многозначный, называется замкнутым, если его график $\Gamma = \{(u, T(u)) : u \in U\}$ замкнут в $U \times F$.

Определение 3.2. Оператор $T : U \to F$ называется усиленно непрерывным, если $u^k \rightharpoonup u$ влечет $\lim\limits_{k\to\infty} \|u^k - \widehat{u}\| = 0$.

Теорема 3.3. *Пусть $T : U \to U$, где U — гильбертово пространство, T — M-фейеровский оператор, т. е. $T \in \mathcal{F}_M$ (определение 2.2) и выполнено одно из следующих условий*:

1) *однозначный оператор T усиленно непрерывен*;

2) *U конечномерно, T — замкнутый, возможно многозначный, оператор.*

Тогда для $\{u^k\}$ по МПП, определяемому в многозначном случае соотношением $u^k \in T(u^k)$, имеет место сходимость: $\lim\limits_{k\to\infty} \|u^k - \widehat{u}\| = 0$, *где $\widehat{u} \in M$.*

Замечание 3.2. Исследования, связанные с фейеровскими операторами класса $\mathcal{F}_M$, итерационными процессами фейеровского типа и их приложениями к широкому кругу задач математического программирования, были выполнены в работах [21]–[23] (см. также [16]).

Замечание 3.3. В работе [26] (а также [16]) исследуются достаточные условия для систем нелинейных уравнений, при которых выполняются предположения теоремы 3.3 для операторов шага T градиентного метода и метода Ньютона.

Обратимся теперь к основной проблеме, поставленной в разделе 1, а именно, решению задачи с априорной информацией (1.1), которая может быть переформулирована следующим образом.

Задача А. Найти элемент

$$u \in M \bigcap Q \neq \emptyset,$$

где M — множество решений базового уравнения $Au = f$, Q — множество априорных ограничений. Эта задача сводится к нахождению неподвижной точки некоторого отображения T с $\mathrm{Fix}(T) = M \bigcap Q$.

Для построения аппроксимирующей последовательности рассмотрим итерационные процессы [15], [20], [27]

$$u^{k+1} = P(V(u^k)) \equiv T(u^k), \quad u^{k+1} = \lambda P(u^k) + (1-\lambda)V(u^k) \equiv T(u^k), \tag{3.2}$$

где $0 < \lambda < 1$, $P, V : U \to U$.

Теорема 3.4. *Пусть* $P \in \mathcal{P}_Q^{\nu}$, $V \in \mathcal{P}_M^{\mu}$ *и эти отображения удовлетворяют условию* (3.1). *Тогда*

а) *итерации* u^k, *определяемые процессами* (3.2), *удовлетворяют свойствам* 1)–4) *из теоремы* 3.1;

б) *если итерации* (3.2) *вычисляются с погрешностью* ξ_k, *где* $\|\xi_k\| \leqslant \varepsilon_k$, $\varepsilon_k > 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$, *тогда справедливо заключение теоремы* 3.2.

Как отмечено выше (замечание 3.1), при условиях теоремы 3.1 (следовательно, теоремы 3.4, п. а)) в общем случае нельзя гарантировать сходимость по норме пространства H. Однако при дополнительных предположениях можно получить сильную сходимость.

Следствие 3.4. Если Q — компактное множество, $P = P_Q$ — метрическая проекция на множество Q или $P = P_Q^{\lambda} = I - \lambda(I - P_Q)$ — проекция с релаксацией $(0 < \lambda < 2)$. Тогда при точной реализации процессов (3.2) (теорема 3.4, п. а)) имеет место сильная сходимость итераций u^k к некоторому $\widehat{u} \in M \bigcap Q$.

Приведем некоторые примеры компактных множеств.

В пространствах функций одной переменной

$$Q_1 = \{u(x) : u \in W_p^1[a,b],\ \|u\|_{W_p^1} \leqslant r\}, \quad 1 < p < \infty,$$

компактно в пространстве $L_p[a,b]$ и $C[a,b]$;

$$Q_2 = \{u(x) : u \in \bigvee_a^b,\ \|u\|_{\bigvee_a^b} \leqslant r\}$$

компактно в пространствах $L_p[a,b]$, $1 < p < \infty$;

$$Q_3 = \{u(x) : |u(x)| \leqslant C, \quad u \text{ монотонна}\}$$

компактно в пространствах L_p.

В пространствах функций n переменных

$$Q_4 = \left\{u(x) : u \in C[\Pi],\ \max|u(x)| + \sup_{x_1,x_2 \in \Pi} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{\|x_1 - x_2\|_{R^n}^{\mu}} \leqslant r\right\}$$

компактно в пространстве непрерывных функций $C[\Pi]$ и, следовательно, в $L_p[\Pi]$; здесь Π — замкнутое ограниченное подмножество R^n,

$$Q_5 = \{u(x) : \|u\|_{L_1(D)} + J(u) \leqslant r\},$$

где J — обобщенная вариация ([16]),

$$J(u) = \sup \left\{ \int_D u(x) \operatorname{div} v(x) dx : v \in C_0^1(D, R^n),\ |v(x)| \leqslant 1 \right\}$$

является относительно компактным в пространстве $L_p(D)$ при $p < n(n-1)$.

В каждом из рассмотренных примеров при $p = 2$ получаем гильбертово пространство и соответствующие предкомпактные множества Q_i в нем.

Сильной сходимости итераций в некоторых случаях можно добиться, модифицировав процессы (3.2) с помощью корректирующих множителей [33]

$$u^{k+1} = \gamma_k T(u^k) + (1-\gamma_k) v_0, \tag{3.3}$$

где $0 < \gamma_{k-1} < \gamma_k < 1$, $\gamma_k \to 1$ и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям [33] (см. также [9]).

Теорема 3.5. *Пусть оператор шага T в процессах* (3.3) *является нерастягивающим и отображает выпуклое замкнутое ограниченное множество D в себя,* $\operatorname{Fix}(T) = M \neq \emptyset$, γ_k *— допустимая последовательность* [33], $v_0 \in D$.

Тогда последовательность итераций u_k сходится сильно к элементу $\widehat{u} \in M \bigcap Q$, наименее уклоняющемуся от v_0.

Замечание 3.4. Процесс (3.3) обладает регуляризующим свойством, а именно: если $\widetilde{T} \in \mathcal{K}$ — возмущенный оператор, удовлетворяющий условию аппроксимации

$$\|\widetilde{T}(x) - T(x)\| \leqslant \varphi(\delta) \quad (\varphi(\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0)$$

на некотором шаре S_r, то процесс с зашумленными данными

$$\widetilde{u}^{k+1} = \gamma_k \widetilde{T}(\widetilde{u}^k) + (1-\gamma_k) v_0$$

сходится к тому же решению $\widehat{u} \in M \bigcap Q$ при выборе числа итераций $k(\delta)$ в соответствии с правилом $\varphi(\delta) \cdot k(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

В условиях теоремы 3.5 последовательность корректирующих множителей γ_k выбирается a priori и требуются некоторые условия на асимптотику поведения. Можно предложить фактически апостериорный выбор для γ_k ([16], с. 182).

Введем обозначения $T_{\gamma_k}(u) = \gamma_k T(u) + (1-\gamma_k) v_0$, $u_{\gamma_k} = \gamma_k T(u_{\gamma_k}) + (1-\gamma_k) v_0$, т. е. u_{γ_k} — неподвижная точка оператора T_{γ_k}. Так как $0 < \gamma_k < 1$ и $\|T_{\gamma_k}(u) - T_{\gamma_k}(v)\| \leqslant \gamma_k$, то при фиксированном γ_k и начальном приближении u^0 итерационный процесс

$$u_0^n = T_{\gamma_k}^n (u^0), \quad n = 0, 1, \ldots$$

сходится к u_{γ_k}. Тогда на основании неравенства $\|T_{\gamma_k}(u) - u_{\gamma_k}\| \leqslant \gamma_k \|u - u_{\gamma_k}\|$ при достаточно большом номере n для $d_\gamma(u) = \|u - T_\gamma(u)\|$ обеспечивается неравенство

$$d_{\gamma_k}(u_0^n) \leqslant \delta.$$

Лемма 3.1. *Пусть $d_\gamma(u) \leqslant \delta$ и $\gamma, \delta, \varepsilon$ подчинены соотношению $\delta/(1-\gamma) \leqslant \varepsilon$. Тогда*

$$\|u - u_\gamma\| \leqslant \varepsilon.$$

Вышеизложенное позволяет построить вычислительный процесс для аппроксимации неподвижной точки оператора T:

1) задаем последовательности положительных параметров ε_k, γ_k, δ_k, удовлетворяющих соотношению $\delta_k/(1-\gamma_k) \leqslant \delta_k$;

2) задаем начальное приближение u^0 и вычисляем элемент $u_0^{k_1} = T_{\gamma_1}^{k_1}(u^0)$, для которого выполнено неравенство

$$d_{\gamma_1}(u_0^{k_1}) \leqslant \delta_1,$$

полагаем $u^1 = u_0^{k_1}$;

3) пусть u^{n-1} построено, тогда в качестве начального приближения берем u^{n-1} и вычисляем элемент $u_{n-1}^{k_n} = T_{\gamma_n}^{k_n}(u^{n-1})$, для которого выполняется неравенство

$$d_{\gamma_n}(u_{n-1}^{k_n}) \leqslant \delta_n,$$

полагаем $u^n = u_{n-1}^{k_n}$.

4. Примеры операторов фейеровского типа

В итерационных процессах (3.2) оператор шага T является суперпозицией двух отображений V, P, где V — оператор шага некоторого итерационного метода для решения уравнения (0.1) с $\mathrm{Fix}(U) = M$, а M — множество решений базового уравнения $Au = f$. Принадлежность оператора V классам $\mathcal{P}_M$, $\mathcal{F}_M$ или $\mathcal{K}$ позволяет применять теоремы сходимости 3.4 или 3.5. Примеры классических итерационных методов с оператором шага из класса $\mathcal{P}_M^1$ приводятся ниже:

$$V(u) = u - \beta(A^*Au - A^*f), \quad \beta \leqslant 1/\|A\|^2, \tag{4.1}$$

соответствует оператору шага в методе простой итерации;

$$V(u) = (A^*A + \alpha I)^{-1}(\alpha u + A^*f), \quad \alpha > 0, \tag{4.2}$$

определяет итерированный вариант метода Тихонова;

$$V(u) = u - \frac{\|S(u))\|^2}{\|AS(u)\|^2} S(u), \quad S(u) = A^*(Au - f), \tag{4.3}$$

$V(u) = u$, если $S(u) = 0$, задает нелинейный метод наискорейшего спуска,

$$V(u) = u - \frac{\|Au - f)\|^2}{\|S(u)\|^2} S(u), \tag{4.4}$$

где $V(u) = u$, если $Au - f = 0$, является оператором нелинейного метода минимальной ошибки.

Если оператор A самосопряженный и положительно определенный, то

$$V(u) = u - \frac{\langle A^\alpha \Delta, \Delta\rangle}{\langle A^{\alpha+1}\Delta, \Delta\rangle} \Delta, \quad \Delta = Au - f \neq 0, \tag{4.5}$$

где $V(u) = u$ при $\Delta = 0$, порождает α-процессы, которые, в частности, содержат методы минимальных невязок, наискорейшего спуска и минимальной ошибки.

Заметим, что операторы, определяемые формулами (4.1), (4.2), не только M-фейеровские, но и являются нерастягивающими. Поэтому при условии, что отображение P также из класса $\mathcal{K}$, возможна модификация методов (3.2) с помощью корректирующих множителей (см. (3.3)), которая позволяет получить сильную сходимость (теорема 3.5).

Как отмечено в следствии 3.2, в качестве оператора P в процессах (3.2) может выступать метрическая проекция или проекция с релаксацией. Этот оператор определяется явной формулой и легко вычисляется только для некоторых частных случаев (априорных ограничений), которые часто встречаются в приложениях

$$\begin{aligned} Q_1 =&\{u : u \in L_2,\ u \geqslant 0\}, & Q_2 = \{u : u \in U,\ \|u\| \leqslant r\},\\ Q_3 =&\{u : u \in R^n,\ a \leqslant u \leqslant b\}, & Q_4 = \{u : u \in U,\ \langle u, v\rangle - q = 0\},\\ Q_5 =&\{u : u \in U,\ \langle u, v\rangle - q \leqslant 0\}; \end{aligned}$$

здесь U — гильбертово пространство, $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение.

Например, метрическая проекция для множества Q_5 определяется формулой

$$P_{Q_5}(u) = u - \frac{(\langle u, v\rangle - q)^+ v}{\|v\|^2},$$

причем, если априорное множество задано системой линейных неравенств

$$Q = \{u : \langle u, v_i\rangle - q_i \leqslant 0,\quad i = 1, 2, \ldots , m\},$$

то Q — псевдосжимающее (фейеровское) отображение и может быть построено в форме

$$P_Q = P_{Q_1}(P_{Q_2} \ldots (P_{Q_m})) \quad \text{или} \quad P_Q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_{Q_i},\quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\quad 0 < \lambda_i < 1,$$

(см. теорему 2.2), где P_{Q_i} — проекция на полупространство, определяемое i-м неравенством.

Однако, если априорные ограничения заданы системой выпуклых неравенств

$$Q = \{u : u \in U,\ g_i(u) \leqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots , m\}, \tag{4.6}$$

то для нахождения метрической проекции необходимо решать задачу выпуклого программирования, поэтому следует искать альтернативные подходы.

Для нахождения решений систем выпуклых неравенств с дифференцируемыми (в общем случае, субдифференцируемыми) функционалами И.И. Ереминым [21]–[23] были предложены конструкции отображений из класса $\mathcal{F}_Q$, где $\mathrm{Fix}(T) = Q$, Q — множество решений системы (4.6), что позволило сформулировать теоремы сходимости для различных классов задач математического программирования. Оказалось ([9], [15]), что эти отображения обладают более сильным свойством сжимаемости, а именно, принадлежат классу $\mathcal{P}^\nu_Q$. Это означает, что их можно использовать в процессах (3.2) для решения некорректной задачи с априорной информацией.

Более того, как и $\mathcal{F}_Q$, класс $\mathcal{P}^\nu_Q$ обладает свойством замкнутости относительно операций суперпозиции и выпуклой комбинации (см. теорему 2.2 и следствие 2.1), следовательно, при использовании $P_Q \in \mathcal{P}^\nu_Q$, $V \in \mathcal{P}^\mu_M$ процессы (3.2) допускают широкое распараллеливание алгоритмов.

Базовая конструкция фейеровского отображения класса $\mathcal{P}^\nu_Q$ для множества Q, заданного системой неравенств (4.6), имеет вид

$$T(u) = u - d^+(u)e(u)/\|e(u)^2\|, \tag{4.7}$$

где $d(u) \geqslant 0$ — выпуклый функционал, $\mathrm{Fix}(T) = \{u : u \in U,\ d(u) \leqslant 0\}$, $e : U \to U$.

Выпишем конкретные реализации функционала d и отображения e из формулы (4.7)

$$d(u) = \sum_{i=1}^{m} k_i [g_i^+(u)]^{\mu_i},\quad e(u) = \sum_{i=1}^{m} k_i\mu_i [g_i^+(u)]^{\mu_i-1} \nabla g_i(u), \tag{4.8}$$

где $k_i > 0$, $\mu_i \geqslant 1$, ∇g_i — градиент или субградиент функционала g_i, причем для $\mu_i = 1$ суммирование в последней сумме ограничивается множеством $S(u) = \{j : g_j(u) > 0\}$,

$$d(u) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i(u), \quad e(u) = \nabla g_{i(u)}, \quad i(u) \in \{j : g_j(u) = d(u)\}. \tag{4.9}$$

Принимая во внимание свойства отображений T класса $\mathcal{P}_Q$, установленные в теореме 2.1, и тот факт, что множество Q из (4.6) представимо в форме $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{m} Q_i$, выпишем еще два семейства отображений $T \in \mathcal{P}_Q$:

$$T = T_{j_1} T_{j_2} \dots T_{j_m}, \quad T = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i T_i, \quad 0 < \lambda < 1, \tag{4.10}$$

где $j_1, j_2, \dots, j_m$ — любая перестановка индексов $\{1, 2, \dots, m\}$, $0 < \lambda_i < 1$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, а отображение T_i определено формулой

$$T_i(u) = u - \lambda g_i^+(u) \nabla g_i(u) / \|\nabla g_i(u)\|^2, \quad 0 < \lambda < 2. \tag{4.11}$$

Заметим, что именно конструкции фейеровских операторов вида (4.10), (4.11) позволяют использовать различные технологии распараллеливания при реализации итерационных методов. Эти вопросы подробно обсуждаются в книге ([16], гл. 4).

5. Фейеровские процессы для нелинейных уравнений

В предыдущих разделах статьи при решении задачи с априорной информацией в качестве базового уравнения рассматривалось уравнение (0.1) с линейным ограниченным оператором A. Обратимся теперь к случаю, когда базовое уравнение нелинейное

$$Au = f \tag{5.1}$$

с дифференцируемым оператором, действующим на паре гильбертовых пространств U, F. Как и в линейном случае, через M будем обозначать множество решений уравнения (5.1).

При необходимости можно перейти к более общей постановке — минимизации невязки

$$\min\{\tfrac{1}{2}\|Au - f\|^2 : u \in U\}. \tag{5.2}$$

Обозначая целевой функционал в (5.2) через $\Phi(u)$, приходим к необходимому условию экстремума в задаче (5.2)

$$\nabla \Phi(u) = A'(u)^*(Au - f) = S(u) = 0.$$

Поэтому итерационные процессы вида

$$u^{k+1} = u^k - \beta_k [A'(u^k)^*(A(u^k) - f)] \equiv T(u^k) \tag{5.3}$$

следует отнести к методам градиентного типа.

При $\beta_k = \beta$ из (5.3) получаем метод градиентов с постоянным шагом (метод Ландвебера).

Используя принципы выбора параметра β из условия минимума невязки и ошибки для линеаризованного в точке u^k оператора A, приходим к процессам ($S(u) = A'(u)^*(Au - f)$)

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\|S(u^k)\|^2}{\|A'(u^k) S(u^k)\|^2} S(u^k) \equiv T(u^k), \tag{5.4}$$

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\|A(u^k) - f\|^2}{\|S(u^k)\|^2} S(u^k) \equiv T(u^k), \tag{5.5}$$

которые по аналогии с линейным случаем называются методом наискорейшего спуска и методом минимальной невязки соответственно.

Можно сформулировать достаточное условие, гарантирующее принадлежность оператора шага в градиентных методах классу псевдосжимающих операторов $\mathcal{P}_M^\nu$.

Теорема 5.1. *Пусть* $\sup\{\|A'(u)\| : u \in S_\rho(z)\} \leqslant N_1$ *и при некотором* $\varkappa > 0$ *в окрестности* $S_\rho(z)$ *решения* z *уравнения* (5.1) *выполнено условие*

$$\|A(u) - A(z)\|^2 \leqslant \varkappa\langle A(u) - A(z), A'(u)(u - z)\rangle. \tag{5.6}$$

Тогда при $\beta_k \equiv \beta < \frac{2}{\varkappa N_1^2}$ *в методе градиентов* (5.3) *и при* $\varkappa < 2$ *в методах* (5.4), (5.5) *операторы шага принадлежат* $\mathcal{P}_M^\nu$ *при* $\nu = \frac{2}{\beta N_1^2} - 1$ *и при* $\nu = \frac{2}{\varkappa} - 1$ *соответственно.*

Рассмотрим теперь модифицированный метод Левенберга–Марквардта (с дополнительным параметром $\beta > 0$)

$$u^{k+1} = u^k - \beta[A'(u^k)^* A'(u^k) + \alpha_k I]^{-1} S(u^k) \equiv T_k(u^k). \tag{5.7}$$

Введем переменную гильбертову норму

$$\|u\|_k^2 = \langle B_k u, u\rangle, \quad B_k = A'(u^k)^* A(u^k) + \alpha_k I,$$

которая эквивалентна (равномерно по k) основной норме пространства U при $\alpha_k \geqslant \alpha > 0$.

Теорема 5.2. *Пусть* $\sup\{\|A'(u)\|\} \leqslant N_1 < \infty$ *и выполнено условие* (5.6).

Тогда при $0 < \beta < 2\alpha/\varkappa N_1^2$ *для последовательности операторов* $T_k(u) = u - \beta B_k^{-1} S(u)$ *в переменной норме выполнено условие псевдосжимаемости в итерационных точках, т. е.*

$$\|T_k u^k - z\|_k^2 \leqslant \|u^k - z\|_k^2 - \nu\|u^k - T_k(u^k)\|_k^2$$

для некоторого $\nu > 0$.

Из теорем 5.1, 5.2 и 3.1 вытекает

Следствие 5.1. Пусть выполнены предположения теорем 5.1, 5.2 и соотношение

$$u^k \rightharpoonup \overline{u}, \quad S(u^k) \to 0 \Rightarrow S(\overline{u}) = 0 \quad (A(\overline{u}) = f).$$

Тогда итерационные последовательности $\{u^k\}$, порожденные процессами (5.4), (5.5) и (5.7), сходятся слабо к решению $\widehat{u}$ уравнения (5.1).

Следствие 5.2. Если наряду с базовым уравнением (5.1) имеем априорную информацию $\widehat{u} \in Q$ и P_Q — отображение фейеровского типа, например, из класса $\mathcal{P}_Q^\nu$ с условием (3.1), то в условиях теоремы 5.2 и следствия 5.1 итерационные процессы

$$u^{k+1} = P_Q T_k(u^k), \quad u^{k+1} = \lambda P_Q(u^k) + (1 - \lambda) T_k(u^k) \tag{5.8}$$

слабо сходятся к $\widehat{u} \in Q \bigcap M$, где M — множество решений уравнения (5.1), T_k — оператор шага в методе (5.7).

Заметим, что даже в случае однозначной разрешимости уравнения (5.1) процессы (5.8) могут оказаться более эффективными по точности, чем метод (5.7), если отображение P_Q допускает экономичную реализацию.

Рассмотрим процесс

$$\widetilde{u}^{k+1} = P_Q T_k(\widetilde{u}^k),$$

где T_k определен (5.7) либо $T_k = T$ из (5.4), (5.5), и в этих процессах f заменено на f_δ : $\|f - f_\delta\| \leqslant \delta$, Q — компактное множество, содержащее решение $\widehat{u}$.

Лемма 5.1. *Пусть уравнение* (5.1) *однозначно разрешимо и для любого $\delta < \delta_0$ существует номер $k(\delta) \to \infty$, определяемый соотношением*

$$\|A(u^{k+1}) - f_\delta\| \leqslant \tau\delta < \|A(\widetilde{u}^k) - f_\delta\|, \quad k = 1, 2, \dots, k(\delta) - 1, \quad \tau > 1.$$

Тогда $\lim\limits_{\delta\to 0} \|\widetilde{u}^{k(\delta)} - \widehat{u}\| = 0.$

Замечание 5.1. Основное условие на оператор A, гарантирующее псевдосжимаемость и слабую сходимость, определяется соотношением (5.6), в которое входит искомое решение z, что затрудняет проверку в реальных задачах. Однако можно потребовать более сильное условие [34]

$$\|A(u) - A(\widetilde{u}) - A'(u)(u - \widetilde{u})\|^2 \leqslant \eta\|A(u) - A(\widetilde{u})\| \quad \forall u, \widetilde{u} \in S_\rho(u^0), \tag{5.9}$$

которое, как легко видеть, влечет (5.6) при $\varkappa = 2/(1 - \eta^2)$ $(\eta < 1/2)$ и которое не содержит явно решение z. Более того, условию (5.9) (а, следовательно, (5.6)) удовлетворяет ([34]–[36]):

— нелинейный оператор A, порождаемый обратной коэффициентной задачей для дифференциального уравнения

$$-(a(s)u(s)_s)_s = f(s), \quad s \in (0, 1),$$

с краевыми условиями $u(0) = g_0$, $u(1) = g_1$;

— оператор A в нелинейном уравнении Вольтерра

$$A(u) \equiv \int_0^t \varphi(u(s))ds = f(t), \quad \varphi \in C^2(R), \quad A : W_2^1 \to L_2,$$

— интегральный оператор A для плоской задачи гравиметрии [37]

$$A(u) \equiv \int_a^b \ln \frac{(t-s)^2 + H^2}{(t-s)^2 + (H - u(s))^2} ds = f(t);$$

— нелинейный оператор A, порождаемый задачей идентификации параметра (функции) $q(x)$ для дифференциального уравнения второго порядка [38]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega.$$

Замечание 5.2. В отличие от условия (5.6), которое влечет слабую сходимость, при выполнении соотношения (5.9) имеет место сильная сходимость методов (5.3)–(5.5), (5.7) ([34], [36]).

В заключение исследуем задачу условной выпуклой минимизации

$$\min\{f(u) : u \in Q\}$$

с непустым множеством решений M. Отображение P, задаваемое соотношением

$$P : v \to \arg\min\{f(u) + \alpha\|u - v\|^2 : u \in Q\} \quad (\alpha > 0),$$

называется prox-отображением (см. [9], [24], [25], [32]), причем $P \in \mathcal{P}^1$ и $\mathrm{Fix}(P) = M$. Это позволяет применить процесс $u^{k+1} = P(u^k)$ для аппроксимации элементов $u \in M$. При $f(u) = \|Au - f\|^2$, $Q = U$ процесс переходит в итерированный вариант метода Тихонова (см. (4.2)). Эти процессы позволяют оперировать (при постоянном $\alpha > 0$) с сильно выпуклым функционалом, т. е. корректной по Тихонову задачей. Это особенно важно при использовании субградиентных методов в случае негладкого функционала $f(u)$ (например, полученного при тихоновской регуляризации с негладким стабилизатором).

6. Прикладные задачи с априорной информацией и методы их решения

6.1. При исследовании атомной структуры (ближнего порядка в расположении атомов) однокомпонентных неупорядоченных (аморфных) материалов на основе рентгеноспектрального структурного анализа возникает интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$Ag \equiv \int_a^b K(k,r)g(r)dr = \mathcal{X}(k), \quad c \leqslant k \leqslant d, \tag{6.1}$$

где $\mathcal{X}(k)$ — коэффициент поглощения монохроматического пучка рентгеновских лучей для исследуемого материала, который экспериментально измеряется, $g(r)$ — подлежащая определению функция радиального распределения атомов, которая является основной структурной характеристикой материала (подробности в [9], [39]).

Из определения и физического смысла функция $g(r)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$g(r) \geqslant 0, \quad \langle g, v\rangle \equiv \frac{3}{b^3-a^3}\int_a^b r^2 g(r)dr = 1. \tag{6.2}$$

Тщательный численный анализ [9] показал, что ядро оператора A нетривиально, следовательно, уравнение (6.1) имеет неединственное решение. Приближенное решение, построенное на основе классического метода Тихонова

$$g^\alpha : \min\{\|Ag-\mathcal{X}\|^2 + \alpha\|g\|^2_{W_2^1(\text{ или } L_2)}\}, \tag{6.3}$$

оказалось совершенно нефизичным (на значительной части интервала отрицательно). Это означает, что нормальное решение, восстанавливаемое методом (6.3), не удовлетворяет условиям (6.2).

Для получения "физичного" решения был применен итерированный вариант метода Тихонова в совокупности с проектированием на априорные множества (ограничения). Для этого определяется prox-отображение (оператор шага базового метода)

$$V : v \to \arg\min\{\|Ag-\mathcal{X}\|^2_{L_2} + \alpha\|g-v\|^2_{W_2^1 \text{ (или } L_2)}\}$$

и конструируется итерационный процесс (см. (3.2))

$$g^{k+1} = PV(g^k) \equiv T(g^k), \tag{6.4}$$

где $P = P_{Q_2}P_{Q_1}$, P_{Q_1} — метрическая проекция на множестве $Q_1 = \{g : \langle g, v\rangle = 1\}$, P_{Q_2} — проекция на множестве $Q_2 = \{g : g \geqslant 0\}$. Здесь оператор шага T является суперпозицией двух псевдосжимающих отображений P с $\mathrm{Fix}(T) = Q = Q_1 \bigcap Q_2$ и V с $\mathrm{Fix}(V) = M$ — множество решений задачи (6.1), причем $\mathrm{Fix}(T) = M \bigcap Q$. Таким образом, находимся в условиях теоремы 3.4.

Широкий вычислительный эксперимент для модельных и реальных данных показал, что учет априорных ограничений в алгоритме (6.4) с помощью проекций позволяет получить решение хорошего качества. Подробности численного моделирования изложены в книге [9] (см. также библиографию к ней).

Следует сказать, что при использовании в качестве V операторов, порождаемых методами наискорейшего спуска, минимальной ошибки и сопряженных градиентов с тем же отображением P, решение также восстанавливается с приемлемой точностью.

6.2. При наклонном радиозондировании ионосферы с поверхности Земли с целью определения вертикального профиля электронной концентрации по эпицентральным расстояниям, полученным на двух частотах, при нарушении монотонной зависимости электронной концентрации от высоты возникает так называемая проблема волноводов. В этом случае нарушается единственность решения и, кроме того, традиционная методика (обращение интеграла типа Абеля) позволяет определить концентрацию только для начала волновода (участка нарушения монотонности).

В работе [40] была решена проблема волноводов и установлено, что на волноводе нельзя однозначно определить электронную концентрацию, однако можно определить "меру волновода" (меру множеств Лебега для коэффициента преломления) из уравнения Фредгольма–Стилтьеса вида

$$\int_a^b K(p,r)dF(r) = R(p), \tag{6.5}$$

где $K(p,r)$ — некоторая заданная, $R(p)$ — экспериментально определяемая функции, $F(r)$ — искомая мера волновода. Более того, с помощью функции $F(r)$ построена вычислительная процедура для нахождения электронной концентрации выше волновода (подробности в [40]).

При использовании метода регуляризации Тихонова первого порядка в стандартной форме качество решения уравнения (6.5) получается невысоким. Однако, если учесть априорные сведения о решении F в виде

$$F(a) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F'(r) \geqslant 0, \quad F(r) \geqslant 0$$

и привлечь итерационный процесс в форме (6.4), то удается существенно повысить качество приближенного решения. При этом $P = P_{Q_2}P_{Q_1}$, где P_{Q_1} — отображение вида (4.7), (4.8) для системы линейных неравенств, полученной после дискретизации условия $F'(r) \geqslant 0$, а P_{Q_2} — проекция на положительный ортант.

6.3. Задача восстановления изображения, зашумленного аппаратной функцией регистрирующего прибора и аддитивной помехой, сводится к решению двумерного интегрального уравнения первого рода типа свертки

$$Au \equiv \int_0^1 \int_0^1 K(x-t, y-s)u(t,s)dt\,ds = f(x,y). \tag{6.6}$$

Численные эксперименты (напр., [14]) показывают, что для задач (6.6), связанных с реконструкцией изображений, использование тихоновской регуляризации первого порядка (со стабилизатором $\Omega(u) = \|u\|^2_{W^1_2}$) не всегда целесообразно ввиду сильного сглаживания негладкого решения. Привлечение стабилизатора

$$\Omega(u) = \|u\|^p_{L_p} + J(u) \tag{6.7}$$

с вариацией $J(u)$ того или иного вида ([14]) обычно приводит к лучшим результатам. В частности, в качестве функционала $J(u)$ часто используется обобщенная вариация [41]

$$J(u) = \sup\left\{ \int_0^1 \int_0^1 u(x,y)\operatorname{div} v(x,y)dx\,dy : \ v \in C^1_0(\Pi, R^2), \ \ |v| \leqslant 1 \right\}.$$

Для решения регуляризованной задачи

$$\min\{\|Au - f_\delta\|^2_{L_p} + \alpha\Omega(u) : u \in U\} = \Phi^* \tag{6.8}$$

с недифференцируемым стабилизатором $\Omega(u)$ вида (6.7) в работах [42], [43] предложен следующий подход. Предположим, что известна некоторая оценка $\widetilde{\Phi}$ для Φ^*, т. е.

$$\widetilde{\Phi} \leqslant \Phi^* + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

и априорная информация вида $\widetilde{u} \geqslant 0$. Теперь вместо (6.8) можно решать систему выпуклых неравенств

$$\Phi^\alpha(u) - \widetilde{\Phi} \leqslant 0, \quad u \geqslant 0, \tag{6.9}$$

где Φ^α — целевой функционал в (6.8).

Построенный по методике раздела 4 для системы (6.9) итерационный процесс субградиентного типа

$$u^{k+1} = P^+\left\{u^k - \lambda\frac{[\Phi^\alpha(u^k) - \widetilde{\Phi}]\partial\Phi^\alpha(u^k)}{\|\partial\Phi^\alpha(u^k)\|^2}\right\}, \quad 0 < \lambda < 2,$$

где P^+ — проекция на положительный ортант, а $\partial\Phi^\alpha(u^k)$ — произвольный субградиент функционала Φ^α, вполне удовлетворительно решает задачу (6.8) ([43]).

Иной подход к численному решению задачи негладкой минимизации (6.8) ([14], [42], [44]) основан на предварительной аппроксимации негладкого стабилизатора Ω некоторым семейством дифференцируемых функционалов Ω_β и на последующем использовании методов гладкой оптимизации.

6.4. В обратных задачах теплового зондирования атмосферы, связанных с определением температуры $T(h)$ и концентраций $n(h)$ парниковых газов (CO, CO_2, CH_4) как функций высоты по спектрам, измеряемым спутниковым сенсором, решается нелинейное интегральное уравнение

$$A(u) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} W(\nu')F(\nu - \nu')d\nu' = \Phi(\nu),$$

которое является сверткой спектра высокого разрешения W с аппаратной функцией F. Функция W зависит от коэффициента поглощения $B_\nu(T(h), n(h))$, который нелинейным образом зависит от искомых параметров $u(h) = (T(h), n(h))$.

Обычно определяется только часть параметров (например, температура и метан, температура, водяной пар и углекислый газ), а остальные считаются фиксированными и их значения выбираются из банка данных для исследуемого района и выбранных времени и условий съемки.

Особенностью такого типа задач является наличие весьма качественной априорной информации об искомом решении в форме двусторонних неравенств

$$Q = \{u : \quad \underline{u}(h) \leqslant u(h) \leqslant \overline{u}(h)\}. \tag{6.10}$$

Вполне удовлетворительные результаты получаются при использовании итеративно регуляризованных методов типа Гаусса–Ньютона, в частности, модифицированного метода Левенберга–Марквардта (см. (5.7))

$$u^{k+1} = P_Q[u^k - \beta(A'(u^k)^*A'(u^k) + \alpha_k I)^{-1}(A'(u^k)^*(A(u^k) - \Phi))]$$

с оператором проектирования P_Q на n-мерный параллелепипед (6.10) ([45], [46]).

Литература

[1] Лаврентьев М.М. *Об интегральных уравнениях первого рода* // ДАН СССР. – 1959. – Т. 127. – № 1. – С. 31–33.

[2] Лаврентьев М.М. *О некоторых некорректных задачах математической физики.* – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.

[3] Иванов В.К. *О линейных некорректных задачах* // ДАН СССР. – 1962. – Т. 145. – № 2. – С. 270–272.

[4] Иванов В.К. *О некорректно поставленных задачах* // Матем. сб. – 1963. – Т. 61. – № 2. – С. 211–223.

[5] Тихонов А.Н. *О регуляризации некорректно поставленных задач* // ДАН СССР. – 1963. – Т. 153. – № 1. – С. 49–52.

[6] Тихонов А.Н. *О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации* // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151. – № 3. – С. 501–504.
[7] Тихонов А.Н. *Об устойчивости обратных задач* // ДАН СССР. – 1944. – Т. 39. – № 5. – С. 195–198.
[8] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. *Регуляризующие алгоритмы и априорная информация.* – М.: Наука, 1983. – 198 с.
[9] Васин В.В., Агеев А.Л. *Некорректные задачи с априорной информацией.* – Екатеринбург: УИФ Наука, 1993. – 263 с.
[10] Морозов В.А., Гольдман Н.П., Самарин М.К. *Метод дескриптивной регуляризации и качество приближенных решений* // Инж. физ. журн. – 1977. – Т. 38. – № 6. – С. 117–121.
[11] Тихонов А.Н., Васильев Ф.П. *Методы решения некорректных экстремальных задач* // Math. models and numerical methods. – Warszava: Banach center publ., 1978. – V. 3. – P. 297–342.
[12] Acar R., Vogel C.R. *Analysis of bounded variation penalty method for ill-posed problems* // Inverse Problems. – 1994. – V. 10. – P. 1217–1229.
[13] Chavent E., Kunish K. *Regularization of linear least squares problems by total bounded variation control* // Optimization and calculus of variations. – 1997. – V. 2. – P. 359–376.
[14] Vogel C.R. *Computational methods for inverse problems.* – Philadelphia: SIAM, 2002. – 183 p.
[15] Васин В.В. *Итерационные методы решения некорректных задач с априорной информацией в гильбертовых пространствах* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1988. – Т. 28. – № 7. – С. 971–980.
[16] Васин В.В., Еремин И.И. *Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения.* – Москва–Ижевск: Ин-т компьют. исслед. РХД, 2005. – 199 с.
[17] Винокуров В.А. *Об одном необходимом условии регуляризуемости по Тихонову* // ДАН СССР. – 1970. – Т. 195. – № 3. – С. 530–531.
[18] Менихес Л.Д. *О регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам* // ДАН СССР. – 1978. – Т. 241. – № 2. – С. 625–629.
[19] Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Итеративные методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1989. – 128 с.
[20] Васин В.В. *Проксимальный алгоритм с проектированием в задачах выпуклого программирования.* – Свердловск, 1982. – 47 с. Препринт (АН СССР. Уральск. научн. центр, Ин-т матем. и механ.).
[21] Еремин И.И. *Обобщение релаксационного метода Моцкина–Агмона* // УМН. – 1965. – Т. 20. – Вып. 2. – С. 183–187.
[22] Еремин И.И. *О системах неравенств с выпуклыми функциями в левых частях* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1966. – Т. 30. – Вып. 2. – С. 265–278.
[23] Еремин И.И. *Методы фейеровских приближений в выпуклом программировании* // Матем. заметки. – 1968. – Т. 3. – Вып. 2. – С. 217–234.
[24] Moreau J.J. *Proximite et dualite dans un espace Hilbertien* // Bull. Soc. Math. France. – 1965. – V. 93. – № 2. – P. 273–299.
[25] Martinet B. *Determination approachee d'un point fixe d'une application pseudo-contractante. Cas de l'application prox* // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A–B. – 1972. – V. 274. – P. A163–A165.
[26] Maruster S. *Quasi-nonexpansivity and two classical methods for solving nonlinear equations* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 62. – № 1. – P. 119–123.
[27] Васин В.В. *Дискретизация, итерационно–аппроксимационные алгоритмы решения неустойчивых задач и их приложения.* – Дисс. ... докт. физ.-матем. наук, Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1985.
[28] Fejér L. *Über die Lage der Nullstellen von Polynomen, die aus Minimumforderungen gewisser Art entspringen* // Math. Ann. – 1922. – V. 85. – № 1. – P. 41–48.
[29] Motzkin T.S., Schoenberg J.J. *The relaxation method for linear inequalities* // Canad. J. Math. – 1954. – V. 6. – № 3. – P. 393–404.
[30] Kaczmarz S. *Angenaherte Auflosung von Systemen linearer Gleichungen* // Bull. Inst. Acad. Pol. Sci. Leet. – 1937. – V. 35. – № 4. – P. 355–357.
[31] Genel A., Lindenstrauss L. *An example concerning fixed point* // Israel J. Math. – 1975. – V. 22. – № 1. – P. 81–86.
[32] Rockafellar R.T. *Monotone operators and the proximal point algorithm* // SIAM J. Control and Optim. – 1976. – V. 14. – № 5. – P. 877–898.
[33] Halperin B. *Fixed points of nonexpansive maps* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 73. – № 6. – P. 957–961.
[34] Neubauer A., Scherzer O.A. *A convergence rate results for a steepest desceut method and minimal error method for the solution of nonlinear ill-posed problems* // J. Anal. Appl. – 1995. – V. 14. – № 2. – P. 369–378.

[35] Scherzer O. *Convergence criteria of iterative methods based on Landweber iteration for solving nonlinear problems* // J. Math. Anal. Appl. – 1995. – V. 194. – P. 911–933.
[36] Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. *Regularization of inverse problems.* Dordrecht ets.: Kluwer Acad. Publ., 1996. – 321 p.
[37] Gilyazov S.F., Gol'dman N.L. *Regularization of ill-posed problems by iteration methods.* Dordrecht ets.: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 340 p.
[38] Kabanikhin S.I., Kowar R. and Scherzer O. *On the Landweber iteration for the solution of a parameter identification problem in a hyperbolic partial differential equation of second order* // J. inv. ill-posed problems. – 1998. – V. 6. – № 5. – P. 403–430.
[39] Агеев А.Л., Бабанов Ю.А., Васин В.В., Ершов Н.В. *Построение регуляризующих алгоритмов по определению структуры аморфных тел методом рентгеноспектрального структурного анализа* // Численные и аналитич. методы решения задач механ. сплошной среды. Свердловск. – 1981. – С. 3–25.
[40] Агеев А.Л., Васин В.В., Бессонова Е.Н., Маркушевич В.М. *Радиозондирование атмосферы на двух частотах. Алгоритмический анализ интегрального уравнения Фредгольма–Стилтьеса* // Теор. проблемы в геофизике (Вычисл. сейсмология. Вып. 29). – М.: Наука – 1997. С. 100–118.
[41] Giusti E. *Minimal surfaces and functions of bounded variation.* – Basel: Birkhäuser, 1984. – 240 p.
[42] Vasin V.V. *Regularization and iterative approximation for linear ill-posed problems in the space of functions of bounded variation* // Proc. Stekl. Inst. Math. Suppl. 1. – 2002. – P. S225–S229.
[43] Васин В.В., Сережникова Т.И. *Двухэтапный метод аппроксимации негладких решений и восстановление зашумленного изображения* // Автоматика и телемехан. – 2004. – № 3. – С. 392–402.
[44] Леонов А.С. *Кусочно-равномерная регуляризация двумерных некорректных задач с разрывными решениями: численный анализ* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39. – № 12. – С. 1934–1944.
[45] Vasin V.V., Gribanov K.G., Zakharov V.I. et al. *Regular methods of solution of ill-posed problems for remote sensing of Earth atmosphere using high-resolution spectrometry* // Proc. SPE. – 2006. – V. 6880, 65800T (Dec. 12, 2006).
[46] Грибанов К.Г., Захаров В.И., Васин В.В. *Итеративная регуляризация в задаче определения* CO_2 *в атмосфере по данным спутникового зондирования* // Тез. докл. Междун. конф. "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (01–06 сент. 2008. Екатеринбург). – С. 119–120.

В.В. Васин

профессор, кафедра вычислительной математики,
Уральский государственный университет,
620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51,

e-mail: vasin@imm.uran.ru

V.V. Vasin

Professor, Chair of Computational Mathematics,
Ural State University,
51 Lenin Ave., Ekaterinburg, 620000, Russia,

e-mail: vasin@imm.uran.ru